S. 1802. C. 27

S 1802 c.27.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIII.

pro Anno MDCCLXVIII.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIX.

BRITISH
NATURAL HIS

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM,
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS XIII.

MATHEMATICA.

I.

De curua Hypergeometrica hac aequatione expreſſa.

$$y = 1.\ 2.\ 3 \ldots x.$$

Auctore L. Eulero pag. 3.

In praeſenti diſſertatione Illuſtr. Auctor proprietates ſingularis cuiusdam curuae explicat, quam nomine hypergeometricae inſigniuit eam ob cauſam, quod ſi huius curuae abſciſſae ſecundum ordinem numerorum naturalium capiantur, applicatae progreſſionem hypergeometricam *Walliſii* ſequantur. Etiamſi vero minus pateat, quomodo ex aequatione propoſita, indoles curuae pro iis caſibus definiatur; vbi x per numeros fractos exprimitur, in genere tamen liquet hanc aequationem etiam ad iſtos caſus applicari poſſe, quoniam ex eadem omnino pateat, ſi pro $x = p$, ſit $y = q$, fore quoque pro $x = p + 1$, $y = q(p+1)$ atque pro $x = p - 1$, $y = \frac{p}{q}$. Inſignes vero curuae commemoratae proprietates, quas hic contemplatus eſt Illuſtr. Auctor, quatuor omnino quaeſtionibus continentur,

quarum *prima* in eo verſatur, vt inueſtigetur pro hac curua aequatio continua inter abſciſſam x et applicatam y, quae pro ſingulis valoribus ipſius x locum inuentura ſit, *ſecunda* rationem exponit, qua directio tangentis ad datum quoduis curuae punctum definiatur, *tertia* vero indolem portionis minimae huius curuae, circa id punctum ſitae determinat et denique *quarta* naturam curuae circa punctum eius infimum, vbi applicata eſt minima definit. Pro prima vero quaeſtione reſoluenda, quum aequatio primum propoſita, in alias ex factoribus in infinitum excurrentibus compoſitas, variis modis transformari queat, ex quibus nouis aequationibus iterum alias deriuare licet; praecipuae earum §. 12. recenſentur, vt ex illis quouis caſu, quae maxime ad vſum accommodatae videntur eligi poſſint. Praeter iſtas vero aequationes occurrunt quoque tales, vbi applicata y per aequationem integralem definitur, erit enim poſito $x = p$, nouamque variabilem u introducendo $y = \int du\,(\mathrm{L}\frac{1}{u})^p$, integratione nimirum a termino $u = 0$ vsque ad $u = 1$ peracta, ſimili quoque ratione erit $y = \int e^{-v} v^p\, dv$, vbi integratio a valore $v = 0$ vsque ad $v = \infty$ extenditur. Pro inueſtiganda ad datum quoduis curuae punctum eius tangente, imprimis adhibita eſt aequatio V ex §. 12, quippe quae huic negotio maxime viſa eſt idonea, deinceps autem formula generalis pro tangentis determinatione inde deriuata, ad praecipua huius curuae puncta adplicata eſt. Similiter

militer ad binas vltimas quaeſtiones explicandas, aequatio haec V in vſum vocata eſt, vnde non ſolum tractus curuae egregie illuſtratur, ſed etiam radius curuaturae eiusque variatio per formulas maxime concinnas definitur.

Quum vero Illuſtr. Auctor obſeruauerit formulam $1.2.3 \ldots . x$ exprimi quoque poſſe per hanc ſeriem:

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quae quidem ſeries etiamſi ad curuae hypergeometricae naturam explicandam non admodum ſit idonea, Geometrarum tamen attentione quam maxime digna videtur; hinc reliquam huius diſſertationis partem, vberiori huius ſeriei explicationi deſtinauit, vbi eam ſtatim in generaliorem transmutauit ſubſtituendo in exponentibus n loco x et in coefficientibus m loco x, ex quo igitur apparet, ſi fuerit $n = m$, fore ſummam huius ſeriei $= 1.2.3 \ldots . m$. Quomodo autem pro aliis caſibus quibus m et n ſunt inaequales, haec ſumma comparata eſſe debeat, de eo imprimis fuſius heic agitur. Et generatim quidem demonſtratur, ſi fuerit $n < m$, poſitis ambobus numeris n et m integris, vel ſaltem $m - n$ numero integro poſitiuo, fore ſummam huius ſeriei $= 0$. Pro hac autem ſumma definienda, vbi $n > m$ ſpeciales primo euoluuntur caſus, quibus $n = m + 1$, $n = m + 2$ vel $n = m + 3$ etc. tum vero idem in genere perficitur pro valore ipſius $n = m + \lambda$,

quae

quae quidem ſummatio egregiam ſeriei allatae transformationem ſuppeditat, quam igitur Illuſt. Auctor alia deinceps via magis directa inueſtigare, operae pretium iudicauit. Atque haec demum inueſtigatio, occaſionem ſubminiſtrauit, eiusmodi ſummationes multo generalius perficiendi, ita vt denotante $\Phi : x$ functionem quamcunque ipſius x, etiam ſumma huius ſeriei :

$$s = \Phi : x - m\Phi : (x-1) + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}\Phi : (x-2) - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\Phi : (x-3) + \text{etc.}$$

aſſignari queat.

II.

Quomodo numeri praemagni ſint explorandi, vtrum ſint primi, nec ne?

Auctore L. Eulero pag. 67.

Inter maximi momenti quaeſtiones Arithmeticas, praecipuum omnino locum tenet illa, qua quaeritur de methodo explorandi naturam numerorum, vtrum primi ſint nec ne? Quamuis autem hoc ipſum, vix alia ratione generaliter perfici poſſe videatur, quam operatione vulgari, qua diuiſio per omnes numeros primos, radice quadrata numeri pro-

propoſiti minores eſt tentanda; quum tamen haec operatio pro numeris mediocriter magnis, iam operoſior ſit, quam vt ſuſcipi queat, hinc operae omnino pretium erat, eiusmodi methodum tradere, quae etiamſi pro certo tantum numerorum genere valeat, ad numeros tamen quantumuis magnos ſub eo comprehenſos, explorandos applicari poſſit. Quum itaque Illuſtr. Auctor poſt Fermatium obſervauerit omnes numeros primos in hac forma $4n+1$ contentos non niſi vnico modo, in duos numeros quadratos reſolui poſſe, exinde viciſſim colligit numeros huius formae $4n+1$, qui vnico modo in duo quadrata reſoluuntur fore numeros primos, illis tamen numeris exceptis, qui ipſi ſunt quadrati. Examen igitur hoc ita inſtituendum eſt, vt a numero propoſito, omnes numeri quadrati ipſo minores ſubtrahantur, eaque reſidua notentur, quae etiam numeri ſunt quadrati, vbi ſi fiat, vt vel nullum vel plura talia dentur reſidua, tum tuto colligere licet, numerum eſſe compoſitum; ſin autem vnicum detur, erit numerus propoſitus vel primus vel ipſe quadratus, qui duo caſus facile ab inuicem dignoſcuntur. Liquet autem pro hoc fine obtinendo ſufficere, ſi a numero propoſito tantum quadrata ſemiſſi maiora ſubtrahantur, quo ipſo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur. Quum vero etiam haec operandi ratio pro numeris praemagnis nimis ſit moleſta, eae ſubtractiones heic excludendae ſunt, quae ad talia reſidua perducant,

quae cum quadratorum natura conſiſtere nequeunt, qualia ſunt, quae his formis continentur $3m+2$, $5m+2$, $5m+3$ etc. Si igitur numerus propoſitus $N=4n+1$ ſimul contineatur in his formis $3m+2$ et $5m+2$ vel $3m+2$ et $5m+3$, inde perſpicitur quales eſſe debeant numeri, quorum quadrata ſubtrahenda ſunt. Scilicet pro 1ma ſpecie, qua $N=4n+1$ per has formas $3m+2$, $5m+2$ exprimitur, continebitur N in hac formula $60n+17$, vnde ſi $N=xx+yy$, erit x vel y, huius formae $15p\pm(1.4)$, nempe vel $15p\pm 1$, vel $15p\pm 4$. Pro altera deinceps ſpecie, qua $N=4n+1$, duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ exprimi poteſt, erit quoque idem N huius formae $60.n+53$, vnde ab eo, iſta ſolum quadrata ſubtrahenda ſunt, quorum radices in forma $15p\pm(2.7)$ continentur. Omnes vero numeri formae $4n+1$, quum ſub his quatuor ſpeciebus comprehendantur:

$$16.n+1,\ 16.n+5,\ 16.n+9,\ 16.n+13$$

ſi hae quatuor ſpecies, cum binis praecedentibus combinentur, orientur inde octo nouae ſpecies, pro quibus formae radicum numerorum ſubtrahendorum facile exhibentur, atque tum demum totidem nouae ſpecies orientur, ſi formae $32.n+5$, $32.n+13$, $32.n+21$, $32.n+29$ cum binis principalibus combinentur. Quae autem et quales ſint pro quovis caſu, formae radicum numerorum ſubtrahendorum ex ipſa Diſſertatione addiſcendum eſt, ad quam ſtudio-

ſtudioſe euoluendam Lectores ablegamus, id tantum obſeruantes, quod numeri primi hac ratione explorati 3861317 atque 10091401 tam magni ſint, vt non ſine labore taedioſiſſimo, methodo vulgari, eorum indoles inueſtigari poſſit; quamobrem liquet examen heic allatum, eo maioris eſſe habendum, quod ad numeros maximos ſine vlla calculi prolixitate applicari poſſit.

III.

Noua criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi.

Auctore L. Eulero pag. 89.

Quae a *Newtono* aliisque poſt eum Geometris, allata fuerunt criteria, ex quibus cognoſci poſſet, vtrum aequatio aliqua radices habeat imaginarias nec ne? licet in ſe quidem vera et indubia ſint, ad finem tamen propoſitum obtinendum minime ſufficere inueniuntur, quum nimirum quoties radices imaginarias indicent, tales quidem re vera aequationi ineſſe deprehendantur, quando autem nullam radicem imaginariam indicent, ſaepenumero tamen fieri poſſit, vt eiusmodi aequationis vel plures vel adeo omnes radices ſint imaginariae. Hoc autem imprimis euenire ſolet in eiusmodi aequatio-

nibus vbi duo ſigna eiusdem naturae ſe continuo inſequuntur, ſic nimirum in aequatione biquadratica: $x^4+4x^3-8xx-24x+108=0$, quamuis ad praeſcriptum criteriorum iam dictorum. nulla radix imaginaria reperiretur; tamen certiſſimum eſt, omnes eius radices eſſe imaginarias, quippe quum eadem aequatio reſoluatur in has duas quadraticas $xx+8x+18=0$ et $xx-4x+6=0$. In hac igitur diſſertatione Illuſtr. Auctor doctrinam de criteriis radicum imaginariarum accuratius pertractandam ſibi propoſuit, quem in finem, primum methodos explicauit, quibus Auctores vſi ſunt ad haec criteria inuenienda, tum vero oſtendit, quomodo multo pluro eiusmodi criteria erui queant. *Primum* autem *principium* in hac doctrina adhibitum in eo conſiſtit, quod ſi omnes aequationis cuiusdam radices ſint reales, et ex hac alia aequatio formetur, cuius radices aequentur quadratis illarum, tum neceſſario fieri debere, non ſolum, vt omnes aequationis ſic formatae radices ſint reales, ſed etiam poſitiuae, ex quo principio iam magnam huiusmodi criteriorum copiam deriuare licet. Euidens autem eſt, quod hoc principium multo latius extendi queat, adeo vt ex aequatione quauis propoſita, aliae deriuari poſſint, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata, vel altiores quaeuis poteſtates radicum aequationis propoſitae. *Secundum principium* in eo continetur qnod ſumma quadratorum ex differentiis radicum conſtituat numerum poſitiuum, vnde ſi

ſumma

ſumma omnium radicum dicatur a et ſumma productorum ex binis b, elicitur $aa > \frac{2n}{n-1} b$. Per *tertium principium* haec criteria ea ratione indagantur, quod ex aequatione propoſita duae aliae deriventur, de quibus etiam certi eſſe poſſumus omnes earum radices eſſe reales, ſi modo ſingulae aequationis propoſitae radices fuerint reales. Prima vero harum oritur, ſi ſinguli aequationis propoſitae termini, per ſeriem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, etc. multiplicentur; ſecunda vero ſi iidem termini in hanc progreſſionem arithmeticam 0, 1, 2, 3 etc. ducantur. Ex his duabus aequationibus gradus $n-1$, deinceps tres nouae gradus $n-2$ deducuntur, vnde continuata hac operatione demum ad aequationes ſecundi gradus peruenire licet, quae autem criteria in aequationibus ſic deriuatis locum habent, eadem quoque ad aequationem primum propoſitam applicari poterunt. Quoniam vero nimis operoſum foret, ſi per eiusmodi depreſſionem aequationum a gradu ſuperiori ad inferiorem hoc negotium perficeretur, hinc Illuſtr. Auctor generalem tradidit methodum, qua ex aequatione cuiuscunque gradus, iſtiusmodi aequatio quadratica ſtatim elici poteſt. His itaque criteriis abſolutis, quae ex charactere aequationum quadraticarum deriuantur, ſequuntur ea, quae ſimili ratione ope characteris aequationum cubicarum eruuntur, et quorum Illuſtr. Auctor primus mentionem fecit. Poſtquam igitur characterem completum pro aequationibus cubicis, quarum

omnes radices ſunt reales inueſtigauerit; oſtendit quomodo criteria inde deriuata, ad aequationes cuiuscunque gradus applicari debent, quod fit, iſtiusmodi aequationes ad aequationes tertii gradus ratione iam ante expoſita deprimendo. Vt autem hoc facilius et expeditius inſtitui queat, oſtenditur quomodo in genere ex quauis aequatione, aequationes cubicas elicere poſſimus, quorum characteribus in vſum vocatis, oriuntur criteria pro relatione inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos, quorum ope dignoſcere licet, an aequationis propoſitae radices ſint reales nec ne? Simili negotio ex charactere aequationum biquadraticarum radices reales exhibente, criteria erui poſſent pro exprimenda relatione inter quinos quosque coefficientes aequationis propoſitae; ſed quum hae formulae nimis euaderent prolixae, iis inueſtigandis non incumbendum eſſe videtur. Denique ad finem huius diſſertationis Illuſtr. Auctor exponit, quomodo ſingula haec criteria, ex duobus tantum principiis, idque methodo admodum ſingulari nec non concinna, deducantur.

IV.

IV.

Conſiderationes de Theoria motus Lunae perficienda et imprimis de eius variatione.

Auctore L. Eulero pag. 120.

Poſtquam ſummi noſtro ſeculo Geometrae in eo ſuam exercuerunt induſtriam, vt Theoriam motuum Lunae omni ſtudio perficerent atque a Celeberr. *Mayero* Tabulae Lunares obſeruationibus apprime conformes conſtructae ſunt, facile in eam quis induci poſſet opinionem, hanc ipſam Theoriam ad ſummum perfectionis gradum euectam eſſe; tantum autem abeſt, vt de eo ſibi gratulari queant Analyſtae, vt potius multae adhuc inaequalitates Lunae ſuperſint, quae neque ex Theoriis ab Auctoribus in medium allatis nec ex Tabulis *Mayerianis* aſſignari poſſunt, atque etiamſi hae, quoniam admodum paruae ſint, facile in praxi negligi poſſunt, in Theoria tamen minime praetermittendae videntur, quoniam ea, ſi perfecta erit, omnium prorſus inaequalitatum rationem reddere debebit. Vt autem Theoria feliciter excolatur, conſultum omnino eſt, non ſtatim a vero motu Lunae initium facere, quoniam explicatio perturbationum, quibus verus motus Lunae tam ſecundum longitudinem

quam

quam latitudinem afficitur, ipſas Analyſeos vires ſuperare videtur. Caſus igitur primum fingendi ſunt ſimpliciores et quidem ante omnia motus Lunae in latitudinem remouendus videtur, adeo vt iam inueſtigandum ſit, qualis foret motus Lunae, ſi in ipſo Eclipticae plano incederet, tum vero quo adhuc maior facilitas obtineatur, motum Solis tamquam vniformem ſpectare licet, vnde id commodi nanciſcimur, vt nullae aliae inaequalitates inueſtigandae ſuperſint, niſi quae ab excentricitate orbitae Lunaris atque ab elongatione Lunae a Sole originem ducunt. Sin vero adhuc maior ſimplicitas deſideretur, ipſa conſideratio excentricitatis orbitae Lunaris negligi poteſt, adeo vt iam quaeſtio ſit, de inueſtigando motu Lunae, ſi in ipſo Eclipticae plano, ſine vlla excentricitate incederet, Sole motum ſuum vniformiter abſoluente. Hoc itaque inſtitutum, quum Illuſtr. Auctor in praeſenti diſſertatione perſequi ſibi propoſuiſſet, primum formulas differentiales exponit, quibus motus Lunae in ecliptica incedentis atque tam verſus Solem quam terram, ſecundum legem attractionis *Newtonianam* impulſae, definitur, ex quibus formulis poſtquam ope diſtantiae mediae Lunae a terra et ratione inter motum medium Solis et Lunae data, conſiderationem maſſarum Solis Lunae et terrae eliminauerit, oſtendit quoque qua ratione hae formulae differentiales ad integrationem perduci poſſunt. Hoc vero abſoluto, explicat quomodo excentricitatem orbitae Luna-

Lunaris in computum ducendo, ad formulas differentiales primi gradus peruenire liceat, quae in calculo Aſtronomico cum inſigni emolumento adhiberi poſſunt. Duplicem vero imprimis talem heic adhibuit reductionem, quarum quidem priorem iam alibi fuſius explicauerat, vtramque tamen heic ſimul exponere voluit, vt de commodis ex vnaquaque earum redundantibus iudicium ferri poſſit. Reductionem autem deinceps generaliorem, quae binas praecedentes in ſe complectitur, exhibet. His autem reductionibus adhibitis, variationes tam ſemiparametri orbitae, quam excentricitatis et lineae apſidum formulis admodum concinnis et ad vſum practicum accommodatis definiuntur, et praecipue quidem ſi excentricitas ſatis ſit notabilis, primam reductionem in vſum vocare licet; ſin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neutra harum reductionum vti fas eſt. Quum vero hic caſus merito pro ſimpliciſſimo ſit habendus, hinc Illuſtr. Auctor ad eum euoluendum aequationes differentio-differentiales primum allatas denuo conſiderationi ſubiecit, indeque approximationes huic inſtituto idoneas eruit. Atque inuentis ſic binis aequationibus quibus motus Lunae continetur, operae pretium iudicauit, ſingulos eorum terminos euolvere; adeo vt hinc pro caſu iam allato, ad datam quamuis longitudinem Solis mediam, tam longitudo Lunae, quam diſtantia eius a terra numeris abſolutis exprimi poſſit.

V.

Annotatio quarundam cautelarum in inueſtigatione inaequalitatum, quibus corpora coeleſtia in motu perturbantur obſeruandarum.

Auctore L. Eulero pag. 159.

Quod *Newtonus* de corporibus coeleſtibus primus demonſtrauit, ea hac lege moueri, vt ſe mutuo in ratione duplicata inuerſa diſtantiarum attrahant, id adeo ſufficienter per obſeruationes comprobatum eſt, vt nullum ſuperſit dubium, quin haec ſit genuina lex, ſecundum quam omnium corporum coeleſtium motus peragantur. Quemadmodum enim theoria Lunae huic principio ſuperſtructa, cum obſeruationibus optime congruat, adeo vt pro indubio haberi debeat, Lunam tam verſus ſolem, quam terram ſecundum regulam *Newtoni* commemoratam impelli; ſic quoque dubitare non licet, quin anomaliae iſtae, quae in motibus reliquorum planetarum, tam primariorum quam ſecundariorum obſervantur, ſimilibus cauſſis ſint attribuendae. Et quidem in Saturno et Ioue perturbationes hae manifeſte ſe produnt, in eorum autem Satellitibus perſimiles motuum variationes obſeruantur ac in Luna. In Marte vero, terra, Venere et Mercurio, quamuis

hae

hae anomaliae, non adeo ſint conſpicuae, multum tamen a vero aberraret, qui horum Planetarum motum regulis *Keplerianis* penitus conformem ſtatuere vellet. Id enim ſi locum obtineret, in ipſorum orbitis neque lineae nodorum vllus motus, nec apſidum variatio aliqua obſeruaretur; quod tamen quum ſecus ſit, manifeſto inde colligitur hos planetas non vnice verſus Solem impelli, ſed quoque in ſe mutuo agere, ex qua etiam cauſſa ſine dubio quaedam inaequalitates in ipſo motu eorum oriri debent, etiamſi eaedem vix perceptibiles ſint. Vt igitur omnia corporum coeleſtium phaenomena rite explicari queant, in vſum vocanda eſt reſolutio iſtius problematis, quo quaeritur de motu trium aut plurium corporum, quae ſe mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Hoc autem problema in genere ſpectatum difficilius eſſe videtur, quam vt ſpes aliqua eſſe poſſit, illius reſolutionem completam aliquando inueniri poſſe. Ratio autem huius difficultatis non in Mechanica quaerenda eſt, quippe quum vires corporum acceleratrices, indeque ipſae accelerationes eorum facillime definiri et formulis exprimi poſſint; ſed in ipſa Analyſi continetur, quoniam aequationes differentio-differentiales quibus hae accelerationes exprimuntur, plerumque adeo ſunt complicatae, vt reſolui nequeant. Hinc igitur videtur completam et omnibus numeris perfectam Theoriam motuum coeleſtium exſpectari non poſſe, quousque methodus generalis

non pateat, aequationes differentio-differentiales in quibus variabiles vtcunque inter se sunt permixtae resoluendi. Licet vero hoc problema adeo generaliter spectatum tantis implicetur difficultatibus, pro casibus tamen specialibus fieri potest, vt illae difficultates multum diminuantur. Sic cum quaestio est de definiendo motu Lunae, qualis ex terra spectatur, haec commoda quae solutionem faciliorem reddunt, obtinentur, primum vt motum Solis apparentem tamquam cognitum spectare liceat, deinde distantia Lunae prae distantia Solis admodum fit exigua, tum vero excentricitas orbitae et inclinatio eius ad planum eclipticae satis paruae fiunt. Si vero supponeretur Lunam adeo a terra fuisse remotam, vt Martis vel Veneris locum occupet, tum eueniet vt Luna motum planetae primarii sequeretur, eiusque perturbationes simili ratione determinandae essent, ac perturbationes motus Saturni vel alius cuiusdam planetae primarii. In vtroque igitur hoc casu, diuerso plane modo inaequalitates motus Lunae determinandae sunt, quippe quum in priori Luna ellipsin circa terram esset descriptura, in altero vero circa Solem. Qui igitur veram motus Lunae theoriam tradere vult, illi incumbit eam ita exponere, vt pro omni Lunae situ et statu locum obtineat. Haec autem non solum de motu Lunae valent, sed ad reliqua quoque corpora coelestia applicari possunt. Propositis igitur tribus corporibus se mutuo attrahentibus, omnino maximi momenti

est

eſt disquiſitio, qua inueſtigatur motus reſpectiuus duorum horum corporum, qualis ſpectatori in tertio corpore collocato apparebit, atque huius problematis ſolutionem Illuſtr. Auctor in hac diſſertatione abſoluendam ſibi propoſuit. Si itaque ſupponantur tria haec corpora in eodem plano moueri, et ſe mutuo attrahere ſecundum regulam attractionis *Newtonianam*, primum generaliter oſtendit quibus aequationibus differentio-differentialibus exprimatur motus reſpectiuus duorum corporum B et C, qualis ſpectatori in corpore A apparet, deinceps vero exponit quales mutationes, iſtae aequationes ſubire debent, ſi vel vnius vel duorum ex his corporibus A, B, C, maſſae vt euaneſcentes ſpectentur; vnde ſi quaeſtio ſpeciatim ſit de motu reſpectiuo Solis et Lunae ex terra ſpectando, deſignantibus A terram, B Solem et C Lunam, duo ſpeciales oriuntur caſus, alter quo tam B, quam C pro euaneſcentibus habentur, alter vero quo A et C euaneſcunt. Qua ratione autem iſtarum aequationum integralia pro vtroque caſu inueniri debeant, in problematibus proxime ſequentibus docetur, vbi quidem pro caſu poſteriori ſolutionem non ex ipſa conſideratione aequationum differentio-differentialium propoſitarum deriuare licuit, ſed ex principio quodam aliunde petito; quamobrem eo magis confidendum eſt, ad motum Lunae accurate definiendum, multum ſubſidii inde eſſe exſpectandum, ſi hanc ſolutionem directe ex ipſis nempe formulis differentio-differen-

tialibus eruere liceret. Artificium autem heic adhibitum pro ſolutione caſus huius poſterioris inuenienda, multo quoque latius extendi poteſt, ad definiendum ſcilicet motum reſpectiuum duorum corporum B et C, ſi ſupponantur corpora A et C ad B ſecundum quamuis attractionis legem impelli, motibus tamen vt antea in eodem plano peractis. Atque quum ſaepenumero contingat, vt calculi compendia facilius in problematibus generalioribus quam ſpecialioribus inueniantur; hinc Illuſtr. Auctor motum reſpectiuum duorum corporum B et C, qualis ſpectatori in A poſito apparet, ſi omnia haec tria corpora in eodem plano moueantur et ſecundum quamcunque diſtantiarum rationem ſe mutuo attrahant, generali problemate complexus eſt; vbi quum ad ſex aequationes differentio-differentiales perueniſſet, quarum quatuor priores problemati ſolvendo ſufficiunt, duae tamen vltimae non plane vt inutiles reiiciendae ſunt, quippe quod iis in ſubſidium vocatis et cum reliquis debito modo combinatis, non ſolum duae aequationes differentiales primi gradus eruantur; ſed etiam hae ſolum cum vſu adhiberi poſſint, pro illo caſu, quo $A = o$. Quoniam denique conſtet motum Lunae, ſi terrae valde ſit vicina, recte ad terram referri; ſin autem admodum a terra diſtaret, conueniens ſore, vt eius motus ad Solem referatur; facile colligi poterit, ſi quaſi intermedium quendam ſtatum teneat, eius motum neque ad Solem nec ad terram eſſe referendum,

dum, ſed ad aliud quoddam punctum medium, quam ob rationem ad finem huius diſſertationis oſtenditur, qua ratione motus alicuius corporis ad certum quoddam punctum relatum, ad aliud punctum vtcunque motum referri poſſit.

VI.

Inueſtigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu terrae diurno a viribus coeleſtibus produci poſſunt.

Auctore L. Eulero pag. 202.

Inſigne iſtud phaenomenon praeceſſionis aequinoctiorum, quo puncta aequinoctialia continuo regrediuntur ſeu contra ſeriem ſignorum mouentur, cum veteribus etiam Aſtronomis innotuiſſet; veram tamen huius phaenomeni rationem, in figura telluris noſtrae et actione, qua motus terrae diurnus a viribus Solis et Lunae afficitur quaerendam eſſe, nemo ante *Newtonum* ſuſpicatus fuit. Quemadmodum enim ſi figura telluris noſtrae perfecte ſphaerica eſſet, motus vertiginis ipſi impreſſus eadem velocitate perpetuo continuaretur; ita viciſſim ſi haec figura a ſphaerica recedat, adeo vt diameter aequatoris aliquanto maior ſit axe, ex viribus Solis

et

et Lunae hunc axem afficientibus, orietur momentum ad eum de ſitu ſuo deturbandum. Quum itaque Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, eam Dynamicae partem maxime abſtruſam, quae de motu corporum gyratorio agit, proſperrimo ſucceſſu pertractauerit; adeo vt in genere motus gyratorii corporum quacunque figura praeditorum et viribus quibuscunque ſollicitatorum feliciter determinari poſſint; hinc in praeſenti diſſertatione ex illis principiis omnes inaequalitates motus terrae diurni explicare conſtituit, idque ita vt non ſolum verus motus telluris gyratorius cognoſcatur; ſed etiam reliqui quos habere potuiſſet, ſi ab initio aliter fuiſſet impulſa. Hoc itaque in negotio vt primum conſideratio figurae et ſtructurae telluris euitari queat, quippe quae plerumque ad calculos taedioſiſſimos perducit, iſta inſignis proprietas trium corporis axium principalium, quae in centro inertiae normaliter ſe decuſſant, in vſum vocanda eſt, atque tum quidem ſtatim liquet, ſi tria momenta inertiae reſpectu horum axium, ſint plane inter ſe aequalia, motum gyratorium a viribus externis nullatenus turbari, id quod quoque locum habet, etiamſi figura corporis gyrantis, quam maxime ſit irregularis, modo memoratam illam proprietatem aequalitatis momentorum inertiae reſpectu axium principalium poſſideat. Tellus autem noſtra quamvis initio fuiſſet ſphaerica, tamen ſtatim ac circa axem gyrari coepiſſet, ob fluiditatem eius figura muta-

mutationem ſubiiſſet, quam ob rem vt heic fluiditatis rationem habere non neceſſe ſit, ſtatim conſiderare licet tellurem, vt corpus ſolidum ea figura praeditum, quam vi fluiditatis ſuae conſequeretur, ex quo intelligitur omnes concluſiones hinc deriuandas ob maris mobilitatem aliquam correctionem admittere. Dum itaque conſideratur terra vt eiusmodi corpus, cuius vnus axis principalis cum axe proprie ſic dicto telluris coincidit, reliqui autem bini huic normales ita ſunt comparati, vt momenta inertiae eorum reſpectu ſint aequalia, primum diſpiciendum eſt quaenam varietas motui terrae diurno, a motu qui initio erat impreſſus inducatur, mentem a viribus Solis et Lunae agentibus penitus abſtrahendo; atque tum quidem perſpicitur, ſi hic motus circa axem vel quemlibet diametrum aequatoris imprimatur, eum non ſolum fore vniformem, ſed etiam axem gyrationis conſtanter eundem ſitum ſeruaturum; ſin vero hic motus circa aliam lineam per centrum tranſeuntem imprimatur, tum motus gyratorius quidem manebit vniformis, ipſe vero axis circa quodpiam coeli punctum circulum deſcriberet. Accedentibus vero iam viribus Solis et Lunae perturbatricibus, non ſolum gyrationis celeritas admodum immutatur; ſed axis quoque gyrationis motu magis irregulari fertur; vnde operae pretium viſum eſt Illuſtr. Auctori quaeſtionem adeo generaliter proponere, vt ad eos etiam caſus pateat, quibus terrae ab initio motum circa axem a principa-

libus diuerſum impreſſum fuiſſe ſupponatur. Vt igitur a ſimplicioribus ad difficiliora procederet, ſuppoſita primum aequalitate binorum momentorum inertiae, ſequentes imprimis caſus conſiderationi ſubiecit, *primum* quo vires perturbatrices vt euaneſcentes ſpectantur, *ſecundum* quo aſtrum perturbans in ipſa ecliptica et motu quidem vniformi incedere ſupponitur, *tertium* quo hoc aſtrum in orbita ad eclipticam parum inclinata, ſed motu vniformi circumfertur, denique *quartum* quo aſtro motus inaequabilis ſecundum leges *Keplerianas* tribuitur, orbita vero eius cum ecliptica coincidit; vbi quidem vltimus caſus, ad explicandam perturbationem, quae ab actione Solis oritur, applicari poteſt, tertius vero cum vltimo coniunctus dabit explicationem perturbationis ab actione Lunae oriundae; commodum autem accidit, vt non opus ſit ad horum aſtrorum inaequalitates reſpicere quum enim anomaliae ex motu medio reſultantes iam admodum ſint exiguae, facile intelligitur eas, quae ex orbitae excentricitate oriuntur plane neglig poſſe. Formulas vero analyticas quibus motus terrae diurni ob vires Solis et Lunae perturbatrices, variatio exprimitur, poſtquam Illuſtr. Auctor expoſuerit, easdem dein quoque numerice euoluit, ita vt abſoluta quantitas huius variationis inde innoteſcat, vnde applicatione facta, ad datum quoduis tempus obliquitas eclipticae eiusque variatio, non minus quam vera quantitas praeceſſionis aequinoctiorum et perturba-

turbationum motus diurni telluris noſtrae, accurate determinantur.

VII.

Commentatio de vtiliſſima ac commodiſſima directione potentiarum frictionibus Mechanicis adhibendarum.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 242.

Quod in hac diſſertatione ab Illuſtr. Auctore pertractatum eſt argumentum, ſolutionem continet quaeſtionis Mechanicae haud parum curioſae: ſub quanam directione, potentiae motrices applicandae ſint corpori alicui protrahendo, vt maximus inde percipiatur effectus? Quamuis ſcilicet primo quidem intuitu videretur, potentiam reſiſtentiae directe opponendam eſſe, re tamen accuratius perpenſa, inuenitur plurimos dari caſus, quibus potentia ſub directione ad reſiſtentiam obliqua cum maximo fructu applicatur. Quoties nimirum potentia ad corpus ſuper plano aſpero protrahendum oblique applicatur, eiusdem potentiae duplex eſt effectus, vnus ad corpus protrahendum, alter vero ad ipſum ſubleuandum, vnde patet ab obliquitate potentiae aliquod diſpendium ſimulque vero lucrum oriri, ex

quo conſequitur iſtam potentiae directionem optimam cenſendam eſſe, vbi lucrum ſic oriundum, diſpendium ab obliquitate ortum quam maxime ſuperet. Quum vero frictio corporis ſuper plano aſperi moti, partim pendeat a pondere quo corpus ad planum apprimitur, partim a natura plani corpori ſubiecti; ſi dicatur P pondus corporis protrahendi, intenſitas vero frictionis plani ſubiecti deſignetur per $\frac{1}{n}$, angulus autem ſub quo potentia oneri ſuper plano horizontali promouendo ſit applicata per z indicetur; inuenietur potentia iſta oblique applicata per hanc formulam expreſſa: $\frac{P}{n \cos. z + \sin. z}$. Hinc itaque colligitur potentiam hanc fore minimam, dum denominator $n \cos. z + \sin. z$ eſt maximum, hoc eſt quando tang. $z = \frac{1}{n}$, in eo autem caſu erit potentia haec minima ad potentiam directe applicandam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n. Sic quum Cel. Auctor obſeruauerit viam ſilicatam ſiccam, in trahas ſuper ea protrahendas reſiſtentiam exſerere, quae ſit propemodum $\frac{1}{3}$ ponderis promouendi; ex hac theoria facile concluditur pro iſto caſu fore angulum $z = 26°, 34'$, quam regulam ab aurigis quoque non male obſeruari vidit, multo autem minor obliquitas ſufficit, ſi via niue calcata fuerit obtecta, quoniam tum intenſitas frictionis admodum exigua eſt. Pro rhedis autem curribus et aliis machinis rotalibus, emolumentum ex obliquitate ortum plane inſenſibile fit, propter intenſitatem frictionis adeo diminutam, vt vix $\frac{1}{20}$ ponderis partem ſuperet.

Ex

Ex his igitur regula haec generalis formari potest: obliquitatem potentiae tum vtiliter adhiberi, quando intensitas frictionis satis magna est, ipsaque resistentia a subleuatione ponderis notabiliter diminuatur. Vnde haec theoria quoque certis casibus ad alias resistentiae species applicari potest, veluti cum de protrahendis corporibus aquae insidentibus quaestio est, idque imprimis si ob potentiam oblique applicatam non solum corporis natantis pars submersa imminuatur, sed etiam ob situs mutationem inde oriundam, minorem ab aqua resistentiam patiatur.

Si vero iam quaeratur de angulo obliquitatis, sub quo potentia applicanda est, vt corpus super via ad horizontem vniformiter accliui protrahatur, eius quaestionis solutio simili plane ratione perficitur. Si enim angulus accliuitatis dicatur A, inuenietur potentia ista obliqua $= \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sin. z + n \cos. z} \cdot P$, quae itaque erit minima, si fuerit tang $z = \frac{1}{n}$, tum vero erit haec potentia sub angulo quaesito applicata $= \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sqrt{(nn+1)}} \cdot P$, vbi probe notandum est, si de via decliui sermo sit sin. A negatiue sumi debere. Angulus autem iste z eo magis attentione dignus est, quod idem sit, sub quo corpus proprio pondere in plano inclinato, superata frictione deuolui aut deorsum repere incipit.

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

De aequilibrio et motu corporum flexuris elaſticis iunctorum.

Auctore L. Eulero pag. 259.

Inter eas Mechanicae partes, quae nondum ſatis excultae ſunt, inſignem omnino tenet locum doctrina de motu et aequilibrio corporum flexuris elaſticis inter ſe iunctorum, quam ob rem eo maius pretium ſtatuendum eſt illis, quae Illuſtr. Auctor in hac diſſertatione de iſto argumento commentatus eſt. Conſiderationi nimirum heic ſubiecit talia corpora rigida, quae certis inter ſe iunguntur flexuris, quarum autem flexurarum ea eſt indoles, vt vi inflectenti reſiſtant eoque maiorem reſiſtentiam exſerant, quo magis vis illa inflectens ſtatum corporum naturalem, quem ante inflexionem habebant, mutare annititur, ſublata autem vi inflectente ob elaſticitatem flexurarum corpora in ſitum naturalem reſtituantur. Vt itaque melius pateret quibus principiis determinatio motus eiusmodi corporum innitatur, ſimpliciſſimum primo caſum conſiderauit, quo duo tantum corpora rigida huiusmodi flexura iunguntur; atque quum vtrumque horum

rum circa axem per flexuram transeuntem moueri possit, altero manente fixo, explicationem motus huiusmodi corporum, imprimis consideratione centri inertiae, momentorum inertiae et vis elasticae inflexioni resistentis contineri concludit, quam vltimam vim sinui anguli inflexionis esse proportionalem accurate demonstrat. Simpliciſſimo vero hoc casu expedito, ad explicationem motus plurium eiusmodi corporum flexuris iunctorum accedit Illustr. Auctor, vbi quum perspexisset hoc problema vix in genere tentari posse; istum tantum casum specialem examini subiecit, quo omnes axes inflexionis in singulis iuncturis inter se sunt paralleli, motusque in plano ad istos axes perpendiculari absoluatur, in quo etiam singularum partium centra inertiae sita esse supponuntur. Antequam vero motus eiusmodi corporum Systematis rite explicari queat, primum necessum erat exponere, quibus viribus in aequilibrio contineatur, ad hoc autem requiritur, non solum vt eae conditiones impleantur, quibus aequilibrium in corporibus rigidis obtinetur; sed etiam insuper vt vires sollicitantes cum vi elastica cuiusuis flexurae in aequilibrio consistant. Vt igitur principium hinc deriuandum pro aequilibrio horum corporum determinando facilius applicari queat; ostendit Illustr. Auctor quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium, definiri possit earum momentum respectu alius cuiuscunque axis obliqui per idem punctum

ctum tranſeuntis, vnde etiam momentum virium corpus ſollicitantium reſpectu cuiusque flexurae, cuius axis ſitum tenet obliquum facili negotio deduxit. Regulam quoque dehinc tradidit, qua in vſum vocata, praecepta quae pro aequilibrio horum corporum valent, ad motum etiam eorum definiendum reuocari poſſunt, huius autem regulae applicationem in plurimis caſibus, maximis difficultatibus obnoxiam eſſe obſeruauit, imprimis quando nec axes iuncturarum inter ſe ſunt paralleli, nec motus quaſi in eodem plano fieret, conſiderari poteſt; quam ob rem conſultum ipſi viſum eſt eum tantum caſum heic exponere, quo axes commemorati inter ſe ſunt paralleli et motus in eodem plano peragitur. Pro hoc itaque caſu docuit, qua ratione inueniendae ſint vires ad motus variationem requiſitae, dum corpus aliquod motu quocunque variato incedit et quodnam ſit harum virium momentum reſpectu axis ad idem planum in quo motus fit perpendicularis. Egregiam vero huius problematis applicationem exhibuit, dum motum corporis ex tribus partibus, flexuris elaſticis inter ſe iunctis compoſiti, et ſuper plano aliquo vtcunque proiecti, explicat et per formulas differentiales definit; eiusdem vero quaeſtionis aliam demum adfert ſolutionem eo magis attentione dignam, quod licet in eadem non opus ſit principium aequilibrii commemoratum in vſum vocare, ipſum tamen negotium per eam multo commodius conficiatur, quam per priorem. II.

II.

Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum.

Auctore L. Eulero pag. 305.

Longum omnino foret, si singula quae hac tractatione continentur, accurate exponere vellemus; quam ob rem ne limites breuitatis, quas in hisce recensionibus obseruare fas est, transgrediamur, praecipua tantum capitum huius operis contenta explicare constituimus. In *primo* scilicet capite, doctrina de natura et varietate fluidorum pertractatur, naturam autem fluidorum Illustr. Auctor in singulari ista proprietate constituit, qua pressio quaelibet iis applicata per totam eorum massam ita diffunditur, vt omnes particulae eandem sentiant pressionem, quatenus nimirum ipsum fluidum in aequilibrio manet. Est autem dicta haec proprietas ita comparata, vt non solum omnibus corporibus fluidis competat, reliquis autem quae non sunt fluida, inesse non deprehendatur; sed etiam ex eadem, omnia tam motus fluidorum quam aequilibrii principia facili negotio deduci possunt, vnde in ea proprietate fluidorum naturam quoque recte collocari euidens est. Quod ad fluidorum varietatem attinet, illa imprimis in eo consistit, quod quaedam eorum ita sint comparata, vt quantumuis magna vi pre-

mantur, idem tamen volumen ſemper retineant, alia vero eius ſunt indolis, vt quo magis comprimantur, ad eo minus volumen redigantur, de vltima autem hac fluidorum ſpecie obſeruandum eſt, dari pro iisdem denſitatem tam maximam, quam minimam, quarum illa eſt, ad quam haec fluida redigerentur, ſi infinita vi comprimerentur, haec autem ea, quae reſpondet eorum ſtatui naturali, vbi nulla vi comprimente afficiuntur. Denique ad varietatem fluidorum etiam hoc ſpectat, quod a calore in maius ſpatium expandantur, a frigore vero in minus volumen contrahantur, vnde pro vario caloris gradu, maxima denſitatum variatio oritur. Caput *ſecundum* doctrinam continet de aequilibrio fluidorum, quatenus eadem a grauitate vel aliis ſimilibus viribus non affici ſupponuntur. Dum autem fluidum a vi quacunque externa vrgetur, non ſolum omnes fluidi partes ſed etiam vas in quo continetur in aequilibrio manent; ſcilicet ſi fluidum nullius compreſſionis ſit capax, omnino maximis viribus reſiſtere valet; ſin autem ſe comprimi patiatur, tum eousque vi externae cedet, donec eam denſitatem nactum fuerit, qua vlteriori compreſſioni reſiſtere poteſt, atque ex his quidem perſpicitur quod ſublata omni vi externa in fluidum agente, illud ſemper in aequilibrio contineatur, etiamſi nequidem vaſi cuipiam ſit incluſum. Pro determinanda iam preſſione, quae ex vi quacunque externa fluidum premente oritur, obſeruandum eſt, quod

quod licet illa eodem modo definiatur pro fluidis compreſſionis capacibus, ac pro illis quae nullam admittunt compreſſionem, maximum tamen oriatur diſcrimen, ſi ad effectum, quem in denſitatem horum fluidorum habet attendatur, nam in his denſitas manet inuariabilis, in illis autem eadem dependet non ſolum a preſſione, ſed etiam a calore, qui in vnoquoque huius fluidi loco inuenitur; pro ſtabilienda vero menſura caloris, haec regula obſervari poteſt: calorem eſſe in directa ratione preſſionis et inuerſa denſitatis. In Capite *tertio* aequilibrium fluidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum generatim conſideratur et regulae traduntur, quae ſemper locum obtinere debent, vt fluidum huiusmodi viribus acceleratribibus ſollicitatum aequilibrium ſeruare poſſit. Dein vero exponitur quibusnam viribus afficiatur corpus ſolidum, quatenus eiusmodi fluido viribus internis ſollicitato, vel totum vel qua aliquam ſui partem immergitur, obſeruatur autem hoc corpus easdem ſuſtinere preſſiones, quibus afficeretur ea fluidi maſſa, cuius nunc occupat locum, vbi tamen ſimul neceſſe eſt, vt cognita ſit denſitas, quae fluido huic in locum corporis ſubſtituto in ſingulis ſui punctis competeret. Quas demum vires, vas cui fluidum incluſum eſt, ab eius preſſione ſuſtineat, in hoc quoque Capite docetur et quidem oſtenditur vas perinde vrgeri, ac ſi fluidum vna cum ipſo corpus conſtitueret ſolidum ab iisdem viribus ſollicitatum. Sequens Caput

quartum theoriam aequilibrii fluidorum a ſola gravitate ſollicitatorum exponit, principia nimirum in priori capite ſtabilita, hic ad caſum vis acceleratricis conſtantis, quae grauitatis nomine venit applicantur, atque tum quidem perſpicitur corpus ſolidum fluido graui immerſum, tanta vi ſurſum vrgeri, quanta eſt fluidi maſſa eius locum occupans, directio autem huius vis per centrum inertiae maſſae huius fluidae tranſibit, totum denique vas, cui fluidum includitur, deorſum premetur pondere totius maſſae fluidae et huius preſſionis directio per centrum inertiae eiusdem maſſae tranſibit, aequilibrium vero pro hoc caſu nullo modo ſubſiſtere poteſt, niſi gradus caloris in eadem altitudine per totam maſſam fuerit idem. Quo accuratius iam ſtatus iſte aequilibrii cognoſcatur, ſeorſim conſideranda ſunt fluida, prouti vel omnis compreſſionis expertia ſunt, vel aliquam admittunt compreſſionem, vtraque autem fluidorum ſpecies maximum iterum admittit diſcrimen, prouti fluidum per totam maſſam fuerit homogeneum vel minus. Pro fluidis prioris ſpeciei homogeneis, quae communiter afferuntur regulae Hydroſtaticae valent, nimirum in his fluidis ſuprema ſuperficies ſemper in idem planum horizontale cadit, preſſio autem infra eandem vbique profunditati eſt proportionalis. De fluidis vero prioris ſpeciei heterogeneis tenendum eſt, illa nullo modo in aequilibrio contineri poſſe, niſi in qualibet ſectione horizontali denſitas ſit eadem, adeo-

adeoque haec fluida heterogenea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe diſpoſita eſſe oportet, hinc quoque caloris gradus in eadem altitudine idem eſſe debet, quod ſi obtineri non poſſit, nec aequilibrium ſubſiſtere poterit, ſed fluida continuo motu agitabuntur. Quantum ad fluida poſterioris ſpeciei attinet, exhibuit quoque Illuſtr. Auctor pro illis conditiones aequilibrii, ex quibus colligitur iſta fluida nunquam in aequilibrio manere, niſi in eadem altitudine omnes eorum particulae, eandem ſentiant preſſionem, vnde atmoſphaera noſtra nunquam in quiete erit, niſi omnes aeris particulae eadem denſitate ad eandem altitudinem praeditae ſint, atque hinc praecipua ventorum cauſſa ſine dubio erit quaerenda in inaequali atmoſphaerae eiusque particularum ſtatu, in ſpecie vero facillime hinc explicari poteſt ratio ventus illius perennis orientalis, qui inter tropicos obſeruatur. Caput demum *quintum* explicationem continet aequilibrii fluidorum quatenus ad centra virium fixa ſollicitantur, vbi conditiones praeſcribuntur, quae pro aequilibrio obtinendo locum inuenire debent, non ſolum ſi haec fluida ad vnicum punctum fixum vrgerentur; ſed etiam ſi ad plura eiusmodi puncta fixa impellerentur, et pro caſu quidem priori oſtenditur ad aequilibrium obtinendum neceſſe eſſe, vt preſſio ad aequales a centro virium diſtantias eadem ſit, quam ob rationem omnia horum fluidorum ſtrata aequilibrata figuram habebunt ſphaeri-

cam, pro caſu autem poſteriori ſufficit vt in ſtratis aequilibratis preſſio vbique ſit eadem, ipſa autem figura horum ſtratorum non amplius ſit ſphaerica, ſed plerumque maxime irregularis. Atque huius denique poſterioris caſus conſideratione adhibita iam definiri poteſt ſtatus aequilibrii fluidorum, quae ad centrum aliquod fixum ſollicitata, ſimul a dato quodam axe fixo, viribus diſtantiis ab axe proportionalibus repelluntur, quo ipſo determinatio figurae telluris noſtrae abſoluitur, tum vero et hinc erui poteſt ſtatus aequilibrii fluidorum tellurem noſtram ambientium oceani nimirum et atmoſphaerae, ſi inſimul conſiderentur vires attrahentes, quibus a Sole vel Luna afficiuntur, vnde explicatio eorum phaenomenorum, quae in fluxu et refluxu maris cernuntur, aliorumque his ſimilium, deduci poteſt.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

De calore animalium dissertatio physico Experimentalis.

Auctore Iosepho Adamo Braunio.

pag. 419.

Calorem animalium internum Clarissimus Auctor in hac Dissertatione explorauit, quem quidem constantem repperit adeo, vt neque aetas in homine, neque sexus, neque temperamentum, aut aliae circumstantiae vel mutationes eum caloris gradum, cuique animali proprium vel augere vel imminuere possint, dummodo homo vel animal sanum fuerit. Vsus est thermometro Delisliano, quod quidem hominibus in os inseruit vel vrinae recens excretae cum requisitis cautelis immersit. Animalibus autem in abdomen apertum idem indidit, vel in sanguinem eorum ex vena incisa effluentem. Calor hominis sani 96 circiter graduum scalae Delislianae inuentus est, vel $97\frac{1}{2}$ graduum secundum *Fahrenheitianam.* Calor vituli aeque ac porcellae 90 gradibus Delislianis vel 104 *Fah-*

Fahrenh. aequalis eſt. Capellae, agni et ouis calor gradibus 92 *Del.*. $101\frac{1}{2}$ *Fahrenh.* reſpondet. Aues calore ſuperant quadrupeda; ſiquidem plerique eorum vti anſeres, anates, gallinae, columbae 87 Del. $107\frac{3}{5}$ *Fahr.* rubeculae vero 84 Del. $111\frac{1}{5}$ *Fahrenh.* caloris gradibus gaudeant. Animalia frigida vti piſces, ranae, inſecta, quamuis iis vnus alterue caloris gradus plerisque ab Autoribus adſcriptus ſit (vid. *Hall.* Phyſiol. Tom. II. pag. 28. 29. 30.) omni calore, niſi qui atmoſphaerae vel fluidis ambientibus ineſt, deſtituta inuenta ſunt. Idemque de animalibus valet, quae hyemem dormiendo conſumunt, quo tempore nempe hanc vitam vegetabilem agunt. Poſt haec de maximo, quem homines et animalia ferre poſſint, caloris et frigoris gradu pauca diſſerit Auctor. Denique hypotheſes perſtringit de modo, quo calor in ſanguine animalium producatur, eamque proponit ornatque, quae ſibi prae caeteris placuit.

II.

De ossibus Sibiriae fossilibus, craniis praesertim Rhinocerotum atque Buffalorum obseruationes,

vt et

Descriptio Leporis pusilli.

Auctore

P. S. Pallas pag. 436 et 521.

In priore harum dissertationum exhibentur descriptiones variorum ossium fossilium quae in borealibus praesertim Sibiriae regionibus reperta, Museum academicum ornant Primum eorum, rarissimumque Rhinocerotis cranium est, cuius descriptionem Cl. Auctor proponit, quamque eo maiori cura exaravit, quod structura ossium huius animalis adhucdum minus nota sit; diligentissime itaque singulas huius cranii partes describit, simulque ostendit nullum in maxillis locum dari, cui dentes primores commode insererentur, atque hinc, omnes illos hallucinatos fuisse, qui Rhinoceroti duos in singula maxilla dentes primores adscripserunt. Cornua Rhinocerotum, post haec, examini subiicit, de quibus id tantum heic adnotabimus, quod praeter fibras

longitudinales, ex quibus maximam partem compoſita eſſe, foſſilia eorum ſpecimina docuerunt, per interualla quoque coaleſcentia quadam, ſiue transverſis inſcriptionibus ſolidioris texturae vndata atque diſtincta ſint, quorum auxilio fortiora, vſuique aptiora reddi credibile eſt. Haſce Rhinocerotum reliquias, ſequuntur crania Buffalorum gigantea, admiratione curioſorum eo magis digna, quod animalia, quorum pars fuere, hodie tanta in rerum natura, nullibi exſtent. Ex ſtructura cornuum et conformatione oſſium frontis apparet, illa non fuiſſe Vri vel Biſontis crania, ſed ad Buffali genus referri debere, quod vero enormem eorum magnitudinem ſpectat, eius rationem in climate et laetiori pabulo quaerendam eſſe, cum Cl. Auctore ſtatuimus. Vltimo loco foſſile cornu Gazellae *rectícornis*, variique Elephantorum dentes in Muſeo aſſeruati deſcribuntur, eorumque delineatione, oſſium Sibiriae foſſilium enumerationi finis imponitur. De origine horum oſſium varii varia tradideruut, nobis vero ſufficiat ſolum modo Cl. Auctoris ea de re ſententiam breuibus heic indicaſſe. Eo illa redit: quod neque diluuio neque alii cuidam inundationi adſcribenda ſit harum exuuiarum origo, ſed quod ideo tanta copia in hiſce regionibus reperiantur, quia hae terrae calidiori coelo temporibus omni traditione humana anterioribus fuerint ſuppoſitae, ita vt animalia iſta ibi et viuere et ſpeciem ſuam multiplicare potuerint, vbi nunc nil niſi oſſa eorum ſuperſunt.

Altera

Altera dissertatio Leporis pusilli continet descriptionem atque historiam, animalculi singularis omnino structurae, quodque Cl. Auctor praeterita hyeme, cum Transuolgenses campos ingressus fuerit, prima vice vidit et cum aliis adhucdum ignotis speciebus animalium istarum regionum obseruauit. Externa sua figura, multum equidem a vulgari Lepore recedit, eiusdem tamen cum illo generis esse, duplicati dentes et pedum vellus abunde docent; quod vero specificas notas, quod internam structuram, quod denique mores huius animalis spectat, id, quum breuius atque curatius, quam a Cl. Auctore factum est, tradi nequeat, ex ipsis Commentariis ad quos lectorem ablegamus, melius haurietur.

III.

De formatione inteſtinorum obſeruationes in ouis incubatis inſtitutae.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna; vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, abdominis alarumque et pedum agitur.

Auctore C. F. Wolff pag. 478.

Quae partes embryonis gallinacei in diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ſecundum externum habitum conſideratae ſunt, earum phaenomena interna anatomiae microſcopicae beneficio in praeſenti Diſſertatione deteguntur et explicantur. In amnio ſpurio, quod involucrum embryonis exterius eſt, rima anterius apparebat, fouea ampliori ſurſum ad regionem cardiacam, deorſum ad regionem pubis minori foueola terminata, quae ipſa ventriculi et inteſtini, quod rima hac non longius eſt in his embryonibus, cavitas eſſe dicebatur, ea ratione, vt membrana inteſtini

ſtini vbi, ex meſenterio continuatur, vtrinque a ſe inuicem ſecederet, ventriculo et inteſtino apertis relictis, extrorſum et circa embryonem reflecteretur, amniumque ſpurium eo modo produceret. Amnium ſpurium igitur diſſectum et apertum eſt, vt, quaenam ſint illae partes interiores, quae rimam foueamque cardiacam et inferiorem foueolam efficerent, ex quibusque amnii ſpurii membrana continuaretur, pateret; res, vti dictum, inuenta eſt. Ventriculus foueam cardiacam efficit, dum eius membranae in parte anteriori non clauduntur, ſed relicto orificio, quod foueam illam refert, in amnium ſpurium continuantur. Rimam ſimili modo inteſtinum medium producit, cuius membranae, anterius non clauſae, vtrinque reflectuntur, in amnium ſpurium lateraliter abeunt. Et foueola inferior denique ab inteſtino recto efficitur, quod ſimili ratione membranis ſuis in parte ſui ſuperiori et anteriori reflexis in amnium ſpurium tranſit. Haec vt breuiori negotio oſtenderet Cl. Auctor, primum embryonem expoſuit ex ouo IV dies incubato, in quo nempe hae partes adeo iam comparatae ſunt, vt facilius cognoſcantur, nec dubium eſſe poſſit, quin ſint inteſtinum et ventriculus, quae pro iis traduntur. Deinde easdem partes in primis ſuis principiis in embryonibus duorum et trium dierum perſecutus eſt. Eas partes in diuerſis his embryonibus anatomice deſcripſit, mutationesque ſucceſſiue accedentes notauit.

Quum in deſcribendis his embryonibus verſaretur, non potuit omittere res quasdam in iis obvias, a themate quidem alienas, ſed tamen haud minus notatu dignas, et quae pariter ac inteſtinorum formatio ad epigeneſin ducunt. Eiusmodi ſunt ortus thoracis et amnii veri; porro abdominis et meſenterii, denique alarum et pedum formatio. Vbi partes thoracis laterales, a coſtis formatae, oriri deberent, ex latere ſpinae dorſalis, ibi immediate oriri vidit in primis embryonibus amnium verum, ſine mora reflexum, quod in foetu gallinaceo maturo ex termino totius trunci anteriori, nempe ex circulo vmbilicali abdominis oritur, certo hercle teſtimonio nullum adhucdum exſtitiſſe thoracem. Similiter de abdomine vidit anguſtiſſimas laminas, vtrinque iuxta ſpinam dorſi poſitas, in amnium reflexas, quae vix regionem lumbarem de toto abdomine exhibent. Hae, dum ſucceſſiue antrorſum prolongantur, cauitatem paulatim referunt, apertura tamen inſtructam, quae non minor eſt, quam cauitas in ſuo ambitu ipſa. Denique apertura conſtringitur, vt integer ſaccus abdominis inde oriatur ad analogiam tubi cibarii, quem ſimiliter primo tempore apertum eſſe retulimus. Laminae meſenterii, quae inteſtini et amnii ſpurii continuationes ſunt, pariter ac latera inteſtinorum in primo principio ſeparatae exiſtunt, foſſamque efficiunt, in qua facies anterior ſpinae dorſalis comparet. Deinde in vnam membranam coniunguntur, qua coniunctione

futura

ſutura illa oritur, in prioribus diſſertationibus deſcripta, quae fundus rimae et margo poſterior inteſtini eſt. Alarum et pedum primordia tubercula referunt ſimplicia, ex ſuperficie corporis vix eminentia, quae ſenſim denique prolongantur. In horum ſuperficie interiori noua tubercula prodeunt, quae digitorum principia ſunt.

Ex his omnibus tandem colligitur, partes corpo is animalis minime omni tempore exſtitiſſe, et ntegras quidem; ſed partim productas, partim formatas eſſe ex aliis, prius productis.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

Expoſitio vtriusque obſeruationis et Veneris et Eclipſis Solaris factae Petropoli in ſpecula Aſtronomica.

Auctore Chriſt. Mayer pag. 541.

Continet praeſens diſſertatio recenſionem iſtarum obſeruationum, quae occaſione tranſitus Veneris per diſcum Solis et Eclipſis Solis heic Petropoli in Obſeruatorio Aſtronomico inſtitutae ſunt. Quum itaque principale momentum circa obſeruationes Aſtronomicas inſtituendas ſit exacta temporis veri cognitio, Cel. Auctor ante omnia obſeruationes altitudinum Solis correſpondentium a die 18 Maii vsque ad 23 eiusdem menſis attulit, ex quibus innotuit motum pedunculi ſui a motu medio ſolis tantum $9''$, 53 defeciſſe. His expoſitis, mentionem facit inſtrumentorum, quibus ipſe eiusque Socii, ad obſeruationem Veneris faciendam vſi ſunt. Scilicet Cel. Auctor tubum Achromaticum *Dollondi* 18 ped, Cel. Prof. et Acad. Secret. *Euler* alterum eiusdem generis 7 ped. adhibu-

hibuerunt, Cl. vero Dnis *Stahl* et *Lexell* Teleſcopia Catoptrica *Schortii*, 3 ped. 6 dig. et $2\frac{1}{2}$ ped. inſeruierunt. Hoc apparatu inſtructi, iam 23 Maii veſperi, Obſeruatores noſtri, ſolem vsque ad ipſius occaſum contemplati ſunt, ſed nullum tamen Veneris ingredientis veſtigium viderunt, niſi quod hora 9, 9′, 39″, macula nigra, rotunda Cel. Auctori appareret, quam pro Venere ingreſſum ſuum iam celebrante habuit. Hanc autem obſeruationem Cel. Auctor ipſe quoque pro dubia agnoſcit, quippe quum eadem non conciliari queat, cum illis obſeruationibus, quae alibi circa ingreſſum Veneris inſtitutae ſunt, nam ex iisdem ſequeretur primum contactum Veneris externum ad minimum 3′ tardius euenire debuiſſe.

Sequenti mane licet limbus Solis admodum vndulabatur, Cel. tamen Auctori eiusque ſociis, momenta quibus Venus e Sole egrediens, limbum Solis, tam interne quam externe contingere videbatur, ſatis exacte determinare licuit. Propter temporis vero breuitatem, quo Venus in Sole conſpiciebatur, aliae obſeruationes ad Veneris poſitionem determinandam capi non potuerunt, quam ea qua Cel. Prof. *Mayer* diſtantiam Veneris a limbo Solis auſtrali, Micrometro Obiectiuo Tubo *Lollondiano* applicato dimenſus eſt. Diametrum autem Veneris eodem Micrometro menſuratam, Cel. Auctor magnit. 57″ inuenit. Quod ad obſeruationes circa Eclipſin Solarem factas attinet, monuiſſe ſufficiat,

ficiat, quod praeter initium et finem feliciter obſeruatum, Celeb. Auctor, Micrometro obiectiuo partes lucidas diſci Solaris dimenſus ſit, Cel. vero Prof. *Euler* immerſiones et emerſiones macularum praecipuarum in Sole eo tempore conſpicuarum obſeruauit, quarum macularum poſitio deinceps ope micrometri obiectiui quoque determinata fuit.

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euler, De curua hypergeometrica hac aequatione expreſſa $y = 1.2.3....x$ pag. 3.

Eiusdem, Quomodo numeri praemagni ſint explorandi, vtrum ſint primi, nec ne pag. 67.

Eiusdem, Noua criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi pag. 89.

Eiusdem, Conſiderationes de theoria motus Lunae perficienda et imprimis de eius variatione pag. 120.

Eiusdem, Annotatio quarundam cautelarum in inveſtigatione inaequalitatum quibus corpora coeleſtia in motu perturbantur obſeruandarum pag. 159.

Eiusdem, Inueſtigatio accuratior phaenomenorum quae in motu terrae diurno a viribus coeleſtibus produci poſſunt pag. 202.

D. Bernoulli. Commentatio de vtiliſſima ac commodiſſima directione potentiarum frictionibus mechanicis adhibendarum pag. 242.

Physico-Mathematica.

L. Euler De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis iunctorum pag. 259.

Eiusdem, Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum pag. 305.

Physica.

I. A. Braun, De calore animalium dissertatio physica experimentalis pag. 419.

P. S. Pallas, De ossibus Sibiriae fossilibus craniis praesertim rhinocerotum atque buffalorum, observationes pag. 436.

C. F. Wolff, De formatione intestinorum observationes in ouis incubatis institutae p. 478.

P. S. Pallas, Descriptio leporis pusilli pag. 521.

Astronomica.

Chr. Mayer, Expositio vtriusque observationis et Veneris et Eclipsis Solaris factae Petropoli in specula astronomica pag. 541.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE CVRVA HYPERGEOMETRICA HAC AEQVATIONE EXPRESSA

$y = 1.2.3.....x.$

Auctore

L. EVLERO.

I.

Denotante hic littera x abſciſſam et y applicatam, aequatio haec immediate nonniſi pro iis abſciſſis, quae numeris integris exprimuntur, applicatarum quantitatem indicat; hinc enim ſi fuerint

abſciſſae x . . 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc.
erunt
applicatae y . . 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720 etc.

ita, vt dum abſciſſae ſecundum numeros naturales capiuntur, applicatae ſecundum progreſſionem hypergeometricam *Walliſii* progrediantur; quam ob cauſam etiam hanc curuam hypergeometricam appellari conueniet. Etſi autem per hanc aequationem innumerabilia quidem iſtius curuae puncta, ſed inter ſe diſcreta aſſignantur; vniuerſa tamen huius curuae

indoles per eam aequationem definiri est censenda, ita vt cuique abscissae certa ac vi istius ipsius aequationis determinata respondeat applicata. Ratio enim istius aequationis omnino postulat, vt si abscissae cuicunque $x=p$ conueniat applicata $y=q$, tum abscissae $x=p+1$ respondeat applicata $y=q(p+1)$ abscissae vero $x=p-1$ haec applicata $y=\frac{q}{p}$. Quam ob rem neutiquam arbitrio nostro relinquitur per infinita illa puncta data curuam quandam parabolici generis ducere, cum omnia plane eius puncta ex ipsa aequatione determinentur.

II.

Praeter has autem applicatas, quae abscissis per numeros integros expressis respondent, imprimis notari merentur, quae inter eas ex aequo interiacent; et omnes per eam, quam abscissae $x=\frac{1}{2}$ respondere et quantitati $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ aequari olim ostendi, determinantur. Cum igitur sit $\sqrt{\pi}=1,77245385090548$; hae applicatae coniunctim tam pro abscissis positiuis quam negatiuis sequenti modo se habebunt:

pro

pro abſciſſis poſitiuis		pro abſciſſis negatiuis	
x	eſt applicata y	x	eſt applicata y
0	1	0	$+1$
$\frac{1}{2}$	0,8862269	$-\frac{1}{2}$	$+1,7724538$
1	1	-1	$\pm\infty$
$1\frac{1}{2}$	1,3293404	$-1\frac{1}{2}$	$-3,5449077$
2	2	-2	$\pm\infty$
$2\frac{1}{2}$	3,3233509	$-2\frac{1}{2}$	$+2,3632718$
3	6	-3	$\pm\infty$
$3\frac{1}{2}$	11,6317284	$-3\frac{1}{2}$	$-0,9453087$
4	24	-4	$\pm\infty$
$4\frac{1}{2}$	52,3427777	$-4\frac{1}{2}$	$+0,2700882$
5	120	-5	$\pm\infty$
$5\frac{1}{2}$	287,8852775	$-5\frac{1}{2}$	$-0,0600196$
6	720	-6	$\pm\infty$
$6\frac{1}{2}$	1871,2543038	$-6\frac{1}{2}$	$+0,0109126$
7	5040	-7	$\pm\infty$.

Hinc delineaui iſtam curuam in fig. 1. expreſſam quae ab abſciſſa negatiua $x=-1$, vbi applicata fit infinita vsque ad $x=3$, vbi fit $y=6$ porrigitur, hinc vero continuo in infinitam aſcendere eſt intelligenda; ſiniſtrorſum vero, vbi pro ſingulis abſciſſarum valoribus integris applicatae abeunt in aſymtotas, vltra $x=-1$ non expreſſi. Tab. I. Fig. 1.

III.

Conſideratio huius curuae plures ſuppeditat quaeſtiones haud parum curioſas, eius naturae accuratius cognoſcendae inſeruientes, quarum euolutio eo

maiori attentione digna videtur, quod aequatio pro curua more ſolito explicari nequit. Huiusmodi quaeſtiones primo circa determinationem reliquorum curuae punctorum praeter ea, quae facile aſſignare licet, verſantur. Deinde in ſingulis punctis poſitio tangentis inſignem inueſtigationem requirit, quo facilius tractus totius curuae definiri queat. Tum vero ex inſpectione figurae perſpicuum eſt inter abſciſſas $x=0$ et $x=1$, alicubi applicatam omnium minimam eſſe debere; cuius adeo tam locum quam ipſam quantitatem aſſignari operae erit pretium.

Praeterea vero inter binas abſciſſas negatiuas $-1,-2,-3,-4,-5$ etc. vbi applicatae in infinitum extenduntur, neceſſe eſt dari quoque applicatas minimas, quae quo magis ſiniſtrorſum progrediamur, continuo minores euadunt, donec tandem prorſus euaneſcant. Denique etiam quaeſtio de radio curvaminis in ſingulis curuae punctis attentionem noſtram meretur, isque imprimis curuae locus notatu dignus videtur, vbi curuatura eſt maxima, ſiquidem manifeſtum eſt, in elongatione ab axe curuae ramos continuo propius ad lineam rectam accedere. Has igitur quaeſtiones reſoluere inſtitui.

Quaeſtio prima.

Pro curua hypergeometrica inuenire aequationem continuam inter abſciſſam x *et applicatam* y, *quae aeque locum habeat, ſiue pro* x *capiatur numerus integer, ſiue fractus quicunque.*

4. Cum

4. Cum aequatio propoſita $y = 1.2.3.\ldots.x$ locum proprie habere nequeat, niſi x ſit numerus integer, eam in aliam formam transfundi oportet, quae ab hac conditione ſit liberata; quod pluribus modis per expreſſiones in infinitum excurrentes fieri poteſt, inter quas primum occurrit iſta:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x}\left(\frac{5}{4}\right)^x \text{ etc.}$$

qui factores in infinitum continuari debent. Ratio huius expreſſionis inde eſt manifeſta, quod quo plures capiantur factores, veritas eo propius, ſumtis autem infinitis, accurate obtineatur: ſi enim factorum numerus ſit $= n$, habetur

$$y = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{2+x} \cdot \frac{3}{3+x} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+x}(n+1)^x$$

cuius numerator ſi ita repraeſentetur:

$$1.2.3.\ldots.x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.n$$

denominator vero ita

$$(1+x)(2+x)(3+x)\ldots.n(n+1)(n+2)\ldots.(n+x)$$

deletis factoribus communibus prouenit

$$y = \frac{1.2.3.\ldots.x}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+x)}(n+1)^x.$$

Quare ſi n ſit numerus infinitus, ob denominatoris ſingulos factores $= n+1$ eorumque numerorum $= x$, totus denominator per multiplicatorem $(n+1)^x$ tollitur, proditque aequatio propoſita $y = 1.2.3\ldots x$.

5. Haec forma aliquanto generalior reddi poteſt; cum enim totum negotium eo redeat, vt multi-

multiplicator $(n+1)^x$ poſtremo denominatori $(n+1)(n+2)(n+3) \ldots\ldots (n+x)$ aequiualeat, caſu quo numerus n eſt infinitus, euidens eſt huic conditioni quoque ſatisfieri, ſi multiplicator ille in genere ſtatuatur $(n+a)^x$ exiſtente a numero quocunque finito; maxime vero hanc formulam ad inſtitutum fore accommodatam, ſi litterae a medius quidam valor inter 1 et x veluti $a=\frac{1+x}{2}$ ſeu $a=\sqrt{x}$ tribuatur. Nunc vero neceſſe eſt hunc multiplicatarem $(n+a)^x$ in tot factores, quot numerus n continet vnitates, reſolui, quod commode hac reſolutione praeſtatur:

$$(n+a)^x = a^x \cdot \left(\frac{a+1}{a}\right)^x \cdot \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x \cdot \left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x \ldots\ldots \left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^x.$$

Quocirca pro abſciſſa quacunque x habebimus applicatam:

$$y = a^x \cdot \frac{1}{1+x}\left(\frac{a+1}{a}\right)^x \cdot \frac{1}{2+x}\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x \cdot \frac{1}{3+x}\left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x \cdot \text{etc. in infinitum}$$

quae expreſſio ſemper veritati eſt conſentanea, quicunque numerus pro a accipiatur, promtiſſime autem ad veritatem perducet, ſi ſumatur $a=\frac{1+x}{2}$, vnde fiet:

$$y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x \cdot \text{etc.}$$

quae expreſſio ex infinitis factoribus formae $\frac{m}{m+x}\left(\frac{a+m}{a+m-1}\right)^x$ praeter primum a^x conſtat, et quo plures quouis caſu inuicem multiplicantur, eo propius ad

ad veritatem accedetur. Hinc autem nascitur prima expressio, si sumatur $a=1$.

6. Eo magis autem haec expressio ad vsum est accommodata, quo promtius factores ad vnitatem conuergunt, id quod euenit sumendo $a=\frac{1+x}{2}$, tum vero calculus eo facilius expedietur, quo minores numeri loco x substituuntur, semper autem sufficit applicatas pro abscissis x vnitate vel adeo nihilo minoribus inuestigasse, quoniam inde facili negotio applicatae per abscissis $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ etc. deriuantur. Sit igitur $x=\frac{\alpha}{\beta}$ existente $\alpha<\beta$, eritque

$$y=\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{3\beta+\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\left(\frac{5\beta+\alpha}{3\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{3\beta}{\alpha+3\beta}\left(\frac{7\beta+\alpha}{5\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\text{etc.}$$

vnde applicatae potestas y^β ita prodit expressa:

$$y^\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\beta^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha}{(\beta+\alpha)^\beta(\beta+\alpha)^\alpha}\cdot\frac{(2\beta)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha}{(2\beta+\alpha)^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha}\cdot\frac{(3\beta)^\beta(7\beta+\alpha)^\alpha}{(3\beta+\alpha)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha}\text{ etc.}$$

Pro abscissa autem $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ applicata y hinc colligetur

$$y^\beta=\left(\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\beta^\beta(\beta-\alpha)^\alpha}{(\beta-\alpha)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha}\cdot\frac{(2\beta)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha}{(2\beta-\alpha)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha}\cdot\frac{(3\beta)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha}{(3\beta-\alpha)^\beta(7\beta-\alpha)^\alpha}\text{ etc.}$$

Sumamus exempli gratia $x=\frac{1}{2}$ et impetrabimus:

$$y^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\cdot2\cdot7}{3\cdot3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4\cdot11}{5\cdot5\cdot7}\cdot\frac{6\cdot6\cdot15}{7\cdot7\cdot11}\cdot\frac{8\cdot8\cdot19}{9\cdot9\cdot15}\text{ etc.}$$

cuius factor in genere cum sit $\frac{2n\cdot2n\cdot(4n+3)}{(2n+1)(2n+1)(4n-1)}=\frac{16n^3+12nn}{16n^3+12nn-1}$ $=1+\frac{1}{(2n+1)^2(4n-1)}$, hinc intelligitur, quam

promte hi factores ad vnitatem accedunt, erit igitur:

$$yy = \tfrac{3}{4}\left(1+\tfrac{1}{3^2\cdot 3}\right)\left(1+\tfrac{1}{5^2\cdot 7}\right)\left(1+\tfrac{1}{7^2\cdot 11}\right)\left(1+\tfrac{1}{9^2\cdot 15}\right)\left(1+\tfrac{1}{11^2\cdot 19}\right) \text{ etc.}$$

vbi quidem nouimus esse $yy = \frac{\pi}{4}$. Sin autem statuamus $x = -\frac{1}{2}$, cui conuenit $y = \sqrt{\pi}$ erit ex altera expressione

$$\pi = 4 \cdot \frac{2\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 9} \cdot \frac{6\cdot 6\cdot 9}{5\cdot 5\cdot 13} \cdot \frac{8\cdot 8\cdot 13}{7\cdot 7\cdot 17} \cdot \text{ etc.}$$

seu $\pi = 4\left(1-\frac{1}{1^2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2\cdot 9}\right)\left(1-\frac{1}{5^2\cdot 13}\right)\left(1-\frac{1}{7^2\cdot 17}\right)$ etc. inde vero est $\pi = 3\left(1+\frac{1}{3^2\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{5^2\cdot 7}\right)\left(1+\frac{1}{7^2\cdot 11}\right)\left(1+\frac{1}{9^2\cdot 15}\right)$ etc.

ita vt altera crescendo, altera decrescendo ad veritatem appropinquet.

7. Commodius autem calculus instituetur, si expressio nostra in singulis factoribus abrumpatur, tum enim sequentes formulae prodibunt continuo propius ad veritatem accedentes:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{2}\right)^{x}$$

$$y = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{2}\right)^{x}$$

$$y = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{2+x}\cdot\frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{2}\right)^{x}$$

$$y = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{2+x}\cdot\frac{3}{3+x}\cdot\frac{4}{4+x}\left(\frac{9+x}{2}\right)^{x}$$

$$y = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{2+x}\cdot\frac{3}{3+x}\cdot\frac{4}{4+x}\cdot\frac{5}{5+x}\left(\frac{11+x}{2}\right)^{x}.$$

Quia

Quia si loco x scribatur $-x$ prodit applicata $=\frac{y}{x}$ erit per similes formulas:

$$y=\left(\frac{2+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\left(\frac{4+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\left(\frac{6+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\left(\frac{8+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdot\frac{5}{4+x}\left(\frac{10+x}{2}\right)^{x-1}.$$

Quare posito $x=\frac{1}{2}$ pro applicata $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ duplex series formularum eo conuergentium resultat:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{4}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\sqrt{\frac{11}{4}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\sqrt{\frac{15}{4}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\sqrt{\frac{19}{4}}$$
etc.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{9}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\sqrt{\frac{4}{13}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\sqrt{\frac{4}{17}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\sqrt{\frac{4}{21}}$$
etc.

8. Huiusmodi autem producta commodissime per logarithmos euoluuntur; ac primo quidem ex forma generali numerum quemcunque a implicante nanciscimur:

$$ly=x\,la+x\,l\frac{a+1}{a}+x\,l\frac{a+2}{a+1}+x\,l\frac{a+3}{a+2}+x\,l\frac{a+4}{a+3}\text{ etc.}$$
$$-l(1+x)-l(1+\tfrac{x}{2})-l(1+\tfrac{x}{3})-l(1+\tfrac{x}{4})\text{ etc.}$$

et sumto $a=\frac{1+x}{2}$, vt haec series maxime conuergens reddatur:

$$ly = xl\tfrac{1+x}{2} + xl\tfrac{x+3}{x+1} + xl\tfrac{x+5}{x+3} + xl\tfrac{x+7}{x+5} + xl\tfrac{x+9}{x+7} \text{ etc.}$$
$$-l(1+x) - l(1+\tfrac{x}{2}) - l(1+\tfrac{x}{3}) - l(1+\tfrac{x}{4}) \text{ etc.}$$

Sumtis igitur his logarithmis naturalibus, cum sit in genere:

$$xl\tfrac{x+2m+1}{x+2m-1} = \tfrac{2x}{x+2m} + \tfrac{2x}{3(x+2m)^3} + \tfrac{2x}{5(x+2m)^5} + \tfrac{2x}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$$

et $l(1+\tfrac{x}{m}) = \tfrac{2x}{x+2m} + \tfrac{2x^3}{3(x+2m)^3} + \tfrac{2x^5}{5(x+4m)^5} + \tfrac{2x^7}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$

sequentem formam infinitis seriebus constantem adipiscimur:

$$ly = xl\tfrac{1+x}{2} + \tfrac{2}{3}x(1-xx)(\tfrac{1}{(x+2)^3} + \tfrac{1}{(x+4)^3} + \tfrac{1}{(x+6)^3} + \tfrac{1}{(x+8)^3} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{5}x(1-x^4)(\tfrac{1}{(x+2)^5} + \tfrac{1}{(x+4)^5} + \tfrac{1}{(x+6)^5} + \tfrac{1}{(x+8)^5} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{7}x(1-x^6)(\tfrac{1}{(x+2)^7} + \tfrac{1}{(x+4)^7} + \tfrac{1}{(x+6)^7} + \tfrac{1}{(x+8)^7} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{9}x(1-x^8)(\tfrac{1}{(x+2)^9} + \tfrac{1}{(x+4)^9} + \tfrac{1}{(x+6)^9} + \tfrac{1}{(x+8)^9} + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

9. Primae seriei sumamus definitum terminorum numerum qui sit $= n$, et cum superior pars ad vnicum membrum $xl(a+n)$ redigatur, erit

$$ly = xl(a+n) - l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) \ldots\ldots - l(1+\tfrac{1}{n}x)$$

quae expressio eo propius ad veritatem accedit, quo maior capiatur numerus n. Sit igitur n numerus praemagnus ac primo quidem habebimus $l(n+a) = ln + \tfrac{a}{n} - \tfrac{aa}{2nn} + \tfrac{a^3}{3n^3} - \text{etc.}$ vbi loco a sumi $\tfrac{1+x}{2}$ conueniet; tum vero posita breuitatis gratia fractione $0,577215664901532\,5 = \Delta$, nouimus esse summam progressionis harmonicae:

$$1 + \tfrac{1}{2}$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}=\Delta+ln+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12nn}+\frac{1}{120n^4}-$ etc.

vnde cum ſit:

$$l(n+a)=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots+\tfrac{1}{n}-\Delta-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{12nn}-\tfrac{1}{120n^4}+\tfrac{a}{n}-\tfrac{aa}{2nn}+\tfrac{a^3}{3n^3}$$

colligimus ſumto $a=\frac{x}{2}$

$$ly=-\Delta x+x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x\ldots+\tfrac{1}{n}x+\tfrac{xx}{2n}-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{n}x)-\tfrac{x-6xx-7x^3}{24nn}.$$

Reuera ergo augendo numerum n in infinitum erit:

$$ly=-\Delta x+x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x+\text{etc.}-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{4}x)-\text{etc.}$$

et ſingulis logarithmis per ſeries euolutis:

$$\begin{aligned}ly=&-\Delta x+\tfrac{1}{2}xx(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.})\\&-\tfrac{1}{3}x^3(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.})\\&+\tfrac{1}{4}x^4(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.})\\&-\tfrac{1}{5}x^5(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\text{etc.})\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

10. Praeter has autem formulas, quibus cuique abſciſſae x conueniens applicata y aſſignatur, methodus mea progreſſiones indefinite ſummandi ſingularem ſuppeditat expreſſionem ad eundem ſcopum accommodatam.

Cum enim ſit $ly=l1+l2+l3+l4\ldots+lx$ hanc progreſſionem indefinite ſummari oportet; introducendo autem valores numericos:

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$, $F = \frac{691}{1.\ 2.\ 3.\ 5. \ldots\ldots 15.\ 315}$ etc. quorum progreſſio ita eſt comparata vt ſit

$$5B = 2AA;\quad 7C = 4AB;\quad 9D = 4AC + 2BB;$$
$$11E = 4AD + 4BC \text{ etc.}$$

oſtendi alibi fore

$$ly = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) l x - x + \frac{A}{2x} - \frac{1.2B}{2^3 x^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5 x^5} - \frac{1.2.3.4.5.6D}{2^7 x^7} + \text{etc.}$$

quae ſeries prae ſuperioribus hunc praeſtat vſum, vt quo maiores capiantur abſciſſae x eo promtius verum valorem applicatae y exhibeat. Cum igitur ſi abſciſſae x conueniat applicata y, abſciſſae maiori $x+n$ conueniat applicata $y(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.(x+n)$, habebimus ſemper per ſeriem valde convergentem;

$$ly = \tfrac{1}{2} l 2\pi - l(x+1) - l(x+2) - l(x+3) \ldots\ldots - l(x+n) + (x+n+\tfrac{1}{2}) l(x+n)$$
$$- x - n + \frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.2B}{2^3 (x+n)^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5 (x+n)^5} - \frac{1.2.3.4.5.6D}{2^7 (x+n)^7} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo e denotet numerum, cuius logarithmus naturalis $= 1$, breuitatis gratia ponatur:

$$\frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.2B}{2^3 (x+n)^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5 (x+n)^5} - \text{etc.} = s$$

concludimus a logarithmus ad numeros regrediendo

$$y = \frac{\sqrt{2\pi (x+n)}}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)} \left(\frac{x+n}{e}\right)^{x+n} e^{s}$$

vbi numerus integer n arbitrio noſtro relinquitur, quo

quo maior is autem accipiatur, eo facilius verum valorem ipsius s inuenire licet.

11. Denique etiam applicatam y per formulam integralem exhibere licet, posita enim abscissa $x = p$, nouaque introducta variabili u, prae qua quantitas p vt constans tractetur, erit applicata $y = \int du \left(l\frac{1}{u}\right)^p$ siquidem integratio a valore $u = 0$ vsque ad valorem $u = 1$ extendatur. Vel si forma exponentiali vti malimus, erit quoque

$$y = \int e^{-v} v^p \, dv$$

integrationem a valore $v = 0$ ad $v = \infty$ extendendo. Ex his quidem formulis, quoties abscissa p est numerus integer, integratio statim praebet $y = 1.2.3 \ldots\ldots p$. at si p fuerit numerus fractus, hinc simul intelligitur ad quodnam genus quantitatum transcendentium valor ipsius y referri debeat. Alio autem loco ostendi, quomodo tum integrale per quadraturas curuarum algebraicarum exprimi queat.

12. En ergo plurimas solutiones quaestionis nostrae primae, qua pro qualibet abscissa x etiamsi numero non integro exprimatur, valor applicatae y reperiebatur: quarum praecipuas simul aspectui exposuisse iuuabit, vt inde quouis casu ea, quae maxime ad vsum accommodata videatur, eligi queat:

I. $y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x}\left(\frac{5}{4}\right)^x$. etc.

II. $y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x$. etc.

III.

III. $ly = x l\frac{2}{1} + x l\frac{3}{2} + x l\frac{4}{3} + x l\frac{5}{4} + \text{etc.}$
$- l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

IV. $ly = x l\frac{1+x}{2} + x l\frac{x+3}{x+1} + x l\frac{x+5}{x+3} + x l\frac{x+7}{x+5} + x l\frac{x+9}{x+7} + \text{etc.}$
$- l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

V. $ly = -\Delta x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \text{etc.}$
$- l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.}$

VI. $ly = -\Delta x + \frac{1}{2}xx(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.})$
$+ \frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.})$
$+ \frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.})$
$+ \frac{1}{5}x^5(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.})$
$+ \text{etc.}$

VII. $ly = \frac{1}{2}l2\pi + (x+\frac{1}{2})lx - x + \frac{A}{2x} - \frac{1.2\,B}{2^3 x^3} + \frac{1.2.3.4\,C}{2^5 x^7} - \frac{1.2\ldots6\,D}{2^7 x^9} + \text{etc.}$

existente $\Delta = 0,57721566490014225$ et

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$ etc.

Tum in tribus postremis formis logarithmos naturales accipi oportet.

Quaestio secunda.

In curua hypergeometrica ad quoduis eius punctum directionem tangentis definire.

13. Hic igitur assumimus pro quauis abscissa x valorem applicatae y iam esse inuentum; et cum directio tangentis ratione differentialium $\frac{dy}{dx}$ definiatur, quippe qua fractione tangens anguli, quo curvae

vae tangens in loco propoſito ad axem inclinatur, exprimi ſolet, tantum opus eſt, vt quandam formularum inuentarum differentiemus. In hunc autem finem formula V maxime videtur idonea, ex qua colligimus:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \text{etc.}$$

quae expreſſio in hanc concinniorem contrahitur:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \frac{x}{4(4+x)} + \text{etc.}$$

vnde ſtatim patet, ſi x ſit numerus integer negatiuus, fieri non ſolum applicatam y, ſed etiam formulam $\frac{dy}{dx}$ infinitam, ita vt in his locis ipſae applicatae, vtpote aſymtotae fiant tangentes. Ponamus autem in genere angulum, quem tangens cum axe conſtituit $= \Phi$ vt ſit $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } \Phi$.

14. Primum ergo hinc definiamus tangentes pro abſciſſis x, quae numeris poſitiuis exprimuntur, ſiquidem applicatae y ſponte dantur.

I. Sit ergo $x = 0$, et ob $y = 1$ fit

$$\frac{dy}{dx} = -\Delta = -0,5772156649 = \text{tang. } \Phi$$

vnde fit angulus $\Phi = -29°,59',39''$, vbi ſignum $-$ indicat, tangentem dextrorſum in axem incidere, cum eoque angulum tantum non 30° conſtituere.

II. Sit $x = 1$ et ob $y = 1$ fit $\frac{dy}{dx} = 1 - \Delta = 0,422784335$ $= \text{tang. } \Phi$, hincque angulus $\Phi = 22°,55'$.

III. Sit $x=2$ et ob $y=2$ fit $\frac{dy}{dx}=2(1+\frac{1}{2}-\Delta)=1,845568670$ $=\text{tang.}\,\Phi$ hincque angulus $\Phi=61°,33'$.

IV. Sit $x=3$ et ob $y=6$ fit $\frac{dy}{dx}=6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\Delta)=\text{tang.}\,\Phi$ ſeu $\text{tang.}\,\Phi=7,536706010$ et $\Phi=82°,26'$.

V. Sit $x=4$ et ob $y=24$ fit $\frac{dy}{dx}=24(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\Delta)$ hincque $\text{tang.}\,\Phi=36,146824040$ et $\Phi=88°,25'$.

In genere igitur ſi abſciſſa x aequetur numero integro cuicunque n, ob $y=1.2.....n$ erit

$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=1.2.3....n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\Delta)$.

15. Definiamus hinc etiam tangentes pro locis intermediis, ac primo quidem ad abſciſſas poſitiuas relatis:

I. Sit $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ atque

$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$ etc.

ſeu $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\text{etc.})=-\Delta+2(1-l2)$

hincque $\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1-l2)-\Delta)=0,0364899739.y$

II. Sit $x=\frac{3}{2}$ erit $y=\frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi}$ atque

$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\frac{1}{3}-l2)$ vnde fit

$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}-l2)-\Delta)=0,7031566405.y$

III. Sit $x=\frac{5}{2}$ erit $y=\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{\pi}$ et $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-l2)$

hinc $\text{tang.}\,\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-l2)-\Delta)=1,1031566405.y$.

Cum

Cum nunc sit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.(2(1-l2)-\Delta)=0,0323383973$ erit pro his casibus:

$x=\frac{1}{2}$; $y=0,8862269$ tang.$\Phi=0,0323384$
$x=\frac{3}{2}$; $y=1,3293404$ tang.$\Phi=0,9347345$
$x=\frac{5}{2}$; $y=3,3233509$ tang.$\Phi=3,6661767$
$x=\frac{7}{2}$; $y=11,6317284$ tang.$\Phi=16,1549694$
$x=\frac{9}{2}$; $y=52,3427777$ tang.$\Phi=84,3290907$
etc.

16. Antequam vlterius progrediar, obseruo si fuerit pro abscissa quacunque

$$x=p;\ y=q;\ \text{tang.}\Phi=r$$

tum pro abscissa sequente fore

$$x=p+1;\ y=q(p+1)\ \text{et tang.}\Phi=r(p+1)+q$$

pro abscissa autem antecedente

$$x=p-1;\ y=\frac{q}{p};\ \text{et tang.}\Phi=\frac{r}{p}-\frac{q}{p.p}$$

vnde superiores valores facile retro continuare poterimus:

$x=\frac{1}{2}$; $y=0,8862269$; tang.$\Phi=0,0323384$
$x=-\frac{1}{2}$; $y=1,7724538$; tang.$\Phi=-3,4802308$
$x=-\frac{3}{2}$; $y=-3,5449077$; tang.$\Phi=-0,1293538$
$x=-\frac{5}{2}$; $y=+2,3632718$; tang.$\Phi=+1,6617504$
$x=-\frac{7}{2}$; $y=-0,9453087$; tang.$\Phi=-1,0428236$
$x=-\frac{9}{2}$; $y=+0,2700882$; tang.$\Phi=+0,3751176$
$x=-\frac{11}{2}$; $y=-0,0600196$; tang.$\Phi=-0,0966971$
$x=-\frac{13}{2}$; $y=+0,0109126$; tang.$\Phi=+0,0195654$
etc.

17. Eadem aequatio differentialis ei curuae puncto μ inueniendo inſeruit, vbi applicata eſt minima ſeu tangens axi parallela. Poſito igitur $\frac{dy}{dx}=0$, abſciſſa reſpondens x ex hac aequatione quaeri debet:

$$\Delta=\frac{x}{1+x}+\frac{x}{2(2+x)}+\frac{x}{3(3+x)}+\frac{x}{4(4+x)}+\frac{x}{5(5+x)}+\text{etc.}$$

quae euoluitur in hanc:

$$\begin{aligned}\Delta=&+x\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)\\&-x^2\left(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)\\&+x^3\left(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)\\&-x^4\left(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{5^5}+\text{etc.}\right)\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Summis autem harum ſerierum proximis ſubſtitutis erit

$$\begin{aligned}0=&+0,5772156649-1,6449340668\,x\\&+1,2020569032\,x^2-1,0823232337\,x^3\\&+1,0369277551\,x^4-1,0173430620\,x^5\\&+1,0083492774\,x^6-1,0040773562\,x^7\\&+1,0020083928\,x^8-1,0009945751\,x^9\\&+1,0004941886\,x^{10}-1,0002460866\,x^{11}\\&+1,0001227233\,x^{12}-1,0000612481\,x^{13}\\&+1,0000305882\,x^{14}-1,0000152823\,x^{15}\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Sin autem duae primae fractiones retineantur, ſequens ſeries multo magis conuergens emergit

$$0=$$

$$\begin{aligned} 0 = &+0,5772156649 - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2(2+x)} \\ &+0,0770569032\,x^2 - 0,3949340668\,x \\ &+0,0056777551\,x^4 - 0,0198232337\,x^3 \\ &+0,0005367774\,x^6 - 0,0017180620\,x^5 \\ &+0,0000552678\,x^8 - 0,0001711062\,x^7 \\ &+0,0000059074\,x^{10} - 0,0000180126\,x^9 \\ &+0,0000006530\,x^{12} - 0,0000019460\,x^{11} \\ &+0,0000000706\,x^{14} - 0,0000002130\,x^{13} \\ &+0,0000000078\,x^{16} - 0,0000000235\,x^{15}. \end{aligned}$$

Hinc proxime reperitur $x = \frac{1}{2}$, verum haec applicata minima facilius ope sequentis quaestionis definietur.

Quaestio tertia.

Pro dato quouis curuae hypergeometricae puncto, indolem portionis minimae istius curuae circa id punctum situae inuestigare.

18. Pro abscissa ergo data $x = p$ inuenta sit applicata $y = q$; et nunc quaeri oportet applicatam, quae abscissae parumper ab illa discrepanti $p+\omega$ respondeat; quae applicata statuatur $= q+\psi$. Cum igitur sit secundum formulam V

$$\begin{aligned} lq = &-\Delta p + p + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{3}p + \tfrac{1}{4}p + \text{etc.} \\ &- l(1+p) - l(1+\tfrac{1}{2}p) - l(1+\tfrac{1}{3}p) - l(1+\tfrac{1}{4}p) - \text{etc.} \end{aligned}$$

si hic loco p scribatur $p+\omega$, loco lq prodibit valor ipsius $l(q+\psi)$, quo ipso quaestio resoluetur. At si ponamus $lq = \mathrm{P}$, scribendo $p+\omega$ loco p notum est prodire

$$l(q+\psi) = \mathrm{P} + \frac{\omega\, dP}{1\,dp} + \frac{\omega^2\, d\,dP}{1.2\,dp^2} + \frac{\omega^3\, d^3P}{1.2.3\,dp^3} + \frac{\omega^4\, d^4P}{1.2.3.4\,dp^4} + \text{etc.}$$

Eſt vero vt vidimus:

$$\frac{dP}{dp} = -\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc.}$$

hincque porro:

$$\frac{d\,dP}{1\cdot dp^2} = \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3P}{1\cdot 2\,dp^3} = -\frac{1}{(1+p)^3} - \frac{1}{(2+p)^3} - \frac{1}{(3+p)^3} - \frac{1}{(4+p)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4P}{1\cdot 2\cdot 3\,dp^4} = \frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.}$$

etc.

vnde ob $P = lq$ colligimus:

$$l\left(1+\frac{\psi}{q}\right) = -\Delta\omega + \omega\left(\frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\omega^2\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \text{etc.}\right)$$
$$-\tfrac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\omega^4\left(\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \text{etc.}\right)$$
$$-\tfrac{1}{5}\omega^5\left(\frac{1}{(1+p)^5} + \frac{1}{(2+p)^5} + \frac{1}{(3+p)^5} + \text{etc.}\right)$$
etc.

19. Hic iam coordinatae p et q vt conſtantes ſpectari poſſunt, quoniam litterae ω et ψ nouas coordinatas a dato curuae puncto ſumtas atque illis parallelas referunt; ex quarum relatione hic definita indoles curuae circa id punctum verſantis facile inveſtigatur. Quare cum iam innumerabilia curuae puncta aſſignauerimus, hinc tractus ſingularum curvae portionum inter bina illorum punctorum interiacentium vero proxime definiri poterit. Primo ſcilicet

scilicet ex illa aequatione differentiata colligitur vt ante inclinatio tangentis ad axem Φ, fitque

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \text{tang. } \Phi = q\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right).$$

Deinde si pro aequatione differentiali breuitatis gratia ponamus $d\psi = A d\omega + B\omega d\omega + C\omega^2 d\omega +$ etc. erit radius curuaturae in dato curuae puncto $= \frac{(1+AA)^{\frac{3}{2}}}{B} = B\frac{1}{\cos.\Phi^3}$ ob $A = \text{tang. } \Phi$. Est vero

$$B = \text{tang. } \Phi\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right)$$
$$+ q\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

vnde si radius curuaturae ponatur $= r$ erit

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin.\Phi^2 \cos.\Phi}{q} + q\left(\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \text{etc.}\right.$$

20. Quo autem inuestigationem directionis et curuaturae ad curuae puncta a puncto principali coordinatis p et q definito extendere queamus, ponamus breuitatis causa

$$-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc} = P$$
$$\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.} = Q$$
$$\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \frac{1}{(4+p)^3} + \text{etc.} = R$$
$$\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.} = S$$
$$\text{etc.}$$

vt fit $I\left(1 + \frac{\psi}{q}\right) = P\omega + \frac{1}{2}Q\omega^2 - \frac{1}{3}R\omega^3 + \frac{1}{4}S\omega^4 - \frac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$

Iam

Iam hinc differentiando elicimus :

$$\frac{d\psi}{d\omega} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})$$

atque vlterius differentiando

$$\frac{d\,d\psi}{d\omega^2} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^2$$
$$+(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})$$

$$\frac{d^3\psi}{d\omega^3} = 3(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})(P+Q\omega$$
$$-R\omega^2+S\omega^3-\text{etc.})$$
$$+(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^3$$
$$-(q+\psi)(2R-6S\omega+12T\omega^2-\text{etc.}).$$

His expeditis pro curuae puncto, quod conuenit abſciſſae $x = p+\omega$ et applicatae $y = q+\psi$ directio tangentis ita ſe habebit vt ſit

$$\text{tang.}\Phi = \frac{d\psi}{d\omega} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}).$$

Tum vero poſito radio curuaturae $= r$, nouimus fore

$$r = (1+\frac{d\psi^2}{d\omega^2})^{\frac{3}{2}} : \frac{d\,d\psi}{d\omega^2} = 1 : \frac{d\,d\psi}{d\omega^2}\cdot\text{cof.}\,\Phi^3$$

ſeu $\frac{1}{r} = \frac{d\,d\psi}{d\omega^2}\text{cof.}\,\Phi^3$, vnde pro variabilitate curuaturae elicimus :

$$-\frac{dr}{rr\,d\omega} = \frac{d^3\psi}{d\omega^3}\text{cof.}\,\Phi^3 - \frac{3\,d\,d\psi}{d\omega^2}\cdot\frac{d\Phi}{d\omega}\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2.$$

Eſt vero $\frac{d\Phi}{\text{cof.}\,\Phi^2} = \frac{d\,d\psi}{d\omega}$ vnde conficitur :

$$-\frac{dr}{rr\,d\omega} = \frac{d^3\psi}{d\omega^3}\text{cof.}\,\Phi^3 - 3(\frac{d\,d\psi}{d\omega^2})^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^4.$$

Quae-

Quaestio quarta.

Naturam curuae hypergeometricae circa punctum eius infimum μ, *vbi applicata est minima, inuestigare.*

21. Quoniam hoc punctum parum distat a loco, cui respondet abscissa $=\frac{1}{2}$ et applicata $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ statuamus $p=\frac{1}{2}$ vt sit $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, hincque primo quaeramus valores litterarum P, Q, R, S etc. qui prodibunt

$P=-\Delta+\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\text{etc.}=2(1-l2)-\Delta=0,03648997397857$

$Q=\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\frac{4}{9^2}+\text{etc.} \quad =0,93480220054468$

$R=\frac{8}{3^3}+\frac{8}{5^3}+\frac{8}{7^3}+\frac{8}{9^3}+\text{etc.} \quad =0,41439832211716$

$S=\frac{16}{3^4}+\frac{16}{5^4}+\frac{16}{7^4}+\frac{16}{9^4}+\text{etc.} \quad =0,23484850566707$

$T=\frac{32}{3^5}+\frac{32}{5^5}+\frac{32}{7^5}+\frac{32}{9^5}+\text{etc.} \quad =0,14476040831276$

$V=\frac{64}{3^6}+\frac{64}{5^6}+\frac{64}{7^6}+\frac{64}{9^6}+\text{etc.} \quad =0,09261290502029$

$W=\frac{128}{3^7}+\frac{128}{5^7}+\frac{128}{7^7}+\frac{128}{9^7}+\text{etc.} \quad =0,06035822809843$

Deinde vero est $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=0,88622692545274$.

22. Hinc iam ante omnia definiamus locum μ, vbi applicata est omnium minima, quem cum leues approximationes ostendant respondere abscissae $x=0,4616$, posito $p+\omega=\frac{1}{2}+\omega=0,4616$, colligitur proxime $\omega=-0,0383$, qui iam valor ex aequatione $\frac{d\psi}{d\omega}=0$ seu

$$P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}=0$$

accuratius inueſtigari debet. Cum igitur ſit prope $\omega = -\frac{1}{26}$ ſtatuatur $\omega = -\frac{1}{26} - z$, et facta ſubſtitutione neceſſe eſt fiat . . . $0,03648997397857 =$

$$\begin{array}{l}
+0,03595393079018+0,9348022002z \\
+0,00061301526940+0,03187679\,4z+0,414398zz \\
+0,00001336188585+0,00104222\,7z+0,027097zz \\
+0,00000031677900+0,00003294\,5z+0,001285zz \\
+0,00000000779479+0,00000010\,13z+0,000053zz \\
+0,00000000019538+0,00000000\,30z+0,000002zz \\
+0,00000000000496
\end{array}$$

13

$$\begin{array}{l}
0,03658063271970+0,96775521\,1z+0,442835zz \\
0,03648997397857
\end{array}$$

$$0 = 0,00009065874113+0,96775521\,1z+0,442835zz$$

vnde reperitur $z = -0,00009368323$ hincque $\omega = -0,03836785523$.

Quocirca minima applicata $m\mu$ reſpondet, abſciſſae $Om = 0,46163214477$. Pro applicata vero $m\mu = q + \psi$ euolui oportet aequationem

$$l(1+\tfrac{\psi}{q}) = P\omega + \tfrac{1}{2}Q\omega^2 - \tfrac{1}{3}R\omega^3 + \tfrac{1}{4}S\omega^4 - \tfrac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$$

ex qua colligitur $l(1+\frac{\psi}{q}) = -0,000704053$ porroque $1+\frac{\psi}{q} = 1-0,000703805$, ita vt fiat applicata minima $m\mu = q+\psi = 0,8856031945$.

23. Definiamus iam in genere ex aequatione logarithmica valorem ipſius ψ ac calculo ſubducto obtinebimus:

$\frac{\psi}{q} =$

$$\frac{\psi}{q} = +0,0364899740\omega + 0,4680668860\omega^2 - 0,1210692211\omega^3 + 0,1632147\omega^4 - 0,0936075\omega^5 \text{ etc.}$$

qui termini si quidem ω valde paruum accipiatur sufficiunt. Ponamus autem breuitatis gratia

$$\frac{\psi}{q} = \mathfrak{P}\omega + \mathfrak{Q}\omega^2 - \mathfrak{R}\omega^3 + \mathfrak{S}\omega^4 - \mathfrak{T}\omega^5 \text{ vt sit}$$

$$\mathfrak{P} = 0,0364899740; \quad \mathfrak{Q} = 0,4680668860$$

$$\mathfrak{R} = 0,1210692211; \quad \mathfrak{S} = 0,1632147$$

$$\mathfrak{T} = 0,0936075$$

atque hinc habebimus:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = q(\mathfrak{P} + 2\mathfrak{Q}\omega - 3\mathfrak{R}\omega^2 + 4\mathfrak{S}\omega^3 - 5\mathfrak{T}\omega^4)$$

$$\frac{d\,d\psi}{d\omega^2} = q(2\mathfrak{Q} - 6\mathfrak{R}\omega + 12\mathfrak{S}\omega^2 - 20\mathfrak{T}\omega^3).$$

Quodsi iam hinc radium curuaturae in loco infimo μ vbi est $\omega = -0,0383678552\,3$ indagare velimus, quoniam ibi est $\frac{d\psi}{d\omega} = 0$, erit is $= \frac{d\omega^2}{d\psi}$. Ponatur in hoc loco radius curuaturae $= r$ et cum sit

$$\frac{1}{r} = 2q(\mathfrak{Q} - 3\mathfrak{R}\omega + 6\mathfrak{S}\omega^2 - 10\mathfrak{T}\omega^3) = 0,9669949$$

prodit pro puncto μ radius curuaturae $r = 1,'66893$.

24. Determinationes has puncti curuae infimi μ ideo omni studio inuestigaui, quod non sine ratione suspicari licebat quemadmodum hoc punctum singulari praerogatiua est praeditum, ita numeros eius indolem exhibentes elegantiam quandam in se esse complexuros, ac nisi satis simpliciter siue ratio-

naliter siue irrationaliter exprimantur, ad simplicius saltem genus quoddam transcendentium quantitatum relatum iri. Praeter expectationem autem vsu venit, vt tale criterium elegantiae neque in abscissa $Om = 0,46163214477$ neque in applicata $m\mu = 0,8856031945$ neque in radio curuaturae ibidem $= 1,166893$ appareat; nulla enim affinitas neque cum numeris rationalibus neque irrationalibus duntaxat simplicioribus, neque cum quadratura circuli, nec logarithmis vel exponentialibus deprehenditur. Cum etiam si abscissa Om vt logarithmus consideretur, numerus ei conueniens aliquid promittere videri posset, hunc numerum quaesiui et inueni $= 1,5866616$, in quo autem nulla affinitas cum quantitatibus cognitis cernitur.

25. Antequam huic speculationi finem imponam, obseruasse iuuabit formulam $1.2.3\ldots..x$ etiam per sequentem seriem indefinite exprimi posse

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quippe quae quoties x est numerus integer positiuus sponte dat illud productum $1.2.3\ldots.x$. Hoc vero etiam praestat ista expressio latius patens:

$$a^x - x(a-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.2}(a-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(a-3)^x + \text{etc.}$$

erit enim si loco x successiue substituantur numeri $0, 1, 2, 3$ etc. vt sequitur:

$a^0 = 1$

$a^0 = 1$
$a^1 - (a-1)^1 = 1$
$a^2 - 2(a-1)^2 + (a-2)^2 = 1.1$
$a^3 - 3(a-1)^3 + 3(a-2)^3 - (a-3)^3 = 1.2.3$
$a^4 - 4(a-1)^4 + 6(a-2)^2 - 4(a-3)^4 + (a-4)^4 = 1.2.3.4$
$a^5 - 5(a-1)^5 + 10(a-2)^5 - 10(a-3)^5 + 5(a-4)^5 - (a-5)^5 = 1.2.3.4.5.$
etc.

26. Manifesta haec quidem sunt ex iis, quae de differentiis cuiusque ordinis progressionum algebraicarum sunt demonstrata, verumtamen ex ipsa harum serierum natura veritas haud facile euincitur; vnde sequens demonstratio non superflua videtur. Cum pro exponentibus minoribus x res per se sit perspicua, ratiocinium ita instruo vt concessa pro casu $x = n$ veritate, eam quoque pro casu $x = n+1$ locum habere sim ostensurus.
Sit ergo

I. $a^n - n(a-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(a-2)^n - \text{etc.} = N = 1.2.3 \ldots n$

et quia summa N non ab a pendet erit etiam

II. $(a-1)^n - n(a-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(a-3)^n - \text{etc.} = N$

quae ab illa subtracta relinquit

III. $a^n - \frac{(n+1)}{1}(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.2}(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

haec multiplicetur per a vt prodeat

IV. $a^{n+1} - \frac{(n+1)}{1}a(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.2}a(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

huic addatur aequatio II in $n+1$ ducta, nempe:

V. $+(n+1)1(a-1)^n-\frac{(n+1)n}{1.\ 2}2(a-2)^n+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}3(a-3)^n-\text{etc}=(n+1)N$

atque aggregatum IV$+$V dabit

VI. $a^{n+1}-\frac{(n+1)}{1}(a-1)^{n+1}+\frac{(n+1)n}{1.\ 2}(a-2)^{n+1}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^{n+1}+\text{etc.}=(n+1)N$

vbi ob $N=1.2.3\ldots n$ erit $(n+1)N=1.2.3\ldots(n+1)$.

Euictum ergo eſt, quod ſi propoſitio noſtra

$$a^x-x(a-1)^x+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}(a-2)^x-\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^x+\text{etc.}=1.2.3.\ldots x$$

vera fuerit caſu $x=n$, eam quoque veram eſſe caſu $x=n+1$. Quoniam igitur ea manifeſto vera eſt caſu $x=1$, hinc ſequitur eam quoque veram eſſe pro omnibus numeris integris poſitiuis loco x aſſumtis.

27. Quanquam autem haec expreſſio ſatis eſt elegans et omni attentione digna, tamen ad noſtrum inſtitutum, cui curua hypergeometrica eſt propoſita, minus eſt accommodata quoniam pro caſibus quibus x eſt numerus fractus, haec ſeries non ſolum in infinitum excurrit, ſed etiam ſi denominator eſt numerus par, terminos imaginarios complectitur, ita vt eius valorem ne appropinquando quidem colligere liceat. Ita poſito $x=\frac{1}{2}$ prodit haec ſeries infinita:

$$\sqrt{a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-1)}-\tfrac{1.\ 1}{2.\ 4}\sqrt{(a-2)}-\tfrac{1.\ 1.\ 3}{2.\ 4.\ 6}\sqrt{(a-3)}-\tfrac{1.\ 1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\sqrt{(a-4)}-\text{etc.}$$

cuius valorem eſſe $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, vix quisquam oſtendere poterit. Pari modo ſumendo $x=-\frac{1}{2}$ ex ſuperioribus quidem iam nouimus eſſe

$$\sqrt{\pi}=$$

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{(a-1)}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \sqrt{(a-2)}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \sqrt{(a-3)}} + \text{etc.}$$

Nihilo vero minus vberior huius ſeriei inueſtigatio geometris merito commendatur, imprimis ſi ei amplior extenſio inducatur, atque hac forma repraeſentetur:

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

leui enim ſtudio adhibito, mox admodum inſignes proprietates deprehenduntur, quarum euolutio omnem attentionem noſtram mereri videtur. Equidem quae mihi circa eam obſeruare contigit phaenomena prorſus ſingularia hic in medium afferam.

Obſeruationes circa hanc ſeriem.

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

I. In praecedentibus igitur iam demonſtraui, ſi fuerit exponens $n = m$, fore huius ſeriei ſummam

$$s = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m$$

ita vt ea hoc caſu non a numero x pendeat. Hinc autem primo colligo ſi fuerit $n = m - 1$, tum fore $s = 0$. Cum enim ſumto $n = m$ ſit

$$\text{etc.} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m = x^m - m(x-1)^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^m - \text{etc.}$$

erit ſcribendo $x - 1$ loco x et $m - 1$ loco m ſimili modo:

$$\text{etc.} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) = (x-1)^{m-1} - (m-1)(x-2)^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

Iam

Iam illa aequatio hoc modo referatur:

$$\sigma^{\prime}..1.2.3....m = x.x^{m-1} - mx(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$
$$+ m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \text{etc.}$$

aequatio autem 4 per m multiplicata dat:

$$\odot\ 1.2.3....m = m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

quae ab illa $\sigma^{\prime}$ ſubtracta et diuiſione per x facta praebet

$$\varphi\ 0 = x^{m-1} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

quae eſt ipſa aequatio propoſita pro caſu $n = m-1$, cuius idcirco valor eſt $= 0$.

II. Eodem modo oſtenditur ſeriei propoſitae ſummam s quoque euaneſcere caſu $n = m-2$. Series enim illa φ hoc modo repraeſentetur:

$$\mathfrak{Y} = 0 = x.x^{m-2} - \frac{m}{1}x(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}x(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$$
$$+ m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$$

et ſi in eadem ſerie φ ſcribatur $x-1$ loco x et $m-1$ loco m, tota vero ſeries per m multiplicetur, fit

$$\mathfrak{D}..\quad 0 = m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$$

Hac ab illa ſubtracta reſiduum per x diuidatur, prodibitque:

$$0 = x^{m-2} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$$

Sicque

Sicque seriei propositae summa s etiam euanescit casu $n = m-2$, parique modo ostendi potest eam quoque euanescere casibus $n = m-3$, $n = m-4$, et in genere $n = m-i$, existente i numero quocunque integro positiuo. Teneatur ergo seriei propositae summam esse $s = 1.2.3 \ldots m$ casu $n = m$, casibus autem quibus exponens n minor est numero m summam in nihilum abire, siquidem numeri m et n sint integri, seu saltem $n-m$ numerus integer positiuus.

III. Quo igitur indolem reliquorum casuum perscrutemur singulos terminos nostrae seriei euolvamus et secundum potestates ipsius x disponamus, quo pacto consequemur:

$$s = x^n\left(1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ nx^{n-1}\left(m - \frac{2m(m-1)}{1.2} + \frac{3m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\left(m - \frac{4m(m-1)}{1.2} + \frac{9m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\left(m - \frac{8m(m-1)}{1.2} + \frac{27m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

quarum singularum serierum summas sequenti modo inueniemus; prima aliquanto generalius exhibeatur, et cum eius summa sit cognita:

$$1 - mu + \frac{m(m-1)}{1.2}u^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u^3 + \text{etc.} = (1-u)^m$$

continuo eam differentiemus, et perpetuo loco du restituamus u, fietque signis mutatis:

$$mu - \frac{2m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \frac{3m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 - \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1}$$

$$mu - \frac{2^2 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1} - m(m-1)u^2(1-u)^{m-2}$$

$$mu - \frac{2^3 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1} - 3m(m-1)u^2(1-u)^{m-2} + m(m-1)(m-2)u^3(1-u)^{m-3}$$

$$mu - \frac{2^4 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1} - 7m(m-1)uu(1-u)^{m-2} + 6m(m-1)(m-2)u^3(1-u)^{m-3} - m(m-1)(m-2)(m-3)u^4(1-u)^{m-4}$$

etc.

Hic ergo iam scribi oportet $u = 1$, quo facto omnes termini in quouis ordine euanescunt praeter eos, vbi exponens ipsius $1-u$ fit $= 0$.

IV. Tribuantur nunc succesſiue ipsi m valores 1, 2, 3, 4, 5 etc. et loco coefficientis in genere $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(i+1)}$ scribatur breuitatis gratia $\left(\frac{n-i}{i+1}\right)$, quo facto nanciscimur valores sequentes:

si	erit
$m=1$	$\frac{s}{1} = \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} - \left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} + \left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - \text{etc.}$
$m=2$	$\frac{s}{1\cdot 2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} - 3\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} + 7\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} - 15\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} + 31\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - \text{etc.}$
$m=3$	$\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3} = \left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} - 6\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} + 25\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - 90\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} + 301\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + \text{etc.}$
$m=4$	$\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} - 10\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} + 65\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - 350\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + 1701\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} + \text{etc.}$
$m=5$	$\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - 15\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} + 140\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} - 1050\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} + 6951\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9} + \text{etc.}$
$m=6$	$\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - 21\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + 266\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} - 2646\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9} + 22827\left(\frac{n-9}{10}\right)x^{n-10} + \text{etc.}$

vbi

vbi formatio coefficientium numericorum ex antecedentibus eſt manifeſta, eſt nempe pro poſtrema ſexta ſerie:

$21 = 6.1 + 15$; $266 = 6.21 + 140$; $2646 = 6.266 + 1050$ etc.

Atque hinc ſtatim perſpicitur, ſi fuerit $n < m$ valorem ipſius s euaneſcere, in poſtrema enim ſerie ſi $n < 6$ ideoque vel 5 vel 4 vel 3 etc. erit $\binom{n=5}{6} = 0$, $\binom{n=6}{7} = 0$ etc.

Tum vero etiam ſi ſit $n = m$, euidens eſt fore $\frac{s}{1.2...m} = 1$, eſt enim in infima ſerie:

$\binom{6=5}{6} = 1$, $\binom{6=6}{7} = 0$, $\binom{6=7}{8} = 0$, $\binom{6=8}{9} = 0$ etc.

Euolutio caſuum $n = m + 1$.

V. Hinc primo caſus euoluamus, quibus eſt $n = m + 1$, et forma poſtrema praebet

ſi	has ſummas
$m = 1, n = 2$	$\frac{s}{1} = 2x - 1$
$m = 2, n = 3$	$\frac{s}{1.2} = 3x - 3$
$m = 3, n = 4$	$\frac{s}{1.2.3} = 4x - 6$
$m = 4, n = 5$	$\frac{s}{1.2.3.4} = 5x - 10$
$m = 5, n = 6$	$\frac{s}{1.2....5} = 6x - 15$

etc

vbi priores coefficientes ipſius x ipſi n, numeri abſoluti autem trigonalibus ipſius n aequentur, habebimus in genere

si sit	hanc aequationem
$n=m+1$	$\frac{s}{1.2.\ldots.m}=(m+1)x-\frac{m(m+1)}{1.2}=(m+1)(x-\frac{m}{2})$

ita vt sit

$$x^{m+1}-m(x-1)^{m+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+1}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+1}+\text{etc.}$$
$$=1.2.3.\ldots.(m+1)(x-\tfrac{m}{2}).$$

Euolutio casuum $n=m+2$.

VI. Pro his ergo casibus habebimus

si fuerit	has aequationes
$m=1, n=3$	$\frac{s}{1}=3x^2-3.1x+1.1=3(xx-x+\frac{2}{6})$
$m=2, n=4$	$\frac{s}{1.2}=6x^2-4.3x+1.7=6(xx-2x+\frac{7}{6})$
$m=3, n=5$	$\frac{s}{1.2.3}=10x^2-5.6x+1.25=10(xx-3x+\frac{15}{6})$
$m=4, n=6$	$\frac{s}{1.2.3.4}=15x^2-6.10x+1.65=15(xx-4x+\frac{26}{6})$
$m=5, n=7$	$\frac{s}{1.2.\ldots.5}=21x^2-7.15x+1.140=21(xx-5x+\frac{40}{6})$
$m=6, n=8$	$\frac{s}{1.2.\ldots.6}=28x^2-8.21x+1.266=28(xx-6x+\frac{57}{6})$

etc.

quae formae ita repraesentari possunt

si fuerit	erit
$m=1; n=3$	$\frac{s}{1}=\frac{2.3}{1.2}(xx-x+\frac{1.4}{12})$
$m=2; n=4$	$\frac{s}{1.2}=\frac{3.4}{1.2}(xx-2x+\frac{2.7}{12})$
$m=3; n=5$	$\frac{s}{1.2.3}=\frac{4.5}{1.2}(xx-3x+\frac{3.10}{12})$
$m=4; n=6$	$\frac{s}{1.2.3.4}=\frac{5.6}{1.2}(xx-4x+\frac{4.13}{12})$
$m=5; n=7$	$\frac{s}{1.2.\ldots.5}=\frac{6.7}{1.2}(xx-5x+\frac{5.16}{12})$
$m=6; n=8$	$\frac{s}{1.2.\ldots.6}=\frac{7.8}{1.2}(xx-6x+\frac{6.19}{12})$

vnde

vnde manifesto sequitur, si in genere sit $n = m+2$ fore

$$\frac{S}{1.2.\ldots.m} = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\left(xx - mx + \frac{m(3m+1)}{12}\right)$$

seu

$$\frac{S}{1.2.\ldots.m} = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\left(\left(x-\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m}{12}\right).$$

Ergo hinc obtinetur ista summatio

$$x^{m+2} - m(x-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+2} + \text{etc.}$$
$$= 1.2.3.\ldots.(m+2)\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m}{24}\right).$$

Euolutio casuum $n = m+3$.

VII. Pro his casibus habebimus

si fuerit	has aequationes
$m=1; n=4$	$\frac{S}{1} = 4x^3 - 6.1x^2 + 4.1x - 1.1$
$m=2; n=5$	$\frac{S}{1.2} = 10x^3 - 10.3x^2 + 5.7x - 1.15$
$m=3; n=6$	$\frac{S}{1.2.3} = 20x^3 - 15.6x^2 + 6.25x - 1.90$
$m=4; n=7$	$\frac{S}{1.2..4} = 35x^3 - 21.10x^2 + 7.65x - 1.350$
$m=5; n=8$	$\frac{S}{1.2.\ldots.5} = 56x^3 - 28.15x^2 + 8.140x - 1.1050$

quae hoc modo repraesententur:

$$\frac{S}{1} = \frac{2.3.4}{1.2.3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1.4}{4}x - \frac{1.1.2}{8}\right)$$
$$\frac{S}{1.2} = \frac{3.4.5}{1.2.3}\left(x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{2.7}{4}x - \frac{2.2.3}{8}\right)$$
$$\frac{S}{1.2.3} = \frac{4.5.6}{1.2.3}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3.10}{4}x - \frac{3.3.4}{8}\right)$$
$$\frac{S}{1.2..4} = \frac{5.6.7}{1.2.3}\left(x^3 - \frac{12}{2}x^2 + \frac{4.13}{4}x - \frac{4.4.5}{8}\right)$$
$$\frac{S}{1.2..5} = \frac{6.7.8}{1.2.3}\left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{5.16}{4}x - \frac{5.5.6}{8}\right)$$

etc.

vnde in genere concluditur pro casu $n = m+3$

$$\frac{s}{1.2....m} = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\left(x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + \frac{m(3m+1)}{4}x - \frac{mm(m+1)}{8}\right)$$
$$= \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\left(\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^3 + \tfrac{m}{4}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)\right)$$

ita vt iam consequamur:

$$x^{m+3} - m(x-1)^{m+3} + \frac{m(m-1)}{1.2.}(x-2)^{m+3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+3}\text{ etc.}$$
$$= 1.2.3.....(m+3)\left(\tfrac{1}{6}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^3 + \tfrac{m}{24}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)\right).$$

Praeparatio ad casus sequentes.

VIII. Cum §. 4. formulas tantum ad casum $m = 6$ produxerimus, conemur pro iis formam generalem eruere. In hunc finem statuamus $n = m+\lambda$, et ad abbreuiandum loco talis expressionis $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)....(k-i+1)}{1.2.3.4.....i}$ scribamus $\left(\frac{k}{i}\right)$ ita vt k denotet primum factorem numeratoris, i vero vltimum denominatoris. Ponamus igitur esse pro casu

$$m-1 \quad \frac{s}{1.2....(m-1)} = \left(\frac{m+\lambda}{m-1}\right)x^{\lambda+1} - A\left(\frac{m+\lambda}{m}\right)x^{\lambda} + B\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right)x^{\lambda-1} - C\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right)x^{\lambda-2}\text{ etc.}$$
$$m \quad \frac{s}{1.2.3...m} = \left(\frac{m+\lambda}{m}\right)x^{\lambda} - A'\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right)x^{\lambda-1} + B'\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right)x^{\lambda-2} - C'\left(\frac{m+\lambda}{m+3}\right)x^{\lambda-3}\text{ etc.}$$

ita vt A', B', C', D' etc. sint ii coefficientes, quos inuestigari oportet. Ex lege autem istarum formularum vidimus esse; $A' = m.1 + A$; $B' = mA' + B$; $C' = mB' + C$; $D' = mC' + D$ etc. vbi euidens est esse $A = \frac{m(m-1)}{1.2}$ et $A' = \frac{(m+1)m}{1.2}$ seu nostro signando modo $A = \left(\frac{m}{2}\right)$ et $A' = \left(\frac{m+1}{2}\right)$. Iam pro sequentibus operationibus obseruo esse:

$$\left(\frac{m+\mu+1}{\nu}\right) - \left(\frac{m+\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{m+\mu}{\nu-1}\right)$$

quod

quod facile inde patet, quod fit euoluendo:

$$\left(\frac{m+\mu+1}{\nu}\right) = \frac{(m+\mu+1)(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \nu}$$

$$\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right) = \frac{(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)(m+\mu+1-\nu)}{1\cdot\ 2\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (\nu-1)\qquad \nu}$$

vnde perſpicitur eſſe $\left(\frac{m+1}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\right)=\left(\frac{m}{1}\right)=m$.

IX. Iam vt fiat

$$B'-B=mA'=\left(\frac{m+1}{2}\right)m=3\left(\frac{m+1}{2}\right)+\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

ſtatuamus $B=\alpha\left(\frac{m+1}{4}\right)+\mathfrak{G}\left(\frac{m+1}{3}\right)$

hincque $B'=\alpha\left(\frac{m+2}{4}\right)+\mathfrak{G}\left(\frac{m+2}{3}\right)$

prodibitque

$$B'-B=\alpha\left(\frac{m+1}{3}\right)+\mathfrak{G}\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

vnde fit $\alpha=3$ et $\mathfrak{G}=1$ ita vt ſit

$$B'=3\left(\frac{m+2}{4}\right)+\left(\frac{m+2}{3}\right).$$

Pro ſequentibus operationibus autem notetur eſſe in genere:

$$\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)m=(\nu+1)\left(\frac{m+\mu}{\nu+1}\right)+(\nu-\mu)\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)$$

quippe quae forma prodit, ſi valor ipſius $\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)$ ſupra euolutus multiplicetur per

$$m=m+\mu-\nu+\nu-\mu=(\nu+1).\ \frac{m+\mu-\nu}{\nu+1}+(\nu-\mu).$$

X. His obſeruatis cum eſſe debeat $C'-C=mB'$, ob

$$\left(\frac{m+2}{4}\right)m=5\left(\frac{m+2}{5}\right)+2\left(\frac{m+2}{4}\right)$$

et

et $\left(\frac{m+2}{3}\right) = 4\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{5}\right)$ erit

$$m\,B' = 15\left(\frac{m+2}{5}\right) + 10\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{3}\right)$$

ſtatuatur ergo

$$C = 15\left(\frac{m+2}{6}\right) + 10\left(\frac{m+2}{5}\right) + 1\left(\frac{m+2}{4}\right)$$

hinc $C' = 15\left(\frac{m+3}{6}\right) + 10\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$.

XI. Simili modo cum eſſe debeat $D'-D=mC'$ quia eſt

$$m\left(\frac{m+3}{6}\right) = 7\left(\frac{m+3}{7}\right) + 3\left(\frac{m+3}{6}\right)$$
$$m\left(\frac{m+3}{5}\right) = 6\left(\frac{m+3}{6}\right) + 2\left(\frac{m+3}{5}\right)$$
$$m\left(\frac{m+3}{4}\right) = 5\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$$

erit

$$mC' = 105\left(\frac{m+3}{7}\right) + 105\left(\frac{m+3}{6}\right) + 25\left(\frac{m+3}{5}\right) + \left(\frac{m+3}{4}\right)$$

vnde colligimus

$$D' = 105\left(\frac{m+4}{8}\right) + 105\left(\frac{m+4}{7}\right) + 25\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

XII. Porro ob $E'-E=mD'$ quia eſt

$$m\left(\frac{m+4}{8}\right) = 9\left(\frac{m+4}{9}\right) + 4\left(\frac{m+4}{8}\right)$$
$$m\left(\frac{m+4}{7}\right) = 8\left(\frac{m+4}{8}\right) + 3\left(\frac{m+4}{7}\right)$$
$$m\left(\frac{m+4}{6}\right) = 7\left(\frac{m+4}{7}\right) + 2\left(\frac{m+4}{6}\right)$$
$$m\left(\frac{m+4}{5}\right) = 6\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

colli-

colligimus

$mD^{I} = 945\binom{m+4}{9} + 1260\binom{m+4}{8} + 490\binom{m+4}{7} + 56\binom{m+4}{6} + 1\binom{m+4}{5}$

hincque

$E^{I} = 945\binom{m+5}{10} + 1260\binom{m+5}{9} + 490\binom{m+5}{8} + 56\binom{m+5}{7} + 1\binom{m+5}{6}$

et vlterius progrediendo

$F^{I} = 10395\binom{m+6}{12} + 17325\binom{m+6}{11} + 9450\binom{m+6}{10} + 1918\binom{m+6}{9}$
$+ 119\binom{m+6}{8} + \binom{m+6}{7}.$

Euolutio casus $n = m + \lambda$.

XIII. Pro serie ergo nostra casu quo $n = m + \lambda$

$$s = x^{m+\lambda} - \frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+\lambda} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

si aequationem generalem supra §. VIII. exhibitam diuidamus per $\binom{m+\lambda}{m} = \frac{(m+\lambda)(m+\lambda-1)(m+\lambda-2)\ldots\ldots(\lambda+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}$

perueniemus ad hanc expressionem

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)} = x^{\lambda} - \frac{\lambda}{m+1} A^{I} x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{(m+1)(m+2)} B^{I} x^{\lambda-2}$$
$$- \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} C^{I} x^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

vbi loco litterarum A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I} etc. sequentes valores substitui oportet:

$A^{I} = \binom{m+1}{2} = \frac{(m+1)m}{1.2}$

$B^{I} = 3\binom{m+2}{4} + \binom{m+2}{3}$

$C^{I} = 15\binom{m+3}{6} + 10\binom{m+3}{5} + \binom{m+3}{4}$

$D^{I} = 105\binom{m+4}{8} + 105\binom{m+4}{7} + 25\binom{m+4}{6} + \binom{m+4}{5}$

$E^{I} = 945\binom{m+5}{10} + 1260\binom{m+5}{9} + 490\binom{m+5}{8} + 56\binom{m+5}{7} + \binom{m+5}{6}$

$F^{I} = 10395\binom{m+6}{12} + 17325\binom{m+6}{11} + 9450\binom{m+6}{10} + 1918\binom{m+6}{9}$
$+ 119\binom{m+6}{8} + \binom{m+6}{7}$

vbi eſt $10395 = 11.945$; $17325 = 10.1260 + 5.945$

$$9450 = 9490 + 4.1260$$
$$1918 = 8.56 + 3.490$$
$$119 = 7.1 + 2.56$$
$$1 = 6.0 + 1.1$$

hinc ſi pro valore ſequente ponatur:

$$G^I = \alpha\left(\tfrac{m+7}{14}\right) + \mathfrak{G}\left(\tfrac{m+7}{13}\right) + \gamma\left(\tfrac{m+7}{12}\right) + \delta\left(\tfrac{m+7}{11}\right) + \varepsilon\left(\tfrac{m+7}{10}\right) + \zeta\left(\tfrac{m+7}{9}\right) + \eta\left(\tfrac{m+7}{8}\right)$$

hi coefficientes ita determinabuntur:

$\alpha = 13.10395$	$\varepsilon = 9.119 + 3.1918$
$\mathfrak{G} = 12.17325 + 6.10395$	$\zeta = 8.1 + 2.119$
$\gamma = 11.9450 + 5.17325$	$\eta = 7.0 + 1.1$
$\delta = 10.1918 + 4.9450$	

XIV. Iidem autem valores commodius ita exprimentur:

$$A^I = \left(\tfrac{m+1}{2}\right).1$$

$$B^I = \left(\tfrac{m+2}{3}\right)\left(1 + 3.\tfrac{m-1}{4}\right)$$

$$C^I = \left(\tfrac{m+3}{4}\right)\left(1 + 10.\tfrac{m-1}{5} + 15.\tfrac{m-1}{5}.\tfrac{m-2}{6}\right)$$

$$D^I = \left(\tfrac{m+4}{5}\right)\left(1 + 25.\tfrac{m-1}{6} + 105.\tfrac{m-1}{6}.\tfrac{m-2}{7} + 105.\tfrac{m-1}{6}.\tfrac{m-2}{7}.\tfrac{m-3}{8}\right)$$

$$E^I = \left(\tfrac{m+5}{6}\right)\left(1 + 56.\tfrac{m-1}{7} + 490.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8} + 1260.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8}.\tfrac{m-3}{9} + 945.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8}.\tfrac{m-3}{9}.\tfrac{m-4}{10}\right)$$

$$F^I = \left(\tfrac{m+6}{7}\right)\left(1 + 119.\tfrac{m-1}{8} + 1918.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9} + 9450.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10} + 17325.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10}.\tfrac{m-4}{11} + 10395.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10}.\tfrac{m-4}{11}.\tfrac{m-5}{12}\right)$$

cuius

cuius progreſſionis lex quo facilius perſpiciatur, ponamus in genere

$$M' = \left(\frac{m+\mu-1}{\mu}\right)\left(1+\alpha.\frac{m-1}{\mu+1}+\beta.\frac{m-1}{\mu+1}.\frac{m-2}{\mu+2}+\gamma.\frac{m-1}{\mu+1}.\frac{m-2}{\mu+2}.\frac{m-3}{\mu+3}+\text{etc.}\right.$$

et ſequentem

$$N' = \left(\frac{m+\mu}{\mu+1}\right)\left(1+\alpha'.\frac{m-1}{\mu+2}+\beta'.\frac{m-1}{\mu+2}.\frac{m-2}{\mu+3}+\gamma'.\frac{m-1}{\mu+2}.\frac{m-2}{\mu+3}.\frac{m-3}{\mu+4}+\text{etc.}\right.$$

atque hi coefficientes hoc modo per praecedentes determinantur

$\alpha' = 2\alpha + \mu + 1$;
$\beta' = 3\beta + (\mu+2)\alpha$
$\gamma' = 4\gamma + (\mu+3)\beta$
$\delta' = 5\delta + (\mu+4)\gamma$
$\varepsilon' = 6\varepsilon + (\mu+5)\delta$

vnde has formulas facile quousque libuerit continuare licet.

XV. Subſtituamus iam hos valores, ac pro ſumma s ſeriei propoſitae quando $n = m+\lambda$ obtinebimus ſequentem expreſſionem:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)} =$$

$$x^\lambda - \frac{\lambda m}{1.2}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1.2.3}x^{\lambda-2}\left(1+\frac{3(m-1)}{4}\right)$$

$$- \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1.2.3.4}x^{\lambda-3}\left(1+10.\frac{m-1}{5}+15.\frac{m-1}{5}.\frac{m-2}{6}\right)$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)m}{1.2.3.4.5}x^{\lambda-4}\left(1+25.\frac{m-1}{6}+105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}+105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}.\frac{m-3}{8}\right)$$

$$- \frac{\lambda\ldots(\lambda-4)m}{1.\ldots.5.6}x^{\lambda-5}\left(1+56.\frac{m-1}{7}+490.\frac{m-1}{7}.\frac{m-2}{8}+1260.\frac{m-1}{7}..\frac{m-3}{9}\right.$$

$$\left.+945\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-4}{10}\right)$$

$$+ \frac{\lambda\ldots(\lambda-5)m}{1\ldots.6.7}x^{\lambda-6}\left(1+119.\frac{m-1}{8}+1918.\frac{m-1}{8}.\frac{m-2}{9}+9450.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-3}{10}\right.$$

$$\left.+17325.\frac{m-1}{8}\ldots,\frac{m-4}{11}+10395.\frac{m-1}{8}\ldots.\frac{m-5}{12}\right\}$$

etc.

ſubtrahatur hinc primo poteſtas

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda = x^\lambda - \frac{\lambda}{2}\frac{m}{}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2.}\frac{m^2}{4}x^{\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3.}\frac{m^3}{8}x^{\lambda-3}$$
$$+ \frac{\lambda....(\lambda-3)}{1...4.}\frac{m^4}{16}x^{\lambda-4} - \frac{\lambda.....(\lambda-4)}{1.....5.}\frac{m^5}{32}x^{\lambda-5}$$
$$+ \frac{\lambda.....(\lambda-5)}{1.....6.}\frac{m^6}{64}x^{\lambda-6} - \text{etc.}$$

Commode autem hic euenit vt ſit

$$\frac{15}{5.6} = \frac{4}{8};\ \frac{105}{6.7.8} = \frac{5}{16};\ \frac{945}{7.8.9.10} = \frac{6}{32};\ \frac{10395}{8.9.10.11.12} = \frac{7}{64}$$

cuius quidem rei ratio per ſe eſt perſpicua; quamobrem expreſſio ſuperior euoluta ſequentem induit formam

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1.2.3}x^{\lambda-2}.\frac{1}{4} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1.2.3.4}x^{\lambda-3}.\frac{m}{2} + \frac{\lambda....(\lambda-3)m}{1....4.5}x^{\lambda-4}\left(\tfrac{5}{8}m^2 + \tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24}\right)$$
$$- \frac{\lambda.....(\lambda-4)m}{1.....5.6}x^{\lambda-5}\left(\tfrac{5}{8}m^3 + \tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m\right)$$
$$+ \frac{\lambda.....(\lambda-5)m}{1.....6.7}x^{\lambda-6}\left(\tfrac{35}{64}m^4 + \tfrac{35}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36}\right).\ \text{etc.}$$

XVI. In hac expreſſione denuo poteſtas ipſius $x - \frac{m}{2}$ ſcilicet $\frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.3.4}(x-\frac{m}{2})^{\lambda-2}$ contineri deprehenditur qua inde ſeparata expreſſio noſtra erit:

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.3.4}(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-2} + \frac{\lambda....(\lambda-3)m}{1....4.5}x^{\lambda-4}\left(\tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24}\right)$$
$$- \frac{\lambda.....(\lambda-4)m}{1.....5.6}x^{\lambda-5}\left(\tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m\right)$$
$$+ \frac{\lambda.....(\lambda-5)m}{1.....6.7}x^{\lambda-6}\left(\tfrac{35}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36}\right)\text{etc.}$$

in qua adhuc continetur $\frac{\lambda....(\lambda-3)m}{1....4.5}\left(\frac{5}{48}m - \frac{1}{24}\right)(x-\frac{m}{2})^{\lambda-4}$ ac praeterea ſupereſt

$$\frac{\lambda.....(\lambda-5)m}{1.....6.7}x^{\lambda-6}\left(\tfrac{35}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36}\right)$$

vnde

vnde ſine dubio inſuper haec poteſtas accedit:

$$+\frac{\lambda\ldots\ldots(\lambda-5)n}{1\ldots\ldots 6.7}\cdot\frac{35m^2-12m+16}{576}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}.$$

Quocirca aequatio noſtra ita erit comparata:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\cdot\frac{m}{12}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1.2\ldots 4}\cdot\frac{m(5m-2)}{240}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-5)}{1.2\ldots 6}\cdot\frac{m(35m^2-12m+16)}{4032}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}\text{ etc.}$$

XVII. En ergo ſerici noſtrae propoſitae generalis:

$$s=x^{m+\lambda}-\tfrac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda}+\frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+\lambda}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+\lambda}+\text{etc.}$$

eximiam transformationem, quae cum per plures ambages ſit eruta, ac pluribus operationibus admodum intricatis innixa, tantopere abſtruſa videtur, vt eius inueſtigatio directa ingentia ſubſidia in Analyſin ſit allatura. Quo autem facilius hanc transformationem perſcrutari liceat eam hoc modo repraeſentabo, vt ſit

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\,P\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1.2\ldots 4}\,Q\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-5)}{1.2\ldots 6}\,R\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-7)}{1.2\ldots 8}\,S\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-8}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-9)}{1.2\ldots 10}\,T\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-10}$$
$$\text{etc.}$$

pro qua expreſſione hactenus quidem inueni

$$P = \frac{m}{3 \cdot 4}$$

$$Q = \frac{m(5m-2)}{5 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$R = \frac{m(35mm-42m+16)}{6 \cdot 7 \cdot 96}$$

$$S = \frac{m(175m^3-420m^2+404m-144)}{34560}$$

ſed methodus deſideratur harum litterarum valores expedite inueniendi.

XVIII. Imprimis autem hic notaſſe iuuabit, ſeriem noſtram in aliam eſſe transmutatam, quae ſecundum poteſtates formulae $x-\frac{m}{2}$ ita progrediatur, vt earum exponentes ſint λ, $\lambda-2$, $\lambda-4$ etc. binario continuo decreſcentes; tum vero litteras P, Q, R, etc. a ſolo numero m pendere, ita vt neque exponens λ neque quantitas x in eas ingrediatur; praeterea vero coefficientes praefixos ſolum numerum λ implicare, ac legem progreſſionis ex euolutione binomii ortae ſeruare. Hac forma probe obſeruata manifeſtum eſt valores litterarum P, Q, R, S etc. ſeorſim ex ipſa ſerie propoſita vel ex eius transformata §. XV. cuius lex progreſſionis itidem eſt cognita elici poſſe, ſiquidem ponatur $x = \frac{m}{2}$ ſi enim tum capiatur $\lambda = 2$ fit $P = \frac{S}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ poſito autem $\lambda = 4$ fit $Q = \frac{S}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ at poſito $\lambda = 6$ fit $R = \frac{S}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$

etc.

XIX.

XIX. Quodſi ergo hic loco $\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ ſeries ſupra §. XV. inuenta ſubſtituatur, atque in hunc finem breuitatis gratia ponatur:

$\mathfrak{A} = 1$

$\mathfrak{B} = 1 + 3.\frac{m-1}{4}$

$\mathfrak{C} = 1 + 10.\frac{m-1}{5} + 15.\frac{m-1}{5}.\frac{m-2}{6}$

$\mathfrak{D} = 1 + 25.\frac{m-1}{6} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}.\frac{m-3}{8}$

$\mathfrak{E} = 1 + 56.\frac{m-1}{7} + 490.\frac{m-1}{7}.\frac{m-2}{8} + 1260.\frac{m-1}{7}..\frac{m-3}{9}$
$+ 945.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-4}{10}$

$\mathfrak{F} = 1 + 119.\frac{m-1}{8} + 1918.\frac{m-1}{8}.\frac{m-2}{9} + 9450\frac{m-1}{8}..\frac{m-3}{10}$
$+ 17325.\frac{m-1}{8}..\frac{m-4}{11} + 10395.\frac{m-1}{8}..\frac{m-5}{12}$

etc.

adipiſcimur ſequentes valores

$P = \frac{m^2}{2^2} - 2\mathfrak{A}\frac{m}{2}.\frac{m}{2} + \mathfrak{B}\frac{m}{3}$

$Q = \frac{m^4}{2^4} - 4\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^3}{2^3} + 6\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^2}{2^2} - 4\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m}{2} + \mathfrak{D}\frac{m}{5}$

$R = \frac{m^6}{2^6} - 6\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^5}{2^5} + 15\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^4}{2^4} - 20\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m^3}{2^3} + 15\mathfrak{D}.\frac{m}{5}.\frac{m^2}{2^2}$
$- 6\mathfrak{E}\frac{m}{6}.\frac{m}{2} + \mathfrak{F}.\frac{m}{7}$

quem in finem valores illos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. euolui conueniet, vnde prodit

$\mathfrak{A} = 1$

$\mathfrak{B} = \frac{3}{4}m + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(m + \frac{1}{3})$

$\mathfrak{C} = \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{8}m = \frac{1}{8}(mm + m)$

$\mathfrak{D} =$

$\mathfrak{D} = \frac{5}{16}m^3 + \frac{5}{8}m^2 + \frac{5}{48}m - \frac{1}{24} = \frac{5}{16}(m^3 + 2m^2 + \frac{1}{3}m - \frac{2}{15})$

$\mathfrak{E} = \frac{3}{16}m^4 + \frac{5}{8}m^3 + \frac{5}{16}m^2 - \frac{1}{8}m = \frac{6}{32}(m^4 + \frac{10}{3}m^3 + \frac{5}{3}m^2 - \frac{2}{3}m)$

$\mathfrak{F} = \frac{7}{64}m^5 + \frac{35}{64}m^4 + \frac{35}{64}m^3 - \frac{91}{576}m^2 - \frac{7}{96}m + \frac{1}{3}$

seu . . . $\mathfrak{F} = \frac{7}{64}(m^5 + 5m^4 + 5m^3 - \frac{13}{9}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{16}{63})$

hic autem praeterquam in primis terminis nullus ordo perspicitur

XX. Quod vero series transformata secundum potestates quantitatis $x = \frac{m}{2}$ progrediatur, id quidem per solam inductionem agnouimus, verumtamen hoc necessario euenire ita ostendi potest. Quoniam progressio proposita simili modo definit, quo incipit, ita vt vltimi bini termini futuri sint $\mp m(x-m+1)^{m+\lambda} \mp (x-m)^{m+\lambda}$, vbi signa superiora valent si m sit numerus impar, inferiora vero si par; sumamus m esse numerum parem, (eadem enim conclusio producitur si fuerit impar) et ponamus $x - \frac{m}{2} = y$, eritque

$$2s = +(y+\tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y+\tfrac{1}{2}m-1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}(y+\tfrac{1}{2}m-2)^{m+\lambda}$$
$$+(y-\tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y-\tfrac{1}{2}m+1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}(y-\tfrac{1}{2}m+2)^{m+\lambda}$$

et facta euolutione secundum potestates ipsius $y = x - \frac{m}{2}$ reperitur:

$$s = y^{m+\lambda}(1 - \tfrac{m}{1} + \tfrac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \text{etc.})$$
$$+(\tfrac{m+\lambda}{2})y^{m+\lambda-2}((\tfrac{m}{2})^2 - \tfrac{m}{1}(\tfrac{m}{2}-1)^2 + \tfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}(\tfrac{m}{2}-2)^2 - \text{etc.})$$
$$+(\tfrac{m+\lambda}{4})y^{m+\lambda-4}((\tfrac{m}{2})^4 - \tfrac{m}{1}(\tfrac{m}{2}-1)^4 + \tfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}(\tfrac{m}{2}-2)^4 - \text{etc.})$$

etc.

Hae

Hae ſeries autem omnes euaneſcunt, donec perueniatur ad eam in qua exponentes ſunt m, eiusque ſummam nouimus eſſe $= 1.2.3....m$, omiſſis ergo prioribus, quarum ſumma ad nihilum reducitur, obtinebimus:

$$S = \left(\frac{m+\lambda}{m}\right) y^{\lambda}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)^{m} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right) y^{\lambda-2}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)^{m+2} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

ſicque manifeſtum eſt, quod demonſtrare ſuſcepi, ſcilicet hanc ſeriem ſecundum poteſtates $y^{\lambda}, y^{\lambda-2}, y^{\lambda-4}$ etc. deſcendere.

XXI. Tribuamus huic ſeriei ſimilem formam ei quam §. XVII. habuimus, fietque

$$\frac{S}{(\lambda+1)(\lambda+2)....(\lambda+m)} = \frac{y^{\lambda}}{1.2....m}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1.2\,y^{\lambda-2}}{1.2....(m+2)}\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1.2.3.4\,y^{\lambda-4}}{1.2....(m+4)}\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-3)}{1.2....4}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+4} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

vnde valores litterarum P, Q, R etc. nouo modo ita determinare licet

$$P = \frac{1}{3.4...(m+2)}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \text{etc.}\right)$$
$$Q = \frac{1}{5.6...(m+4)}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+4} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+4} + \text{etc.}\right)$$
$$R = \frac{1}{7.8...(m+6)}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+6} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+6} + \text{etc.}\right)$$
$$S = \frac{1}{9.10....(m+8)}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{m+8} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+8} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Hic quidem ſimilium ſerierum ſummatione opus eſt quoniam vero iſtae ſeries ſolum numerum m inuolvunt, noſtra inueſtigatio ad caſum ſimpliciorem perducta eſt cenſenda. Ceterum nunc demum certo agnoſcimus has litteras tantum a numero m pendere.

XXII. Quodſi autem hic litterae m ſucceſſiue tribuamus valores definitos 1. 2. 3. 4. 5. 6 etc. totidem inde valores pro litteris P, Q, R, S etc. conſequemur, quibus cognitis, facile earum formas generales colligere licebit.

Ita pro littera P inuenienda reperiemus

ſi $m =$	0,	1,	2,	3,	4	etc.
$3\,2^2\mathrm{P} =$	0,	1,	2,	3,	4	etc.
diff.		1,	1,	1,	1,	

ita vt hinc ſit $3.2^2\mathrm{P} = m$ et $\mathrm{P} = \frac{m}{2^2.3}$ vt ante.
Porro pro littera Q

ſi $m =$	0,	1,	2,	3,	4,	5, 6
$2^4.3.5\,\mathrm{Q} =$	0,	3,	16,	39,	72,	115, 168
Diff. I.		3,	13,	23,	33,	43, 53
Diff. II.		10,	10,	10,	10,	10

erit ergo $2^4.3.5\,\mathrm{Q} = 3m + 10\frac{m(m-1)}{1.2} = m(5m-2)$, hincque $\mathrm{Q} = \frac{m(5m-2)}{2^4.3.5}$.

Eodem

Eodem modo pro littera R

si	$m =$	0,	1,	2,	3	4,	5 6
$2^6 . 3 . 7$ R $=$		0,	3,	48,	205,	544,	1135, 2048
Diff. I.			3,	45,	157,	339,	591, 913
Diff. II.				42,	112,	182,	252, 322
Diff. III.					70,	70,	70

vnde concluditur $2^6 . 3 . 7 \text{ R} = 3m + 21m(m-1) + \frac{35}{3}m(m-1)(m-2)$

atque $\text{R} = \frac{m(35m^2 - 42m + 16)}{2^6 . 3^2 . 7}$

quos eosdem valores iam supra sumus nacti, hinc igitur eandem operationem ad litteras sequentes accommodemus.

XXIII. Pro littera igitur S habebimus:

si fuerit	$m =$	0,	1,	2,	3,	4,	5, 6
$2^8 . 5 . 9$ S $=$		0,	5,	256,	2013,	7936,	22085, 49920
Diff. I.			5,	251,	1757,	5923,	14149, 27835
Diff. II.				246,	1506,	4166,	8226, 13686
III.					1260,	2660,	4060, 5460
IV.						1400,	1400, 1400

vnde fit $2^8 . 5 . 9 \text{ S} = 5m + 123m(m-1) + 210m(m-1)(m-2) + \frac{175}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)$

et $\text{S} = \frac{m(175m^3 - 420m^2 + 404m - 144)}{2^8 . 3^2 . 5 . 9}$.

Nunc porro pro littera T habebimus:

si fuerit $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$2^{10}.3.11\,T = 0, 3, 512, 7665, 46080, 174255, 499968$

Diff. I. 3, 509, 7153, 38415, 128175, 325713

II. 506, 6644, 31262, 89760, 197538

III. 6138, 24618, 58498, 107778

IV. 18480, 33880, 49280

V. 15400, 15400

vnde fit $2^{10}.3.11\,T = 3m + 253m(m-1) + 1023m(m-1)(m-2) + 770m(m-1)(m-2)(m-3) + \frac{385}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$

et $T = \frac{m(385m^4 - 1540m^3 + 2684m^2 - 2288m + 768)}{2^{10}.9.11}$.

XXIV. Hos nunc valores ita repraesentemus, quo facilius lex progressionis explorari possit:

$P = \frac{1m}{12}$

$Q = \frac{1.7m}{12^2}(m - \frac{2}{3})$

$R = \frac{1.7.5m}{12^3}(m^2 - \frac{6}{5}m + \frac{16}{35})$

$S = \frac{1.7.5.7m}{12^4}(m^3 - \frac{12}{5}m^2 + \frac{404}{175}m - \frac{144}{175})$

$T = \frac{1.3.5.7.9m}{12^5}(m^4 - \frac{20}{5}m^3 + \frac{244}{35}m^2 - \frac{208}{35}m + \frac{768}{385})$

atque hic in primis et secundis terminis lex progressionis ita est manifesta, vt iidem pro omnibus sequentibus litteris tuto assignari possint, in reliquis autem terminis nullam plane legem etiamnum obseruare licet

XXV.

XXV. Pro valore ergo litterae V inueniendo ſtatuamus

$$V = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{12^5}\frac{m}{} (m^5 - \tfrac{30}{5}m^4 + \alpha m^3 - \mathfrak{B} m^2 + \gamma m - \delta).$$

Ex forma autem generali

$$V = \frac{1}{13\cdot 14\cdot \ldots\cdot (m+12)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+12} - m\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+12} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\tfrac{m}{2}-2\right)^{m+12} - \text{etc.}\right)$$

colligimus

ſi ſit fore

$$m=1;\ V = \frac{1}{2^{12}\cdot 13} = \frac{5\cdot 7\cdot 11}{2^{12}\cdot 3^3}(-5+\alpha-\mathfrak{B}+\gamma-\delta)$$

$$m=2;\ V = \frac{1}{7\cdot 13} = \frac{5\cdot 7\cdot 11}{2^{11}\cdot 3^3}(-64+8\alpha-4\mathfrak{B}+2\gamma-\delta)$$

$$m=3;\ V = \frac{597871}{2^{12}\cdot 5\cdot 7\cdot 13} = \frac{5\cdot 7\cdot 11}{2^{12}\cdot 3^2}(-243+27\alpha-9\mathfrak{B}+3\gamma-\delta)$$

$$m=4;\ V = \frac{5461}{2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13} = \frac{5\cdot 7\cdot 11}{2^{10}\cdot 3^3}(-512+64\alpha-16\mathfrak{B}+4\gamma-\delta)$$

$$m=5;\ V = \frac{5839647}{2^{12}\cdot 7\cdot 13} = \frac{25\cdot 7\cdot 11}{2^{12}\cdot 3^3}(-625+125\alpha-25\mathfrak{B}+5\gamma-\delta)$$

$$m=6;\ V = \frac{6047}{2^2\cdot 3\cdot 13} = \frac{5\cdot 7\cdot 11}{2^{11}\cdot 3^2}(-0+216\alpha-36\mathfrak{B}+6\gamma-\delta).$$

Hinc ergo ſequentes formemus aequationes:

$$\alpha - \mathfrak{B} + \gamma - \delta = \frac{27}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13} + 5$$

$$8\alpha - 4\mathfrak{B} + 2\gamma - \delta = \frac{27\cdot 2048}{5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} + 64$$

$$27\alpha - 9\mathfrak{B} + 3\gamma - \delta = \frac{9\cdot 597871}{5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} + 243$$

$$64\alpha - 16\mathfrak{B} + 4\gamma - \delta = \frac{27\cdot 256\cdot 5461}{5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} + 512$$

$$125\alpha - 25\mathfrak{B} + 5\gamma - \delta = \frac{27\cdot 5838647}{5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} + 625$$

$$216\alpha - 36\mathfrak{B} + 6\gamma - \delta = \frac{3\cdot 517\cdot 63047}{5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} + 0.$$

Differentiae nunc primae ita se habebunt

$$7\alpha - 3\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59$$
$$19\alpha - 5\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 43627}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 179$$
$$37\alpha - 7\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 276629}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 269$$
$$61\alpha - 9\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 341587}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 113$$
$$91\alpha - 11\beta + \gamma = \frac{3 \cdot 8373269}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} - 625$$

secundae vero per 2 diuisae dant

$$6\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} + 60$$
$$9\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 1513}{5^2 \cdot 7} + 45$$
$$12\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 4858}{5^2 \cdot 7} - 78$$
$$15\alpha - \beta = \frac{3 \cdot 34409}{5^2 \cdot 7} - 369.$$

Tertiae tandem differentiae per 3 diuisae praebent

$$\alpha = \frac{3 \cdot 249}{5 \cdot 7} - 5 = \frac{3 \cdot 669}{5 \cdot 7} - 41 = \frac{3967}{5 \cdot 7} - 97$$

quae tres aequationes praebent eundem valorem

$$\alpha = \frac{572}{5 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 13}{5 \cdot 7}.$$

ex quo valore iam reliqui definiuntur sequenti modo

$$\beta = \frac{6 \cdot 572}{5 \cdot 7} - \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{12 \cdot 1229}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{4248}{175} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 59}{175}$$
$$\gamma = 3\beta - 7\alpha + \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59 = \frac{255968}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11}$$
$$\delta = \alpha - \beta + \gamma - \frac{27}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} - 5 = \frac{1061376}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

XXVI.

XXVI. Conſpectui ergo ſimul exponamus litterarum P, Q, R, etc. valores hactenus inuentos

$$P = \frac{1\,m}{12}$$

$$Q = \frac{1\cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,m}{12^3}\left(m^2 - \frac{6}{5}m + \frac{16}{35}\right)$$

$$S = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\,m}{12^4}\left(m^3 - \frac{12}{5}m^2 + \frac{404}{175}m - \frac{144}{175}\right)$$

$$T = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\,m}{12^5}\left(m^4 - \frac{20}{5}m^3 + \frac{244}{35}m^2 - \frac{208}{35}m + \frac{768}{385}\right)$$

$$V = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\,m}{12^6}\left(m^5 - \frac{30}{5}m^4 + \frac{572}{35}m^3 - \frac{4248}{175}m^2 + \frac{255968}{13475}m - \frac{10613760}{1755175}\right)$$

Ex prioribus terminis concludo poteſtates hic occurrere, quibus ſeorſim poſitis ordo facilius perſpici poſſe videtur:

$$P = \frac{1\,m}{12}$$

$$Q = \frac{1\cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)^1$$

$$R = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

$$S = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\,m}{12^4}\left(\left(m - \frac{4}{5}\right)^3 + \frac{4\cdot 17}{175}m - \frac{16\cdot 17}{5\cdot 175}\right)$$

$$T = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\,m}{12^5}\left(\left(m - \frac{5}{5}\right)^4 + \frac{2\cdot 17}{35}m^2 - \frac{4\cdot 17}{35}m + \frac{383}{385}\right)$$

$$V = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\,m}{12^6}\left(\left(m - \frac{6}{5}\right)^5 + \frac{4\cdot 17}{35}m^3 - \frac{72\cdot 17}{176}m^2 + \frac{5811296}{5^3\cdot 7^2\cdot 11}m - \frac{7318556\,8}{5^5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13^2}\right)$$

quin etiam proxime ſequentes termini hoc modo contrahi poſſint vt prodeat

$$P = \frac{1\,m}{12}\cdot 1$$

$$Q = \frac{1\cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

S=

$$S = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\, m}{12^4}\left((m-\tfrac{4}{5})^3 + \frac{4\cdot 17}{175}(m-\tfrac{4}{5})\right)$$

$$T = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\, m}{12^5}\left((m-\tfrac{5}{5})^4 + \frac{10\cdot 17}{175}(m-\tfrac{5}{5})^2 + \frac{9}{385}\right)$$

$$V = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\, m}{12^6}\left((m-\tfrac{6}{5})^5 + \frac{20\cdot 17}{175}(m-\tfrac{6}{5})^3 + \frac{15808}{5^3\cdot 7^2\cdot 11}m - \frac{467128}{5^5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}\right).$$

Niſi vltimum valorem euoluiſſemus, videretur omnes has expreſſiones ad huiusmodi poteſtates reduci, quod autem nunc ſecus euenire agnoſcimus. Quocirca ex alio fonte in legem harum litterarum inquiri oportebit.

XXVIII. Singulos igitur terminos harum formarum potius euolutos repraeſentemus:

$$P = \frac{m}{4\cdot 3}$$

$$Q = \frac{m\,m}{16\cdot 3} - \frac{m}{8\cdot 3\cdot 5}$$

$$R = \frac{5\,m^3}{64\cdot 9} - \frac{m\,m}{32\cdot 3} + \frac{m}{4\cdot 9\cdot 7}$$

$$S = \frac{5\cdot 7\,m^4}{256\cdot 27} - \frac{7\,m^3}{64\cdot 9} + \frac{101\,m^2}{64\cdot 27\cdot 5} - \frac{m}{16\cdot 3\cdot 5}$$

$$T = \frac{5\cdot 7\,m^5}{1024\cdot 9} - \frac{5\cdot 7\,m^4}{256\cdot 9} + \frac{61\,m^3}{256\cdot 9} - \frac{13\,m^2}{64\cdot 9} + \frac{m}{4\cdot 3\cdot 11}$$

$$V = \frac{5\cdot 7\cdot 11\,m^6}{4096\cdot 27} - \frac{5\cdot 7\cdot 11\,m^5}{2048\cdot 9} + \frac{1573\,m^4}{1024\cdot 27} - \frac{649\,m^3}{512\cdot 3\cdot 5} + \frac{7900\,m^2}{128\cdot 27\cdot 5\cdot 7} - \frac{691\,m}{8\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$$

vbi quidem inter terminos primos et ſecundos iam ordinem obſeruauimus poſtremi autem omni ordine deſtituti videbantur, quoad valore etiam litterae V euoluto numerus 691 criterium nobis ſuppeditauerit, in his poſtremis terminis numeros *Bernoullianos* implicari.

Deſi-

Designemus ergo numeros *Bernoullianos* litteris α, $\mathfrak{G}$, γ, δ etc. vt sit

$$\alpha = \tfrac{1}{2};\ \mathfrak{G} = \tfrac{1}{6};\ \gamma = \tfrac{1}{6};\ \delta = \tfrac{3}{10};\ \varepsilon = \tfrac{5}{6};\ \zeta = \tfrac{691}{2730} \text{ etc.}$$

et inter eos notemus hanc legem progressionis:

$$\alpha = \tfrac{1}{2^1}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{5.4\,\alpha}{2^2.1.2.3} - \tfrac{2}{2^3}$$

$$\gamma = \frac{7.6\,\mathfrak{G}}{2^2.1.2.3} - \frac{7.6.5.4\,\alpha}{2^4.1.2\ldots5} + \tfrac{5}{2^5}$$

$$\delta = \frac{9.8\,\gamma}{2^2.1.2.3} - \frac{9.8.7.6.\mathfrak{G}}{2^4.1.2\ldots5} + \frac{9.\ldots.4\,\alpha}{2^6.1.\ldots7} - \tfrac{4}{2^7}$$

$$\varepsilon = \frac{11.10\,\delta}{2^2.1.2.3} - \frac{11.\ldots.8\,\gamma}{2^4.1.\ldots5} + \frac{11.\ldots.6\,\mathfrak{G}}{2^6.1.\ldots7} - \frac{11.\ldots.4\,\alpha}{2^8.1.\ldots9} - \tfrac{5}{2^8}$$

$$\zeta = \frac{13.12\,\varepsilon}{2^2.1.2.3} - \frac{13.\ldots.10\,\delta}{2^4.1.\ldots5} + \frac{13.\ldots.8\,\gamma}{2^6.1.\ldots7} - \frac{13.\ldots.6\,\mathfrak{G}}{2^8.1.\ldots9} + \frac{13.\ldots.4\,\alpha}{2^{10}.1.\ldots11} - \tfrac{6}{2^{11}}.$$

etc.

Ac postremi litterarum P, Q, R, S etc. termini ita concinne referri poterunt

$$\frac{\alpha\,m}{2.3};\ \frac{\mathfrak{G}\,m}{4.5};\ \frac{\gamma\,m}{6.7};\ \frac{\delta\,m}{8.9};\ \frac{\varepsilon\,m}{10.11};\ \frac{\zeta\,m}{12.13}.$$

XXIX. Quo autem nunc etiam inuestigemus quomodo ipsae litterae P, Q, R, S etc. progrediantur, a qualibet eiusmodi multiplum praecedentis auferamus, vt primi termini tollantur, et quia has litteras praecedit littera $O = 1$, habebimus:

$$P - \tfrac{m}{12} O = 0$$

$$Q - \tfrac{3\,m}{12} P = -\frac{\mathfrak{G}\,m}{4.5}$$

$$R - \tfrac{5\,m}{12} Q = -\frac{m\,m}{16.9} + \frac{\gamma\,m}{6.7} = -\tfrac{m}{12} P + \frac{\gamma\,m}{6.7}$$

$$S - \tfrac{7\,m}{12} R = -\frac{7\,m^3}{128.9} + \frac{3\,m^2}{16.5} - \frac{\delta\,m}{8.9}$$

$$T-\frac{9\,m}{12}S=-\frac{7\,m^4}{128\cdot 9}+\frac{17\,m^3}{64\cdot 3\cdot 5}-\frac{7\,m^2}{8\cdot 9\cdot 5}+\frac{\varepsilon\,m}{10\cdot 11}$$

$$V-\frac{11\,m}{12}T=-\frac{5\cdot 7\cdot 11\,m^5}{2048\cdot 27}+\frac{451\,m^4}{512\cdot 27}-\frac{121\,m^3}{2048\cdot 27\cdot 5}+\frac{7159\,m^2}{128\cdot 27\cdot 5\cdot 7}-\frac{\zeta\,m}{12\cdot 13}$$

Quodsi iam has formas penitius perpendamus, ac breuitatis gratia ponamus:

$$\frac{\alpha\,m}{2\cdot 3}=\alpha';\ \frac{\beta\,m}{4\cdot 5}=\beta';\ \frac{\gamma\,m}{6\cdot 7}=\gamma';\ \frac{\delta\,m}{8\cdot 9}=\delta';\ \text{etc.}$$

sequentem legem satis simplicem in nostris litteris P, Q, R etc. deprehendemus:

$$P-\alpha'=0$$

$$Q-\tfrac{3}{1}\alpha'P+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}\beta'=0$$

$$R-\tfrac{5}{1}\alpha'Q+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\beta'P-\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\gamma'=0$$

$$S-\tfrac{7}{1}\alpha'R+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\beta'Q-\frac{7\cdot 6\cdots 3}{1\cdot 2\cdots 5}\gamma'P+\frac{7\cdot 6\cdots 1}{1\cdot 2\cdots 7}\delta'=0$$

$$T-\tfrac{9}{1}\alpha'S+\frac{9\cdots 7}{1\cdots 3}\beta'R-\frac{9\cdots 5}{1\cdots 5}\gamma'Q+\frac{9\cdots 3}{1\cdots 7}\delta'P-\frac{9\cdots 1}{1\cdots 9}\varepsilon'=0$$

$$V-\tfrac{11}{1}\alpha'T+\frac{11\cdots 9}{1\cdots 3}\beta'S-\frac{11\cdots 7}{1\cdots 5}\gamma'R+\frac{11\cdots 5}{1\cdots 7}\delta'Q-\frac{11\cdots 3}{1\cdots 9}\varepsilon'P+\frac{11\cdots 1}{1\cdots 11}\zeta'=0$$

etc.

hae autem nouae litterae α', β', γ', δ' etc. ex praecedentibus hanc sequentur legem:

$$\alpha'-\frac{m}{2^2\cdot 3}=0$$

$$\beta'-\frac{3\cdot 2}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\alpha'^2+\frac{m}{2^4\cdot 5}=0$$

$$\gamma'-\frac{5\cdot 4}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\beta'+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2^4\cdot 1\cdots 5}\alpha'-\frac{m}{2^6\cdot 7}=0$$

$$\delta'-\frac{7\cdot 6}{2^2\cdot 1\cdots 3}\gamma'+\frac{7\cdots 4}{2^4\cdot 1\cdots 5}\beta'-\frac{7\cdots 2}{2^6\cdot 1\cdots 7}\alpha'+\frac{m}{2^8\cdot 9}=0$$

$$\varepsilon'-\frac{9\cdot 8}{2^2\cdot 1\cdots 3}\delta'+\frac{9\cdots 6}{2^4\cdot 1\cdots 5}\gamma'-\frac{9\cdots 4}{2^6\cdot 1\cdots 7}\beta'+\frac{9\cdots 2}{2^8\cdot 1\cdots 9}\alpha'-\frac{m}{2^{10}\cdot 11}=0$$

etc.

Quo-

Quocirca nunc quidem quaeſtionem circa ſeriem illam ſingularem, quam hactenus ſum contemplatus, perfecte ſolutam dediſſe ſum cenſendus, vnde ſolutionem hic ſuccincte ſum propoſiturus.

Problema.

Propoſita hac progreſſione indefinita:

$$s = x^{m+\lambda} - \frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x-2)^{m+\lambda} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

eius ſummam aſſignare, ſiquidem λ fuerit numerus quicunque integer poſitiuus.

Solutio.

Denotent litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. numeros *Bernoullianos*, ita vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2};\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{D} = \tfrac{3}{10};\ \mathfrak{E} = \tfrac{5}{6};$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{691}{210};\ \mathfrak{G} = \tfrac{35}{2};\ \mathfrak{H} = \tfrac{3617}{30};\ \mathfrak{I} = \tfrac{43867}{42};$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1222277}{110};\ \mathfrak{L} = \frac{854513}{6}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1181820455}{546};\ \mathfrak{N} = \frac{76977927}{2}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{30};\ \mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{462}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{848025314533 87}{170};\ \mathfrak{R} = \frac{9021907504 2845}{6}$$

etc.

Quos numeros ita progredi obſeruaui vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{\mathfrak{A}^2}{3}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{6}{2}\cdot\tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{3}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{8}{2}\cdot\tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{3} + \tfrac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{\mathfrak{B}^2}{5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{10}{2}\cdot\tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{3} + \tfrac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{5}$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{12}{2}\cdot\tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{3} + \tfrac{12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{2\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{5} + \tfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\tfrac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{7}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{14}{2}\cdot\tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{3} + \tfrac{14\cdot 13\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{2\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{5} + \tfrac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\tfrac{2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{7}$$

etc.

Hinc iam quaerantur numeri P, Q, R, S etc. vt ſit

$$P = \tfrac{1\,\mathfrak{A}\,m}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$Q = \tfrac{3\,\mathfrak{A}\,m}{1\cdot 2\cdot 3}P - \tfrac{3\cdot 2\cdot 1\,\mathfrak{B}\,m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$R = \tfrac{5\,\mathfrak{A}\,m}{1\cdot 2\cdot 3}Q - \tfrac{5\cdot 4\cdot 3\,\mathfrak{B}\,m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}P + \tfrac{5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1\,\mathfrak{C}\,m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 7}$$

$$S = \tfrac{7\,\mathfrak{A}\,m}{1\cdot 2\cdot 3}R - \tfrac{7\cdot 6\cdot 5\,\mathfrak{B}\,m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 5}Q + \tfrac{7\cdot\ldots\cdot 3\,\mathfrak{C}\,m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 7}P - \tfrac{7\cdot\ldots\cdot 1\,\mathfrak{D}\,m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9}$$

vbi lex progreſſionis etiam eſt perſpicua.

Hac ſerie inuenta ſumma quaeſita s ita exprimetur:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)} = (x-\tfrac{m}{2})^{\lambda} + \tfrac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}P(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-2} + \tfrac{\lambda\ldots(\lambda-3)}{1\cdot\ldots\cdot 4}Q(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-4} + \tfrac{\lambda\ldots(\lambda-5)}{1\cdot\ldots\cdot 6}R(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-6} + \tfrac{\lambda\ldots(\lambda-7)}{1\cdot\ldots\cdot 8}S(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-8}$$

etc.

vbi

vbi notetur ſi forte numerus m non ſit integer valorem producti $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)$ per artificia alibi expoſita definiri poſſe.

Corollarium 1.

Si loco numerorum *Bernoullianorum* numeros iis cognatos, quibus ad poteſtatum reciprocarum ſummas ſum vſus, introducere velimus, hosque numeros litteris A, B, C, D etc. deſignemus, vt ſit $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{90}$, $C=\frac{1}{945}$, $D=\frac{1}{9450}$; $E=\frac{1}{93555}$ quoniam hi numeri a prioribus ita pendent vt ſit

$$\mathfrak{A}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3}A;\quad \mathfrak{B}=\frac{1\cdot\ldots\cdot 5}{2^5}B;\quad \mathfrak{C}=\frac{1\cdot\ldots\cdot 7}{2^7}C;\ \text{etc.}$$

inter ſe autem ita connectuntur vt ſit:

$$5B=2A^2;\ 7C=4AB;\ 9D=4AC+2BB;$$

$$11E=4AD+4BC;\ 13F=4AE+4BD+2CC\ \text{etc.}$$

Tum ex his numeris litterae P, Q, R, S etc. ita determinabuntur:

$$P=\frac{1Am}{2}$$

$$Q=\frac{3Am}{2}P-\frac{3\cdot 2\cdot 1Bm}{2^3}$$

$$R=\frac{5Am}{2}Q-\frac{5\cdot 4\cdot 3Bm}{2^3}P+\frac{5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1Cm}{2^5}$$

$$S=\frac{7Am}{2}R-\frac{7\cdot 6\cdot 5Bm}{2^3}Q+\frac{7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 3Dm}{2^5}P-\frac{7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1Em}{2^7}$$

etc.

Corollarium 2.

Si pro variis valoribus numeri λ ſummam progreſſionis propoſito hoc ſignandi modo $\int(\lambda)$ indicemus, ac iam loco λ ſucceſſiue ſcribamus numeros $0, 1, 2, 3, 4$ etc. pro his caſibus ſummae $\int(0)$, $\int(1)$, $\int(2)$, $\int(3)$ etc. ſequenti modo exprimentur ponendo breuitatis gratia $x - \frac{m}{2} = y$:

$$\frac{\int(0)}{1.2\ldots m} = 1$$

$$\frac{\int(1)}{2.3\ldots(m+1)} = y$$

$$\frac{\int(2)}{3.4\ldots(m+2)} = y^2 + P$$

$$\frac{\int(3)}{4.5\ldots(m+3)} = y^3 + 3Py$$

$$\frac{\int(4)}{5.6\ldots(m+4)} = y^4 + 6Py^2 + Q$$

$$\frac{\int(5)}{6.7\ldots(m+5)} = y^5 + 10Py^3 + 5Qy$$

$$\frac{\int(6)}{7.8\ldots(m+6)} = y^6 + 15Py^4 + 15Qy^2 + R$$

etc.

Corollarium 3.

Hinc ergo iſtae ſummae ſequenti modo ſingulae ex antecedentibus definiri poſſunt

$$\int(1) = \frac{m+1}{1} y \int(0)$$

$$\int(2) = \frac{m+2}{2} y \int(1) + \frac{(m+2)(m+1)}{2.2} mA\int(0)$$

$$\int(3) = \frac{m+3}{3} y \int(2) + \frac{(m+3)(m+2)}{2.3} mA\int(1)$$

$\int(4)$

$$\int(4)=\tfrac{m+4}{4}y\int(3)+\tfrac{(m+4)(m+3)}{2.\ 4}m\,\mathrm{A}\int(2)-\tfrac{(m+4)\ldots(m+1)}{2^3.\ 4}m\,\mathrm{B}\int(0)$$

$$\int(5)=\tfrac{m+5}{5}y\int(4)+\tfrac{(m+5)(m+4)}{2.\ 5}m\,\mathrm{A}\int(3)-\tfrac{(m+5)\ldots(m+2)}{2^3.\ 5}m\,\mathrm{B}\int(1)$$

$$\int(6)=\tfrac{m+6}{6}y\int(5)+\tfrac{(m+6)(m+5)}{2.\ 6}m\mathrm{A}\int(4)-\tfrac{(m+6)\ldots(m+3)}{2^3.\ 6}m\mathrm{B}\int(2)+\tfrac{(m+6)\ldots(m+1)}{2^5.\ 6}m\mathrm{C}\int(0)$$

$$\int(7)=\tfrac{m+7}{7}y\int(6)+\tfrac{(m+7)(m+6)}{2.\ 7}m\mathrm{A}\int(5)-\tfrac{(m+7)\ldots(m+4)}{2^3.\ 7}m\mathrm{B}\int(3)+\tfrac{(m+7)\ldots(m+2)}{2^5.\ 7}m\mathrm{C}\int(1)$$

$$\int(8)=\tfrac{m+8}{8}y\int(7)+\tfrac{(m+8)(m+7)}{2.\ 8}m\mathrm{A}\int(6)-\tfrac{(m+8)\ldots(m+5)}{2^3.\ 8}m\,\mathrm{B}\int(4)+\tfrac{(m+8)\ldots(m+2)}{2^5.\ 8}m\mathrm{C}\int(2)$$
$$-\tfrac{(m+8)\ldots(m+1)}{2^7.\ 8}m\,\mathrm{D}\int(0)$$

quae lex progreſſionis inſpicienti mox fit manifeſta.

Concluſio.

Nunc haud multo difficilius erit hoc negotium longe generalius expedire, ita vt, ſi $\Phi:x$ denotet functionem quamcunque ipſius x ſummam huius ſeriei

$$s=\Phi:x-m\Phi.(x-1)+\tfrac{m(m-1)}{1.\ 2}\Phi:(x-2)-\tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\Phi:(x-3)$$

aſſignare queamus. Perſpicuum enim eſt hanc formam, differentiam ordinis m exhibere iſtius progreſſionis

$$\Phi:x;\ \Phi:(x-1);\ \Phi:(x-2);\ \Phi:(x-3)\ \text{etc.}$$

Ex iis enim quae in Inſtitutionibus Calculi Differentialis pag. 343. in medium attuli, ſi ponamus $\Phi:x=y$, colligitur differentias ſingulorum ordinum eſſe:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} - \frac{ddy}{2dx^2} + \frac{d^3y}{2.3.dx^3} - \frac{d^4y}{2.3.4dx^4} + \frac{d^5y}{2\ldots5dx^5} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3d^3y}{3dx^3} + \frac{7d^4y}{3.4dx^4} - \frac{15d^5y}{3.4.5dx^5} + \frac{31d^6y}{3\ldots6dx^6} - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{6d^4y}{4dx^4} + \frac{25d^5y}{4.5.dx^5} - \frac{90d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301d^7y}{4\ldots7dx^7} - \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{10d^5y}{5dx^5} + \frac{65d^6y}{5.6dx^6} - \frac{350d^7y}{5.6.7dx^7} + \frac{1701d^8y}{5\ldots8dx^8} - \text{etc.}$$

etc.

qui coefficientes cum sint illi ipsi, quos supra §. IV habuimus, eodem modo intelligemus differentiam ordinis m seu $\Delta^m y$, hoc est ipsam summam seriei propositae fore

$$s = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{A^1 d^{m+1} y}{(m+1)dx^{m+1}} + \frac{B^1 d^{m+2} y}{(m+1)(m+2)dx^{m+2}} - \frac{C^1 d^{m+3} y}{(m+1)\ldots(m+3)dx^{m+3}} + \text{etc.}$$

quos coefficientes A^1, B^1, C^1 etc. supra §. 13. determinaui. Quocirca erit

$$\frac{A^1}{m+1} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{B^1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m}{1.2.3} + \frac{3m(m-1)}{1.2.3.4}$$

$$\frac{C^1}{(m+1)\ldots(m+3)} = \frac{m}{1.2.3.4} + \frac{10m(m-1)}{1.2\ldots5} + \frac{15m(m-1)(m-2)}{1.2\ldots6}$$

$$\frac{D^1}{(m+1)\ldots(m+4)} = \frac{m}{1.2\ldots5} + \frac{25m(m-1)}{1.2\ldots6} + \frac{105m(m-1)(m-2)}{1.2\ldots7} + \frac{105m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2\ldots8}$$

etc.

Quodsi iam nunc ponamus $\Phi : (x - \frac{m}{2}) = v$, ita vt' v oriatur ex y, si loco x scribatur $x - \frac{m}{2}$, erit vtique

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{m d^{m+1} y}{2dx^{m+1}} + \frac{m^2 d^{m+2} y}{2.4dx^{m+2}} - \text{etc.}$$

quae

quae aequatio ſi inde ſubtrahatur, calculus idem prorſus erit inſtituendus, quem ſupra expediuimus. Vnde introducendo easdem litteras P, Q, R, S etc. quas ſupra definiuimus, obtinebimus ſequentem ſummae s valorem:

$$s = \frac{d^m v}{dx^m} + \frac{P d^{m+2} v}{1.2\, dx^{m+2}} + \frac{Q d^{m+4} v}{1.2.4\, dx^{m+4}} + \frac{R d^{m+6} v}{1.2\ldots 6\, dx^{m+6}} + \frac{S d^{m+8} v}{1.2\ldots 8\, dx^{m+8}} + \text{etc.}$$

atque hinc ſi ſumatur $y = \Phi : x = x^{m+\lambda}$ et $v = (x - \frac{m}{2})^{m+\lambda}$ manifeſto eadem ſummatio ſequitur quam ante eruimus, ſicque totum negotium redit ad litteras P, Q, R, S etc. quarum indolem ex numeris *Bernoullianis* ſupra deriuaui.

Hinc ſtatim liquet, quod ante minus apparebat, ſi in functione y vel v numerus dimenſionum minor fuerit quam exponens m, quem quidem numerum integrum poſitiuum eſſe oportet, tum omnia differentialia ordinis m et ſuperiorum in nihilum abire, foreque ſummam $s = 0$.

Deinde hinc etiam planior patet via ad valores litterarum P, Q, R, S etc. inueniendos. Cum enim poſito

$$s = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{\alpha d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + \frac{\beta d^{m+2} y}{dx^{m+2}} - \frac{\gamma d^{m+3} y}{dx^{m+3}} + \text{etc.}$$

ſit $\alpha = \frac{m}{1.2}$

$$\mathfrak{G} = \frac{m}{1.2.3} + \frac{3m(m-1)}{1.2.3.4}$$

$$\gamma = \frac{m}{1\ldots4} + \frac{10m(m-1)}{1\ldots5} + \frac{15m\ldots(m-2)}{1\ldots6}$$

$$\delta = \frac{m}{1\ldots5} + \frac{25m(m-1)}{1\ldots6} + \frac{105m\ldots(m-2)}{1\ldots7} + \frac{105m\ldots(m-3)}{1\ldots8}$$

etc.

functio autem y ex functione $v = \Phi : (x - \frac{m}{2})$ naſcatur ſi in hac loco x ſcribatur $x + \frac{m}{2}$ erit in genere

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n v}{dx^n} + \frac{m}{2}\cdot\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \frac{m^2}{2.4}\cdot\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + \frac{m^3}{2.4.6}\cdot\frac{d^{n+3}v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

vnde ſi loco differentialium ipſius y, haec differentialia ipſius v ſubſtituantur, fiet

$$s = \frac{d^n v}{dx^n} + (\tfrac{m}{2} - \alpha)\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + (\tfrac{m^2}{2.4} - \tfrac{m}{2}\alpha + \mathfrak{G})\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}}$$
$$+ (\tfrac{m^3}{2.4.6} - \tfrac{m^2}{2.4}\alpha + \tfrac{m}{2}\mathfrak{G} - \gamma)\frac{d^{n+3}v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

ſicque habebimus:

$$\frac{m}{2} - \alpha = 0$$

$$\frac{m^2}{2.4} - \frac{m}{2}\alpha + \mathfrak{G} = \frac{P}{1.2}$$

$$\frac{m^3}{2.4.6} - \frac{m^2}{2.4}\alpha + \frac{m}{2}\mathfrak{G} - \gamma = 0$$

$$\frac{m^4}{2.4.6.8} - \frac{m^3}{2.4.6}\alpha + \frac{m^2}{2.4}\mathfrak{G} - \frac{m}{2}\gamma + \delta = \frac{Q}{1.2.3.4}$$

$$\frac{m^5}{2.4.6.8.10} - \frac{m^4}{2.4.6.8}\alpha + \frac{m^3}{2.4.6}\mathfrak{G} - \frac{m^2}{2.4}\gamma + \frac{m}{2}\delta - \varepsilon = 0$$

etc.

facile enim perſpicitur has expreſſiones alternatim euaneſcere debere.

QVO-

QVOMODO NVMERI PRAEMAGNI SINT EXPLORANDI, VTRVM SINT PRIMI, NEC NE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Ante omnia monendum eſt, me hic non eiusmodi methodum polliceri, cuius ope omnes omnino numeri, cuiuscunque ſint generis, examinari queant, vtrum ſint primi nec ne? Huiusmodi enim methodum vix aliam dari poſſe exiſtimo, niſi quae ad regulam redeat vulgarem, qua diuiſio per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores eſt tentanda, quae operatio ſane, ſi numeri ſaltem mediocriter magni proponantur, nimis eſt moleſta, quam vt ſuſcipi queat. Quae igitur hic in medium afferre conſtitui, ad certum tantum numerorum genus ſunt reſtringenda, pro quo ſcilicet hoc examen, vtrum ſint primi nec ne? citra laborem tam operoſum inſtitui queat. Cum enim numerorum primorum natura adhuc maxime ſit abſcondita, quicquid in hoc negotio praeſtare licuerit, etiamſi alias arctiſſimis limitibus ſit circumſcriptum, vſu neutiquam deſtitui eſt cenſendum.

2. Numeros ergo tantum in hac forma $4n+1$ contentos ſum contemplaturus, de quibus equidem poſt Fermatium demonſtraui, ſi huiusmodi numerus fuerit primus, tum eum ſemper eſſe ſummam duorum quadratorum, idque vnico modo. Vnde propoſito numero quocunque huius formae $4n+1$, examen vtrum ſit primus nec ne? hoc modo inſtituetur. Ab eo ſucceſſiue omnes numeri quadrati ipſo minores auferantur, eaque notentur reſidua, quae pariter ſint numeri quadrati; atque ſi vnico modo numerus propoſitus $4n+1$ in forma $aa+bb$ contineri deprehendatur, id certum erit criterium numerum propoſitum eſſe primum. Sin autem vel prorſus non in ea forma contineatur, vel plus vno modo, tum certe non erit primus; priori quidem caſu quo numerus $4n+1$ non eſt ſumma duorum quadratorum plus concludere non licet, quam eum non eſſe primum neque inde eius diuiſores innoteſcunt, ſin autem plus vno modo fuerit duorum quadratorum ſumma veluti $4n+1=aa+bb=cc+dd$, tum hinc quaerantur eiusmodi bini numeri p et q vt ſit $\frac{p}{q}=\frac{a\pm c}{b\mp d}$ vel $\frac{p}{q}=\frac{a\pm d}{b\mp c}$, ac numeri $4n+1$ et $pp+qq$ certo habebunt diuiſorem communem, qui ergo facile aſſignatur.

3. Propoſito itaque huiusmodi numero $4n+1$ operationem ita inſtitui conuenit, vt ab eo continuo numeri quadrati ſubtrahantur, eaque reſidua tantum notentur, quae etiam ſint numeri quadrati;

vbi

vbi quidem ſtatim apparet, hanc ſubtractionem non vltra quadrata ſemiſſi minora continuari opus eſſe. Si enim fuerit $4n+1=aa+bb$, horum quadratorum alterum certe erit minus ſemiſſe $\frac{4n+1}{2}$. Vel cum horum binorum quadratorum alterum neceſſario ſit par, alterum impar, ſufficiet vel paria tantum, vel imparia quadrata ipſo numero propoſito minora ſubtrahi, quo pacto multitudo quadratorum ſubtrahendorum haud mediocriter imminuitur. Cum autem numerus omnium quadratorum ipſo numero propoſito minorum ſit $=V(4n+1)$, eorum autem quae eius ſemiſſe ſunt minora $=V\frac{4n+1}{2}$; erit quadratorum ſemiſſe maiorum numerus $=(1-\frac{1}{V2})V4n+1)$, $=\frac{5}{17}V(4n+1)$ proxime; quae quoniam etiam ſubtrahi ſufficit, hoc modo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur.

4. Maxime ergo expedire videtur hanc operationem ita inſtitui, vt a quadrato maximo infra numerum propoſitum $4n+1$ initium capiatur, indeque quadrata continuo minora ſubtrahantur, donec ad quadrata ſemiſſi minora perueniatur. Veluti ſi numerus propoſitus ſit 101, ſufficiet inde haec tria quadrata 100, 81, 64 ſubtraxiſſe, quia ſequens 49 iam foret ſemiſſi $50\frac{1}{2}$ minus, hoc modo cum inter tria reſidua 1, 20, 37 vnicum occurrat quadratum 1, hoc certum eſt ſignum, numerum 101 eſſe primum. Verumtamen ſi numerus propoſitus $4n+1$ fuerit praemagnus, etiam hae operationes

nimis multiplicantur; ex quo in id potiſſimum erit incumbendum, vt harum ſubtractionum numerus imminuatur, quod fiet ſi eae excludantur, quae ad talia reſidua perducunt, quae a quadratorum natura abhorreant, cuiusmodi ſunt reſidua in his formis contenta: $3m+2$; $5m+2$; $5m+3$; $8m+5$ etc. formae enim $8m+3$ et $8m+7$ ob indolem numeri propoſiti $4n+1$ nunquam occurrunt.

5. Dantur autem certae numerorum formae $4n+1$ ſpecies vnde plurima quadrata inde ſubtrahenda excluduntur. Veluti ſi ſit $4n+1=3m+2$, ac ponatur hic numerus $=xx+yy$, vterque numerus x et y in forma $3p\pm 1$ contineatur neceſſe eſt, ita vt numeri formae $3p$ excludantur, ſimili modo ſi ſit $4n+1=5m+2$, vtrumque numerum x et y in forma $5p\pm 1$ contineri oportet, et ſi $4n+1=5m+3$ in forma $5p\pm 2$. Denique ſi $8m+5=xx+yy$ numerorum quidem x et y alter eſt impar alter par, hic vero adeo impariter par ſeu formae $4p+2$. Quod ſi ergo ſimul fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+2$$

numeros x et y ſimul in his duabus formis $3p\pm 1$ et $5p\pm 1$ contineri oportet, vnde eorum forma concluditur:

$$x \text{ vel } y = 15p\pm(1,4).$$

At ſi fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+3$$

forma

forma numerorum x et y eſt et $3p \pm 1$, et $5p \pm 2$, quae duplex forma in hanc vnam contrahitur

$$x \text{ vel } y = 15p \pm (2, 7).$$

6. Quoniam hoc modo duae tertiae partes omnium numerorum, quos tentari oporteret, excluduntur, hi caſus imprimis ſunt apti, quibus examen ſatis expedite inſtituere licebit. Quare numerorum $N = 4n + 1$ eas ſpecies potiſſimum contemplemur, quae vel in his duabus formis $3m + 2$ et $5m + 2$, vel in his $3m + 2$ et $5m + 3$ contineantur. Numeri autem prioris ſpeciei ad hanc formam $15m + 2$ reducuntur, qui cum inſuper in forma $4n + 1$ contineri debeant, haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species prima: $N = 60n + 17$

qui numerus alio modo ſumma duorum quadratorum eſſe nequit, niſi vtriusque quadrati radix ſit numerus formae $15p \pm (1, 4)$, ſcilicet vel $15p \pm 1$ vel $15p \pm 4$, vnde numeri tentandi ex his quatuor progreſſionibus ſunt capiendi:

1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 136 etc.

4, 19, 34, 49, 64, 79, 94, 109, 124, 139 etc.

11, 26, 41, 56, 71, 86, 101, 116, 131, 146 etc.

14, 29, 44, 59, 74, 89, 104, 119, 134, 149 etc.

et reliquos omnes in hoc negotio praetermittere licet.

7. Si-

7. Simili modo alteram ſpeciem euoluamus, quae duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ continetur, et propterea ad hanc vnam $15m+8$ reuocatur. Hinc autem tantum illi numeri ſunt vſui, qui ſimul ſunt formae $4n+1$, ex quo haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species ſecunda $N=60n+53$.

Huius ergo formae ſi fuerit numerus explorandus, vtrum ſit primus nec ne? ab eo alia quadrata ſubtrahi non eſt opus, niſi quorum radices in hac forma $15p\pm(2,7)$ contineantur; quas ergo ex ſequentibus quaternis progreſſionibus arithmeticis ſumi oportet:

2, 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152 etc.
7, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127, 142, 157 etc.
8, 23, 38, 53, 68, 83, 98, 113, 128, 143, 158 etc.
13, 28, 43, 58, 73, 88, 103, 118, 133, 148. 163 etc.

hoc ergo modo multitudo quadratorum ſubtrahendorum fere ad trientem reducitur.

8. Neque vero his omnibus quadratis tentamen inſtitui opus eſt, prout enim numerus propoſitus N inſuper fuerit comparatus, inde praeterea multa excluduntur. Cum enim omnes numeri formae $N=4n+1$ in has quatuor reſoluantur:

$16n+1$, $16n+5$, $16n+9$, $16n+13$

ſi

si statuatur $N = xx + yy$, et x denotet numerum parem, y vero imparem, pro his speciebus numeri x et y sequenti modo comparati reperiuntur:

si sit	erit	et
$N = 16n + 1$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 9$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 3$
$N = 16n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 3$.

9. Combinemus has quaternas species cum binis praecedentibus, et obtinebimus sequentes octo species, pro quibus formas tam radicis paris x quam imparis y exhibeamus:

si fuerit N	erit $x =$	et $y =$
$240n + 17$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 137$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 113$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$
$240n + 233$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$

10. Dantur autem in his numeris species, quibus adhuc plures numeri tentandi excluduntur, quae ita se habent

si sit	erit	et
$N = 32n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 1$
$N = 32n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 3$
$N = 32n + 21$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 7$
$N = 32n + 29$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 5$

quae cum binis principalibus combinatae praebent

si sit N	erit $x =$	et $y =$
$480n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (19, 29, 61, 109)$
$480n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (1, 31, 49, 79)$
$480n + 317$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (11, 59, 91, 101)$
$480n + 437$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (41, 71, 89, 119)$
$480n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (7, 23, 73, 103)$
$480n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (13, 67, 77, 83)$
$480n + 293$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (17, 47, 97, 113)$
$480n + 413$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (37, 43, 53, 107)$

Hic ergo ex valoribus ipsius y, quos praecedentes species admittunt, denuo semissis excluditur.

11. Quoniam hic valores radicis imparis y multo magis imminuuntur, quam radicis paris x, calculus multo euadet facilior et breuior, si a numero proposito N siquidem in vna postremarum specierum contineatur successiue omnia quadrata imparia ipso minora subtrahantur, residuaque examinentur an sint quadrata nec ne? harum operationum numerus satis erit modicus, etiamsi numerus propositus fuerit praemagnus et quoniam radices per differentiam 240 increscunt, insignia compendia in calculo vsurpari poterunt. Scilicet si quaecunque quatuor minimarum radicum dicatur $= a$, quia a nume-

numero propoſito N, ſi modo in aliqua octo poſtremarum ſpecierum contineatur, vel quod eodem redit ſi fuerit vel huius formae $120n+77$ vel huius $120n+53$, ſucceſſiue ſubtrahi debent quadrata aa, $(240\pm a)^2$, $(480\pm a)^2$ etc. notetur differentias eſſe primas $57600\pm 480a$; $3\cdot 57600\pm 480a$ etc. ſecundas vero eſſe conſtantes $=115200$, quo pacto totum negotium ad meras additiones et ſubtractiones reducitur; et quia quaelibet radix ſimplex a tam poſitiue quam negatiue accipi poteſt, vtraque pari calculo expedietur.

Problema.

12. Propoſito numero quantumuis magno N, qui vel in hac forma $120n+77$ vel in hac $120n+53$ contineatur, explorare vtrum is ſit primus nec ne?

Solutio.

Statuatur $N=aa+zz$, et pro octonis formis ipſius N littera a quatuor habebit valores ſequentes

ſi ſit	erunt quaterni valores ipſius a
$N=480n+77$	19, 29, 61, 109
$N=480n+197$	1, 31, 49, 79
$N=480n+317$	11, 59, 91, 101
$N=480n+437$	41, 71, 89, 119
$N=480n+53$	7, 23, 73, 103
$N=480n+173$	13, 67, 77, 83
$N=480n+293$	17, 47, 97, 113
$N=480n+413$	37, 43, 53, 107.

Pro quolibet ergo numero N habebimus quatuor valores ipsius a, quorum singuli dabunt binas numerorum series descendentes

$N-aa$; $N-(240+a)^2$; $N-(480+a)^2$; $N-(720+a)^2$ etc.
$N-aa$; $N-(240-a)^2$; $N-(480-a)^2$; $N-(720-a)^2$ etc.

quarum illius differentia prima est $57600+480a$ huius vero $57600-480a$, vtriusque vero differentia secunda constans $=115200$. Ambae hae progressiones continuentur donec ad terminos negatiuos perueniatur, ex iisque ii notentur, qui sunt numeri quadrati. Quodsi tum eueniat, vt vnicus occurrat numerus quadratus, hoc erit signum indubium, propositum numerum N esse primum; sin autem vel nullus numerus quadratus occurrat, vel plures vno, certo hinc erit concludendum, numerum propositum N non esse primum, sed ex factoribus componi.

Coroll. 1.

13. Quodsi ergo numerus propositus N in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ contineatur, tum satis expedite examen institui poterit, vtrum is numerus sit primus nec ne? cum quadrata, quae successiue subtrahi oportet scilicet $(240\lambda \pm a)^2$ mox ipsum numerum N sint superatura.

Coroll. 2.

14. Si enim numerus propositus N vnum millionem non superet, quadrata subtrahendo infra

(1200

$(1200 \pm a)^2$ subsistent, eorumque ergo numerus pro quolibet numero a non ad 9 vsque ascendet; et quoniam quaterni huiusmodi numeri a habentur, paucioribus quam 36 operationibus totum negotium conficietur.

Coroll. 3.

15. Si numerus N adeo decuplo fuerit maior, operationum numerus ad triplum tantum increscet, et quoniam pro quouis numero a quadrata subtrahenda eiusmodi progressionem constituunt, quarum differentiae secundae sunt constantes, hinc ingentia calculi compendia nascuntur.

Scholion.

16. Etsi haec methodus ad nonnullas tantum numerorum species patet, quippe quae in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ sint contentae, ea tamen neutiquam attentione indigna videtur. Cum enim eiusmodi methodum, quae se prorsus ad omnes numeros extendat, ne sperare quidem liceat, quae scilicet a vulgari regula, qua diuisionem per omnes numeros primos radice quadrata numeri propositi minores tentari oportet, discrepet, eaque sit multo expeditior; omnia compendia quae quidem in hoc negotio inuenire licet, neutiquam sunt contemnenda, etiamsi ea ad pauciissimas numerorum species extendantur, dummodo numeros quantumuis magnos in se complectantur.

Cum enim problema iam olim propoſitum, quo numerus primus dato numero maior deſideratur, adhuc vires ingenii humani ſuperare videatur, non parum praeſtitiſſe cenſendus eſt, qui numeros valde magnos, qui certo ſint primi, in medium afferre valuerit. Vſum igitur methodi hic expoſitae aliquot exemplis declarabo.

Exemplum I.

17. Explorare vtrum hic numerus 481037 ſit primus nec ne?

Cum hic numerus ſit $=1002.480+77$ in prima forma contineatur, vbi quatuor valores ipſius a ſunt 19, 29, 61, 109, calculus ergo ſequenti modo inſtituatur:

$a=+19$		$a=+29$	
481037	57600	481037	57600
361	9120	841	13920
−480676	−480676	−480196	480196 −
66720	48480	71520	43680
1152	1152	1152	1152
−413956	432196 −	−408676	436516 −
181920	163680	186720	158880
1152	1152	−221956	277636 −
−232036	268516 −		274080
			3556 −

$a=$

$a = +61$		$a = +109$	
481037	57600	481037	57600
3721	29280	11881	52320
-477316	$477316-$	-469156	$469156-$
86880	28320	109920	5280
-390436	$448996-$	-359236	$463876-$
202080	143520	225120	120480
$\square\ 188356$	$305476-$	-134116	$343396\square$
	258720		235680
	$46756-$		$107716-$

In his reſiduis duo occurrunt quadrata ſigno □ notata dum reliqua non quadrata lineola − notaui; ex quo concludo numerum propoſitum non eſſe primum. Cum autem ſit duplici modo duorum quadratorum ſumma ſcilicet

$$481037 = 434^2 + 541^2 = 586^2 + 371^2$$

eius diuiſores, quos quoque ſummas eſſe duorum quadratorum neceſſe eſt, aſſignare licebit, ſit enim $pp+qq$ diuiſor, erit $\frac{p}{q} = \frac{434 \pm 586}{541 \mp 371}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{586 \pm 541}{434 \pm 371}$, hinc $\frac{p}{q} = \frac{6}{5}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{85}{76}$ ergo diuiſores ſunt 37 et 13001.

Exemplum 2.

18. Explorare vtrum hic numerus 829853 ſit primus nec ne?

Cum hic numerus ſit $= 1728.480 + 413$, ad vltimam ſpeciem pertinet, vbi valores ipſius α ſunt 37, 43, 53, 107 calculus ergo ſequenti modo inſtituatur.

$a =$

$a = +37$	
829853	57600
1369	17760
−828484	828484−
75360	39840
1152	1152
−753124	788644−
190560	155040
1152	1152
−562564	633604−
305760	270240
−256804	363364−

$a = +43$	
829853	57600
1849	20640
−828004	828004−
78240	36960
1152	1152
−749764	791044−
193440	152160
1152	1152
−556324	638884−
308640	267360
−247684	371524−

$a = +53$	
829853	57600
2809	25440
−827044	827044−
83040	32160
1152	1152
−744004	794884−
198240	147360
1152	1152
−545764	647524−
313440	262560
	1152
□..232324	384964−
	377760
	7204−

$a = +107$	
829853	57600
11449	51360
−818404	818404−
108960	6240
1152	1152
−709444	812164−
224160	121440
1152	1152
−485284	690724−
339360	236640
	1152
□..145924	454084−
	351840
	102244−

Quo-

Quoniam hic duo occurrunt quadrata, vnde fit

$$829853 = 482^2 + 773^2 = 382^2 + 827^2$$

hic numerus non eſt primus ſed factores habet 257 et 3229.

Exemplum 3.

19. Explorare, vtrum hic numerus 2400317 ſit primus nec ne? Ex huius numeri forma $= 5000.480 + 317$ intelligitur, eum ad ſpeciem tertiam pertinere, pro qua valores ipſius a ſunt 11, 59, 91, 101, vnde calculus ita ſe habebit:

$a = +11$		$a = +59$	
2400317	57600	2400317	57600
121	5280	3481	28320
−2400196	2400196−	−2396836	2396836−
62880	52320	85920	29280
1152	1152	1152	1152
−2337316	2347876−	−2310916	2367556−
178080	167520	201120	144480
1152	1152	1152	1152
−2159236	2180356−	−2109796	2223076
293280	282720	316320	259680
1152	1152	1152	1152
□..1865956	1897636−	−1793476	1963396−
408480	397920	431520	374880
1152	1152	1152	1152
−1457476	1499716−	−1361956	1588516−
523680	513120	546720	490080
1152	1152	1152	1152
−933796	986596−	−815236	1098436−
638880	628320	661920	605280
−294916	358276−	−153316	493156−

$a = +91$	
2400317	57600
8281	43680
−2392036	2392036−
101280	13920
1152	1152
−2290756	2378116−
216480	129120
1152	1152
−2074276	2248996−
331680	244320
1152	1152
−1742596	2004676−
446880	359520
1152	1152
−1295716	1645156−
562080	474720
1152	1152
−733636	1170436−
677280	589920
− 56356	580516−

$a = +101$	
2400317	57600
10201	48480
−2390116	2390116.□
106080	9120
1152	1152
−2284036	2380996−
221280	124320
1152	1152
−2062756	2256676−
336480	239520
1152	1152
−1726276	2017156−
451680	354720
1152	1152
−1274596	1662436−
566880	469920
1152	1152
−707716	1192516−
682080	585120
−25636	607396−

Ex duobus quadratis, quae hic occurrunt, numerus propoſitus concluditur habere factores 53.45289.

Exemplum 4.

20. Explorare vtrum hic numerus 3861317 ſit primus nec ne?

Cum hic numerus ſit $=8044.480+197$ ad ſecundam ſpeciem pertinet et calculus ita ſe habebit:

$a =$

$a = +1$	
3861317	57600
1	480
−3861316	3861316−
58080	57120
1152	1152
−3803236	3804196−
173280	172320
1152	1152
−3629956	3631876−
288480	287520
1152	1152
−3341476	3344356−
403680	402720
1152	1152
□..2937796	2941636−
518880	517920
1152	1152
−2418916	2423716−
634080	633120
1152	1152
−1784836	1790596−
749280	748320
1152	1152
−1035556	1042276−
864480	863520
−171076	178756−

$a = +31$	
3861317	57600
961	14880
−3860356	3860356−
72480	42720
1152	1152
−3787876	3817636−
187680	157920
1152	1152
−3600196	3659716−
302880	273120
1152	1152
−3297316	3386596−
418080	388320
1152	1152
−2879236	2998276−
533280	503520
1152	1152
−2345956	2494756−
648480	618720
1152	1152
−1697476	1876036−
763680	733920
1152	1152
−933796	1142116−
878880	849120
−54916	292996−

$a = \pm 49$	
3861317	57600
2401	23520
−3858916	3858916−
81120	34080
1152	1152
−3777796	3824836−
196320	149280
1152	1152
−3581476	3675556−
311520	264480
1152	1152
−3269956	3411076−
426720	379680
1152	1152
−2843236	3031396−
541920	494880
1152	1152
−2301316	2536516−
657120	610080
1152	1152
−1644196	1926436−
772320	725280
	1152
−871876	1201156−
	840480
	−360676

$a = \pm 79$	
3861317	57600
6241	37920
−3855076	3855076−
95520	19680
1152	1152
−3759556	3835396−
210720	134880
1152	1152
−3548836	3700516−
325920	250080
1152	1152
−3222916	3450436−
441120	365280
1152	1152
−2781796	3085156−
556320	480480
1152	1152
−2225476	2604676−
671520	595680
1152	1152
−1553956	2008996−
786720	710880
	1152
−767236	1298116−
	826080
	472036−

Quo-

Quoniam igitur in his reſiduis vnicum quadratum reperitur, numerus propoſitus certe eſt primus; aequatur autem ſummae horum duorum quadratorum 1714^2+961^2.

Scholion.

21. Cum igitur iam certi ſimus numerum 3861317 eſſe primum, hic fortaſſe maximus eſt numerus primus quem nouimus; ac ſi quis hunc numerum ſecundum regulam vulgarem explorare voluerit, diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1965 tentare deberet, qui labor certe non ſolum maxime foret prolixus, ſed etiam ſummopere taedioſus; cum tamen hoc modo totum negotium breui temporis ſpatio facillime expediri poſſit. Simili modo tentaui numerum $3862997 = 8047.480+437$, ad quartam ſpeciem referendum, quem pariter primum eſſe deprehendi. Niſi autem numerus propoſitus in octo memoratis ſpeciebus contineatur, etiamſi ſit formae $4n+1$, examen laborem magis operoſum poſtulat; quamuis negotium ita dirigi queat, vt non pluribus ſubtractionibus ſit opus. Verum cum vniuerſa haec inueſtigatio plerisque omni vſu deſtituta videatur, hoc argumentum fuſius non proſequar ſed Theoremata tantum, quibus haec methodus innititur, breuiter ſubiungo.

Th. 1. Si ſit $xx+yy=9n+1$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 1$

Th. 2. Si ſit $xx+yy=9n+4$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 2$

Th. 3. Si ſit $xx+yy=9n+7$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 4$

Th. 4. Si ſit $xx+yy=3n+2$ erit $x=3p\pm 1$

Th. 5. Si ſit $xx+yy=5n+2$ erit $x=5p\pm 1$

Th. 6. Si ſit $xx+yy=5n+3$ erit $x=5p\pm 2$

Th. 7. Si ſit $xx+yy=25n+1$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 1$

Th. 8. Si ſit $xx+yy=25n+4$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 2$

Th. 9. Si ſit $xx+yy=25n+6$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 9$

Th. 10. Si ſit $xx+yy=25n+9$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 3$

Th. 11. Si ſit $xx+yy=25n+11$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 6$

Th. 12. Si ſit $xx+yy=25n+14$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 8$

Th.

Th. 13. Si sit $xx+yy=25n+16$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm4$

Th. 14. Si sit $xx+yy=25n+19$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm12$

Th. 15. Si sit $xx+yy=25n+21$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm11$

Th. 16. Si sit $xx+yy=25n+24$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm7$.

Conclusio.

Ex his theorematibus sequitur si summa duorum quadratorum habuerit hanc formam $xx+yy=14400n+11401$ tum quadrati imparis xx radicem fore

vel I. $x=480m\pm(75, 195)$
vel II. $x=1440m\pm(85, 355, 445, 715)$
vel III. $x=2400m\pm(99, 501, 651, 1149)$
vel IV. $x=7200m\pm\{149, 949, 1301, 1949\}$
$\{2101, 2749, 3101, 3299\}$

Ex hoc numerorum ordine sumto $n=700$, exploraui hunc numerum 10091401, cuius resolutionem in duo quadrata vnico modo succedere deprehendi scilicet

ſcilicet $1251^2 + 2920^2$, quod certum eſt indicium hunc numerum eſſe primum. Habemus ergo numerum decem millionibus maiorem 10091401, quem certo nouimus eſſe primum; ſi quis autem alia quacunque methodo vti voluerit, nunquam profecto tantum numerum primum exhibebit.

NOVA CRITERIA RADICES AEQVATIONVM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Summus *Newtonus* et post eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, vt criteria seu signa inuenirent, quorum ope aequationum cuiuscunque gradus radices reales et imaginariae dignosci possent, simili modo quo radices positiuae et negatiuae dignosci solent. Verum cuncta illa criteria seu signa hoc defectu laborant vt quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi possit, tales radices in aequatione reuera inesse; sed quando nullas radices imaginarias indicant neutiquam inde concludere licet, omnes radices esse reales, cum saepius euenire queat vt hoc non obstante omnes adeo aequationis radices sint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n+ax^{n-1}-bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}-\text{etc.}=0$$

vbi continuo bina signa eiusdem naturae se mutuo insequuntur, tum enim omnia illa criteria quae hactenus sunt prolata, nullas plane radices imagi-

narias oſtendunt, cum tamen fieri poſſit vt plures atque adeo omnes ſint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae $+x^4+ax^3-bxx-cx+d=0$ exhiberi poteſt cuius omnes radices ſint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus $xx+px+q$ et $xx-rx+s$ in quibus ſit $pp<4q$ et $rr<4s$ vt omnes radices fiant imaginariae.

Tum igitur fieri oportet $a=p-r$; $b=pr-q-s$; $c=qr-ps$ et $d=qs$; ideoque $p>r$: $pr>q+s$: et $qr>ps$.

Statuamus ergo $p=\alpha r$ et $q=\mathfrak{G}s$ et conditiones adimplendae erunt ſequentes

I. $\alpha>1$; II. $\mathfrak{G}>\alpha$; III. $rr<4s$; IV. $rr<\frac{4+\mathfrak{G}}{\alpha\alpha}s$; V. $rr>\frac{\mathfrak{G}+1}{\alpha}s$.

Cum igitur ex quinta ſit $\frac{\mathfrak{G}+1}{\alpha}s<rr$ erit multo magis $\frac{\mathfrak{G}+1}{\alpha}s<4s$ et $<\frac{4+\mathfrak{G}}{\alpha\alpha}s$ vnde fit $\mathfrak{G}+1<4\alpha$ ſeu $\mathfrak{G}<4\alpha-1$ et $\mathfrak{G}+1<\frac{4+\mathfrak{G}}{\alpha}$ ſeu $\mathfrak{G}>\frac{\alpha}{4-\alpha}$.

Cum quibus nouis conditionibus iungatur ſecunda $\mathfrak{G}>\alpha$ et adipiſcimur cum

$$4\alpha-1>\alpha \text{ tum } 4\alpha-1>\frac{\alpha}{4-\alpha}$$

inde fit $\alpha>\frac{1}{3}$ quod per ſe ſupponitur quia $\alpha>1$; hinc vero $4\alpha>\alpha^2+1$; per qua conditione implen-

plenda neceſſe eſt vt α intra hos limites $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2+\sqrt{3}$ et 1 tum vero facile erit pro $\mathfrak{C}$ idoneos valores inuenire; conſtitutis autem valoribus pro α et $\mathfrak{C}$ aeque facile erit pro s et rr idoneos valores aſſumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha = 2$ debet eſſe $\mathfrak{C} > 2$ et > 1 et < 7 vnde intra limites 2 et 7 debet contineri; ſit igitur $\mathfrak{C} = 3$ et habebimus has conditiones

$$rr > 2s \text{ et } < 4s \text{ et } < 3s$$

vnde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; ſumto ergo $s = 6$ capi poterit $r = 4$ hincque fit $p = 8$ et $q = 18$; quocirca ex binis factoribus $xx+8x+18$ et $xx-4x+6$ naſcetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4+4x^3-8xx-24x+108 = 0$$

cuius omnes radices certo ſunt imaginariae, etiamſi criteria ſupra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem ſemper certum eſt, ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere; propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conueniunt, quae autem negotium non exhauriunt, ſed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent quae radices imaginarias iuuoluunt.

Neque etiam adhuc aliud principium conſtat vnde talia criteria praeſertim pro aequationibus altiorum graduum peti poſſent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciſcimur vt dum quaedam nullas radices imaginarias indicant alia aduerſentur, quorum ſuffragium ſemper veritati conſentaneum eſt cenſendum.

Quod quo clarius appareat, methodos quibus memorati autores in hunc finem ſunt vſi breuiter hic exponam, tum vero oſtendam quomodo iisdem veſtigiis inſiſtendo plura alia imo infinita ſimilia criteria inueſtigari queant.

Primum principium inde petitur quod ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, indeque alia aequatio formetur, cuius ſingulae radices ſint quadratis illarum aequales, tum huius nouae aequationis omnes radices non ſolum futurae ſint reales ſed adeo poſitiuae, ita vt in ea ſigna + et − ſe mutuo alternatim inſequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices eſſe reales, indeque quaeramus nouam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis ſit quadrato xx, ſeu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus vt ſit

$$x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \text{etc.} = -ax^{n-1} - cx^{n-3} - ex^{n-5} - \text{etc.}$$

capian-

capianturque vtrinque quadrata, quae iterum ad eandem partem disposita dabunt hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{llll} x^{2n}+2b.x^{2n-2}+2d.x^{2n-4}+2f.x^{2n-6}+2h.x^{2n-8} & & & \\ -aa & +bb & +2bd & +2bf \\ & -2ac & -2ae & +dd \text{ etc.} \\ & & -cc & -2ag \\ & & & -2ce \end{array}\right\} = 0$$

In qua omnes exponentes ipsius x sunt numeri pares.

Scribamus ergo vbique z loco xx et habebimus nouam illam aequationem quaesitam, quae erit

$$\begin{array}{llll} z^n+2b.z^{n-1}+2d.z^{n-2}+2f.\ z^{n-3}+2h.\ z^{n-4} \text{ etc.} = 0 & & & \\ -aa & +bb & +2bd & +2bf \\ & -2ac & -2ae & +dd \\ & & -cc & -2ag \\ & & & -2ce. \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti, etc. termini sint positiui, secundi vero quarti, sexti etc. negatiui, obtinebimus sequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propositae

$$\begin{array}{lll} 2b-aa<0 & & aa>2b \\ 2d+bb-2ac>0 & \text{seu} & bb>2ac-2d \\ 2f+2bd-2ae-cc<0 & & cc>2bd-2ae+2f \\ 2h+2bf+dd-2ag-2ce>0 \text{ etc.} & & dd>2ce-2bf+2ag-2h \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

quarum formularum ordo facile perſpicitur.

En ergo iam inſignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices ſunt reales, neceſſario conueniunt, ita vt aequationis propoſitae omnes radices reales eſſe nequeant, niſi ſimul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiquam autem viciſſim inde ſequitur, ſi hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales: quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae $x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$ fit manifeſtum, cum enim facta applicatione ſit $a=p$; $b=-q$; $c=-r$ et $d=s$; conditiones inuentae ſponte implentur quoniam vtique eſt $pp>-2q$; $qq>-2pr-2s$; $rr>-2qs$ hoc autem non obſtante nouimus, omnes huius aequationis radices eſſe poſſe imaginarias.

Scholion.

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius ſingulae radices ſint quadrata ſingularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inueniri poſſunt, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata vel aliae poteſtates altiores radicum aequationis propoſitae.

Poni ſcilicet oportet vel $z=x^3$, vel $z=x^4$, vel $z=x^5$ etc. et negotium huc redit vt quantitas x eliminetur: pro qua operatione regulae paſſim ſunt traditae.

Verum

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et moleſtus, vt nemo facile hunc laborem ſit ſuſcepturus.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum oſtendiſſe, qua haec eliminatio facile effici queat.

Hunc in finem aequatio ordine inuerſo exhibeatur vt ſit

$$a+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+\text{etc.}=0$$

et pro caſu iam euoluto, quo eſſe debet $z=xx$, facta ſubſtitutione, quatenus licet, habebimus

$$a+bx+cz+dxz+ezz+fxzz+gz^3+\text{etc.}=0$$

vbi breuitatis gratia ſtatuamus

$$a+cz+ezz+gz^3+\text{etc.}=P \text{ et } b+dz+fzz+\text{etc.}=Q$$

vt ſit $P+Qx=0$, quae aequatio per x multiplicata loco xx, ſcribendo z, dabit aliam eiusdem formae

$$Px+Qz=0$$

vnde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP-QQz=0$$

quae formula operationem ſupra vſurpatam complectitur.

Ponamus autem requiri vt ſit $z=x^3$, factaque ſubſtitutione quatenus licet, habebitur

$$a+bx+cxx+dz+exz+fxxz+gzz+\text{etc.}=0$$

quae

quae cum tribus partibus conſtet, ſtatuamus breuitatis gratia $a+dz+gzz+$ etc. $=P$
$b+ez+hzz+$ etc. $=Q$
$c+fz+izz+$ etc. $=R$

vt ſit $P+Qx+Rxx=0$ haec per x multiplicata dat nouam eiusdem formae

$Rz+Px+Qxx=0$; haec denuo per x multiplicata dabit

$Qz+Rzx+Pxx=0$.

Iam vt ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur prima per L ſecunda per M et tertia per N multiplicetur, fiatque

$LQ+MP+NRz=0$ et inſuper

$LR+MQ+NP=0$

eritque tum $LP+MRz+NQz=0$.

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L=\frac{-MP-NRz}{Q}=\frac{-MQ-NP}{R}$$

ideoque $MPR+NRRz=MQQ+NPQ$

vnde fit $\frac{M}{N}=\frac{PQ-RRz}{PR-QQ}$.

Statuatur ergo $M=PQ-RRz$

et $N=PR-QQ$ ac fiet $L=QRz-PP$

quocirca aequatio quaeſita erit

$$3PQRz-P^3-Q^2z-R^3zz=0.$$

Hinc

Hinc iam ſatis perſpicuum eſt, quomodo eadem methodus etiam ad altiores poteſtates ſit accommodanda.

Secundum principium: ponamus aequationis propoſitae

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$ radices eſſe $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -$ etc. quarum numerus eſt n vt ſit $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

et $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ etc.

Et quia omnes radices ſunt reales erit ſequens forma $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2 +$ etc. certe numerus poſitiuus, facta autem euolutione, prodit $(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc.$) - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta -$ etc. eſt vero vti conſtat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc. $= aa - 2b$ vnde haec forma $(n-1)(aa-2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb$ quae quantitas cum certe ſit poſitiua erit $aa > \frac{2n}{n-1} b$.

Quae iam inſignem continet proprietatem huiusmodi aequationum quarum omnes radices ſunt reales: etſi ea enim tantum ad tres terminos initiales ſe extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosuis ſucceſſiuos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscunque gradus:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices fuerint reales, semper duae aequationes vno gradu inferiores inde formari possunt quarum radices itidem omnes sunt reales; altera ita se habet

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex proposita nascitur si singuli eius termini per progressionem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc. multiplicentur; quia enim hoc modo vltimus terminus per o multiplicatur, tota aequatio diuisionem per x admittet, sicque vno gradu deprimetur: altera vero aequatio est

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex proposita nascitur, si singuli eius termini per progressionem arithmeticam o, 1, 2, 3, 4 etc. multiplicentur.

Cuius demonstratio ex consideratione linearum curuarum est petenda: si enim x denotet abscissam et applicata statuatur $y=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\text{etc.}$ euidens est applicatam fieri nullam quoties abscissa x radici aequationis propositae aequalis capitur.

Cum igitur nostra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y euanescet, ibique curua axem intersecabit. Inter binas igitur intersectiones certo dabitur applicata maxima, vbi erit $\frac{dy}{dx}=0$, vnde tales applicatae maximae erunt numero

mero $n-1$ ad minimum; quodsi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur qui erit

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}$$

hic $n-1$ casibus euanescere poterit, siue haec aequatio $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}=0$ certe habebit $n-1$ radices, hoc est, omnes suas radices reales, quae est demonstratio prioris formae.

Pro altera statuamus $x=\frac{1}{y}$ et aequatio hinc resultans $1+ay+byy+cy^3+\text{etc.}=0$ itidem omnes habebit radices reales, quippe quae sunt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc simili modo formata

$$a+2by+3cyy+4dy^3+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices habebit reales; restituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$, ac manifestum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

omnes radices futuras esse reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes vno gradu inferiores sunt erutae, ita porro ex his tres nouae duobus gradibus inferiores deriuantur, quae sunt

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)ax^{n-3}+(n-2)(n-3)bx^{n-4}+\text{etc.}=0$$
$$1.(n-1)ax^{n-2}+2.(n-2)bx^{n-3}+3.(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$
$$1.2.bx^{n-2}+2.3.cx^{n-3}+3.4.dx^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2.(n-2)(n-3)bx^{n-4}+3.(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.(n-2)bx^{n-3}+2.3.(n-3)cx^{n-4}+3.4.(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.3.cx^{n-3}+2.3.4.dx^{n-4}+3.4.5ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

sicque continuo vlterius progredi licet quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus deriuatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

Applicatio ad criteria primi principii.

Faciamus ergo applicationem ad criteria, ex primo principio eruta: et prima aequatio deriuata dabit:

$$(n-1)^2a^2 > 2n(n-2)b$$

$$(n-2)^2b^2 > 2(n-1)(n-3)ac-2n(n-4)d$$

$$(n-3)^2c^2 > 2(n-2)(n-4)bd-2(n-1)(n-5)ae+2n(n-6)f$$

etc. etc.

ex

ex ſecunda autem aequatione deriuata naſcuntur haec criteria

$4bb > 2.6ac$

$9cc > 2.8bd - 2.5ae$

$16dd > 2.3.5ce - 2.2.6bf + 2.7ag$

$25ee > 2.4.6df - 2.3.7cg + 2.2.8bh - 2.8ai$

etc. etc.

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad vltimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, ſequentia criteria emergent

$aa > 2b$		$aa > 2b$
$4bb > 2.3.ac$	ſiue	$bb > \frac{3}{2}ac$
$4.9.cc > 2.1.2.3.4bd$		$cc > \frac{4}{3}bc$
$4.9.16\,dd > 2.1.2.3^2.4.5ce$		$dd > \frac{5}{4}ce$

etc.

Applicatio ad criterium ſecundi principii

$$aa > \tfrac{2n}{n-1}b.$$

Cum ſecundum hoc principium pro aequatione quacunque $px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \text{etc.} = 0$ habeatur $qq > \frac{2m}{m-1}pr$ binae aequationes vno gradu inferiores dabunt

$(n-1)^2aa > \frac{2(n-1)}{n-2}.n.(n-2)b$ ſeu $aa > \frac{2nb}{n-1}$

deinde $4bb > \frac{2.(n-1)}{n-2}.3ac$ ſeu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}.ac$.

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

I. $(n-1)^2(n-2)^2 aa \gtrless \frac{2.n-2}{n-3}.n.(n-1)(n-2)(n-3)b$

seu $aa \gtrless \frac{2n}{n-1}b$

II. $4(n-2)^2 bb \gtrless \frac{2.n-2}{n-3}.3.(n-1)(n-3)ac$

seu $bb \gtrless \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac$

III. $4.9.cc \gtrless \frac{2.n-2}{n-3}.1.2.3.4.bd$ seu

$cc \gtrless \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd.$

Cum igitur ex quolibet ordine vltima aequatio sola praebeat nouum criterium; omnia criteria hinc nata ita se habebunt

$aa \gtrless \frac{2}{1}.\frac{n}{n-1}b$

$bb \gtrless \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac$

$cc \gtrless \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd$

$dd \gtrless \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce$

etc.

Hinc euoluamus ista criteria pro aequationibus singulorum graduum.

I°. Pro $xx+ax+b=0$ erit criterium

$aa \gtrless 4b$

quod ita est perfectum, vt si sit $aa > 4b$, radices certe sint reales.

II°.

II°. Pro $x^3+axx+bx+c=0$
erunt criteria
$aa>3b$; $bb>3ac$.

III°. Pro $x^4+ax^3+bxx+cx+d=0$
erunt criteria
$aa>\frac{8}{3}b$; $bb>\frac{9}{4}ac$; $cc>\frac{8}{3}bd$

IV°. Pro $x^5+ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$
erunt criteria
$aa>\frac{5}{2}b$; $bb>2ac$; $cc>2bd$; $dd>\frac{5}{2}ce$.

V°. Pro $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dxx+ex+f=0$
erunt criteria
$aa>\frac{12}{5}b$; $bb>\frac{15}{8}ac$; $cc>\frac{16}{9}bd$; $dd>\frac{15}{8}ce$; $ee>\frac{12}{5}df$.

Scholion.

Omnia haec criteria a *Newtono* in Arithmetica vniuerſali ſunt prolata et deduci poſſunt ex criterio aequationum quadratarum, quod ſi aequatio $pxx+qx+r=0$ ambas radices habeat reales neceſſario ſit $qq>4pr$.

Cum enim cuiuscunque ordinis propoſita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx+qx+r=0$ erui queant quae omnes radices habent reales, ſiquidem propoſitae aequationis omnes radices fuerit reales:

les: hoc principium ad aequationes cuiuscunque gradus extendi poterit.

Ita ex aequatione cubica $x^3 + axx + bx + c$ nascuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0$$

vnde concluditur vt ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ praebet has tres quadraticas

$$4.3.\ xx + 3.2.ax + 2.1.b = 0$$
$$1.3.axx + 2.2.bx + 3.1.c = 0$$
$$1.2.bxx + 2.3\ cx + 3.4.d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ praebet has quatuor quadraticas

$$5.4.3.\ xx + 4.3.2.ax + 3.2.1.b = 0$$
$$1.4.3\ axx + 2.3.2.bx + 3.2.1.c = 0$$
$$1.2.3.bxx + 2.3.2.cx + 3.4.1.d = 0$$
$$1.2.3\ cxx + 2.3.4.dx + 3\ 4.5.e = 0$$

quae supra allata criteria suppeditant.

Quoniam autem operosum foret has formas vlterius continuare rem generatim expediamus et ex aequa-

aequatione cuiuscunque gradus ſtatim aequationem quadraticam quamcunque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px^{\lambda+2} + qx^{\lambda+1} + rx^{\lambda} + \ldots + v = 0$$

0	1	2	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	$n-\lambda$
	0	1	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$
		0	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$
			:	:	:
			:	:	:
			1	2	3
			$\lambda+2$	$\lambda+1$	λ 0
			$\lambda+1$	λ	$\lambda-1$ . . 0
			λ	$\lambda-1$	$\lambda-2$ . . 0
			:	:	:
			:	:	
			3	2	1

$$\left.\begin{array}{l} +1.2.3\ldots n-\lambda-2.3.4.5\ldots\lambda+2.pxx \\ +2.3.4\ldots n-\lambda-1.2.3.4\ldots\lambda+1.qx \\ +3.4.5\ldots n-\lambda\ldots 1.2.3\ldots\lambda r \end{array}\right\} = 0$$

Vnde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam

quae primo diuiſa per 1. 2. 3. 4 . . . . $n-\lambda-2$ dabit

$$3.4.5\ldots\lambda+2.pxx + \frac{n-\lambda-1}{1}.\ 2.3.4\ldots\lambda+1.qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2.}.\ 1.2.3\ldots\lambda r = 0$$

quae denuo per 1. 2. 3 . . . . λ diuiſa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2}pxx + \frac{n-\lambda-1}{1}.\ \frac{\lambda+1}{1}qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2}r = 0$$

vnde pro radicibus realibus hoc habetur criterium

$$\frac{(n-\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{1\cdot 1}\,qq > 4\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\,pr$$

quod reducitur ad hoc

$$qq > \frac{\lambda+2}{\lambda+1}\cdot\frac{n-\lambda}{n-\lambda-1}\,pr.$$

Quemadmodum haec criteria ex caractere aequationum quadraticarum sunt deriuata, ita si caractere aequationum cubicarum, quarum omnes radices sunt reales, simili modo vti velimus, alia noua criteria impetrabimus, sicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium instituere licebit.

Problema.

Caracterem completum inuestigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices sunt reales.

Solutio.

Quoniam constat aequationis cubicae omnes radices esse reales, quoties regula *Cardani* ad formulas imaginarias perducit; ponamus aequationem cubicam $x^3+axx+bx+c=0$ ex hac forma nasci $(x+\frac{1}{3}a) = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ sumtis igitur vtrinque cubis prodit

$$x^3+axx+\tfrac{1}{3}aax+\tfrac{1}{27}a^3 = p+q+3(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\times\sqrt[3]{pq}$$

vel $=p+q+(3x+a)\sqrt[3]{pq}$ seu

x^3+axx

$$\left.\begin{array}{l} x^3+axx+\frac{1}{3}aax+\frac{1}{27}a^3 \\ \quad -3x\sqrt[3]{pq}-p \\ \quad\quad -q \\ \quad -a\sqrt[3]{pq} \end{array}\right\}=0$$

quae forma cum aequatione propoſita comparata praebet $b=\frac{1}{3}aa-3\sqrt[6]{pq}$ et

$c=\frac{1}{27}a^3-p-q-a\sqrt[3]{pq}$; cum ergo ſit

$\sqrt[3]{pq}=\frac{1}{9}aa-\frac{1}{3}b=\frac{aa-3b}{9}$ hincque

$pq=\frac{(aa-3b)^3}{729}$ et $p+q=\frac{1}{27}a^3-\frac{a(aa-3b)}{9}-c=\frac{1}{27}a(9b-2aa)-c$

colligimus $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$

$=\frac{1}{729}aa(9b-2aa)^2-\frac{2}{27}ac(9b-2aa)+cc$

$-\frac{4}{729}(aa-3b)^3$

quae quantitas ſi fuerit negatiua, formula $p-q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum ſit ſignum radicum realium ſtatuamus

$$\left(\tfrac{1}{27}a(9b-2aa)-c\right)^2-\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3=-\omega$$

hincque

$$\tfrac{1}{27}a(9b-2aa)-c=\pm\sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega\right)}$$

et $c=\frac{1}{27}a(9b-2aa)\mp\sqrt{\left(\frac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega\right)}$.

Vnde pro c deducuntur hi limites

$c<\frac{1}{27}a(9b-2aa)+\frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$

$c>\frac{1}{27}a(9b-2aa)-\frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$.

Vel quoniam inde habetur $bb-3ac=\frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)\pm 3a\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega)}$

pro $bb-3ac$ hi oriuntur limites

$$bb-3ac<\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)+\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$
$$bb-3ac>\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)-\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vnde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9} \text{ seu}$$
$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2 \text{ et}$$
$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}>\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites $\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ continetur certi sumus omnes radices nostrae aequationis cubicae esse reales. In quo adeo consistit caracter completus quem quaerimus.

Corollarium 1.

Quia limites inuenti locum habere nequeunt nisi $aa-3b$ sit quantitas positiua, hinc statim perspicuum est radices reales esse non posse nisi sit $aa>3b$: quod criterium iam in supra allatis continetur.

Corollarium 2.

Deinde cum ambo limites sint quadrata ideoque quantitates positiuae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet

debet esse positiuus; quare cum sit $aa > 3b$ necesse est vt fiat quoque $bb > 3ac$; quod est alterum criterium supra iam allatum.

Corollarium 3.

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inuenta in hoc caractere contineri, sed hunc caracterem praeterea aliam conditionem complecti, quae nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit quod vnicus caracter plura criteria in se complectatur.

Scholion 1.

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$ vt ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri vt sit $aa > 4b$, atque adeo in hoc contineri caracterem completum. Interim tamen si in nostro caractere inuento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim $\frac{bb}{aa-3b} < \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)^2}}{3}\right)$

operae igitur erit pretium inuestigare, quomodo iste caracter ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Reuertamur igitur ad conditionem primo inventam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam $aa(9b-2aa)^2 - 4(aa-3b)^3 < 0$

quae contrahitur in hanc $-27bb(aa-4b) \lessgtr 0$ seu $bb(aa-4b) \gtrless 0$ vnde manifesto sequitur $aa \gtrless 4b$. Ceterum tamen memoratu dignum hic vsu venit quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conueniat cum ista $aa \gtrless 4b$, ita vt neutra plus involuat quam altera, sicque haec conuenientia tanquam insigne Theorema spectari possit.

Hoc quidem ostendi potest, quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem si fuerit vel $aa = 4b$ vel $aa = \infty$; intra quos casus extremos vtique cadit $aa \gtrless 4b$.

Scholion 2.

Iste caracter completus alio modo prorsus singulari inuestigari potest, vnde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium institui potest.

Si aequatio $x^3+axx+bx+c$ omnes radices habet reales, tum posito $x = y+p$ aequatio resultans $y^3+(a+3p)yy+(b+2ap+3pp)y+c+bp+app+p^3 = 0$ etiam habebit radices omnes reales; criteria autem iam cognita dant

I. $(a+3p)^2 \gtrless 3(b+2ap+3pp)$ hoc est $aa \gtrless 3b$

II. $(b+2ap+3pp)^2 \gtrless 3(a+3p)(c+bp+app+p^3)$ hoc est

$$bb+(ab-9c)p+(aa-3b)pp \gtrless 3ac$$

quae

quae conditio impletur tam si $p=0$ quo fit $bb>3ac$ quam si $p=\infty$ quia $aa>3b$.

Tribuatur igitur ipsi p eiusmodi valor quo formula illa fit minima, atque etiam nunc illa erit $>3ac$. Verum formula $A+Bp+Cpp$ fit minima sumto $p=\frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A-\frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb-\frac{(ab-9c)^2}{4(aa-3b)}>3ac.$$

Quia $aa>3b$ multiplicetur per $4(aa-3b)$ et obtinebimus facta euolutione

$$3bb(aa-4b)>81cc+6ac(2aa-9b)$$

quod criterium completum supra inuentum continet.

Conclusio.

Pro Applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum si methodo ante exposita inde deriuentur aequationes cubicae huius formae

$$px^3+qxx+rx+s=0.$$

Criterium radicum realium in hoc consistit vt sit

$$\frac{rr-3qs}{qq-3pr}<\left(\frac{q+\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$$

qua scribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr-3qs}{qq-3pr}$ intra hos limites $\left(\frac{q+\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ et $\left(\frac{q-\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ contineri debere.

Appli-

Applicatio

ad aequationem quarti ordinis

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Hinc methodo ſupra oſtenſa deriuantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3+3ax^2+2bx+c=0$$
$$ax^3+2bx^2+3cx+4d=0.$$

Vnde, ſi omnes radices ſunt reales, inueniuntur duo ſequentia noua criteria

$$\frac{4bb-9ac}{9aa-24b} \lessgtr \left(\frac{3a \pm \sqrt{(9aa-24b)}}{12}\right)^2 \text{ et}$$
$$\frac{9cc-24bd}{4bb-9ac} \lessgtr \left(\frac{2b \pm \sqrt{(4bb-9ac)}}{3a}\right)^2$$

Simili modo applicatio fieri poſſet ad aequationes quinti gradus, vnde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praeſtari poteſt, ita vt propoſita aequatione cuiuscunque ordinis, inter quaternos eius coefficientes ſucceſſiuos tale criterium inueniri poſſit: eodem ſcilicet modo calculum inſtitui opportet, quo ſupra pro criteriis prioris ordinis ſumus vſi (vid. Scholion ante Probl.)

x^n+

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}\ldots+px^{\lambda+3}+qx^{\lambda+2}+rx^{\lambda+1}+sx^{\lambda}\ldots.+px^2+qx+v=0$$

0,	1,	2								
			$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	$n-\lambda\ldots.$	$n-2$	$n-1$	n	
	0	1	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1\ldots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	
		0	$n-\lambda-5$	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2\ldots$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	
			:	:	:	:				
			:	:	:	:				
			1	2	3	4				
			$\lambda+3$	$\lambda+2$	$\lambda+1$	$\lambda\ldots.$	2	1	0	
			$\lambda+2$	$\lambda+1$	λ	$\lambda-1\ldots.$	1	0		
			$\lambda+1$	λ	$\lambda-1$	$\lambda-2\ldots.$	0			
			:	:	:	:				
			:	:	:	:				
			4	3	2	1				

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam peruenitur

$$\left.\begin{array}{l}1.2.3\ldots(n-\lambda-3).4.5.6\ldots(\lambda+3)px^3+2.3.4\ldots(n-\lambda-2).3.4.5\ldots(\lambda+2)qx^2\\+3.4.5\ldots(n-\lambda-1).2.3.4\ldots(\lambda+1)rx+4.5.6\ldots(n-\lambda).1.2.3\ldots.\lambda\, s\end{array}\right\}=0$$

quae diuisa per $1.2.3\ldots.(n-\lambda-3).1.2.3\ldots.\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.2.3}px^3+\frac{(n-\lambda-2)}{1}\cdot\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2}qxx\\+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1.2}\cdot\frac{(\lambda+1)}{1}rx+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1.2.3}s\end{array}\right\}=0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3+3.(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx\\+3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rs+(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s\end{array}\right\}=0$$

Quare ex aequatione generali quacunque

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}+fx^{n-6}+gx^{n-7}+hx^{n-8}\text{ etc.}=0$$

elicientur ſequentes aequationes cubicae

I. Si $\lambda = n-3$ erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1.3(n-1)(n-2)axx + 1.2.3.(n-2)bx + 1.2.3\,c = 0$$

ſeu $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}axx + \frac{(n-2)}{1}bx + c = 0.$

II. Si $\lambda = n-4$ erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}ax^3 + 2.\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}bxx + 3.\frac{(n-3)}{1}cx + 4d = 0$$

III. Si $\lambda = n-5$ erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}bx^3 + 3.\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}cxx + 6.\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0$$

IV. Si $\lambda = n-6$ erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}cx^3 + 4.\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}dxx + 10.\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quod ſi ergo aequatio propoſita omnes radices habet reales, ſingulae hae aequationes cubicae etiam ſuas radices habebunt reales: Vnde ſequentia oriuntur criteria

$$\frac{bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \gtrless \frac{1.(n-1)^2}{4.n^2}\left(a \pm \sqrt{\left(aa - \frac{2n}{n-1}b\right)}\right)^2$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac} \gtrless \frac{4.(n-2)^2}{9.(n-1)^2aa}\left(b \pm \sqrt{\left(bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac\right)}\right)^2$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd} \gtrless \frac{9.(n-3)^2}{16.(n-2)^2bb}\left(c \pm \sqrt{\left(cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd\right)}\right)^2$$

$ee - \frac{6}{5}\cdot$

$$\frac{ee-\frac{6}{5}\cdot\frac{n-4}{n-5}df}{dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce} \lessgtr \frac{16.(n-4)^2}{25.(n-3)^2cc}\left(d\pm\sqrt{\left(dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ee\right)}\right)^2$$

etc. etc.

vnde lex progreſſionis clare perſpicitur.

Obſeruatio.

Quae hactenus attulimus praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum quarum omnes radices ſunt reales in ſe complectuntur; primum genus eiusmodi relationes ſuppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes ſucceſſiuos locum habent, et quae iam pridem ſunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos neceſſario ſubſiſtere debent, ſi quidem omnes radices fuerint reales. Circa vtrumque genus obſeruaſſe iuuabit, nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes ſucceſſiuos exhiberi poſſe.

Quoties vel vnica harum relationum in quapiam aequatione locum non inuenit, certo concludere licet non omnes radices eſſe reales: vtrum autem duae tantum vel plures futurae ſint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem vnici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias, neque tamen hinc ſequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

Si enim aequatio propoſita fuerit tertii gradus, duo caracteres primi generis ad eam applicari poſſunt, qui etſi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere poteſt.

Quemadmodum hos caracteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices ſunt reales, deriuauimus, ita ſi commode aequationum biquadraticarum caracterem completum pro caſu quo omnes radices ſunt reales exprimere liceret, ſimili modo criteria tertii generis inde deducere poſſemus quibus relationes inter quinos quosque coefficientes ſucceſſiuos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc vſum prorſus ineptae videntur.

Concluſio.

Cum hic plura principia in ſubſidium ſint vocata, coronidis loco oſtendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo ſatis ſingulari deduci queant.

Propoſita ſcilicet aequatione cuiuscunque gradus

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} \text{ etc.} = 0$$

cuius omnes radices ſint reales, pro priori principio aſſumo, ſemper eſſe $aa > 2b$, quod per ſe eſt manifeſtum, cum formula $aa - 2b$ exprimat ſummam quadratorum ſingularum radicum, alterum principium

pium in hoc consistit, quod huius aequationis vno gradu inferioris

$$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices futurae sint reales; quod supra est demonstratum.

His iam duobus principiis constitutis ratiocinium ita prosequor.

I. Pro criteriis primi generis, statuo $x = y + p$ denotante p quantitatem realem, vt aequatio hinc resultans etiamnunc omnes suas radices habeat reales, quae erit

$$\left.\begin{array}{llll} y^m + mpy^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}ppy^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3y^{m-3} + \text{etc.} \\ + a \quad + (m-1)ap \quad + \frac{(m-1)(m-2)}{2}app \quad + \text{etc.} \\ + b \quad + (m-2)bp \quad + \text{etc.} \\ + c \quad + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

per prius igitur principium necesse est vt hic sit

$$(mp + a)^2 > m(m-1)pp + 2(m-1)ap + 2b$$

seu facta euolutione $mpp + 2ap + aa > 2b$ quod cum de omnibus valoribus ipsius p valere debeat, necesse est vt etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod euenit si sumatur $p = \frac{-a}{m}$, tum autem habebitur $aa > \frac{2m}{m-1}b$; quod est primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes quas secundum principium praebet successiue deriuantur

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$	$aa > \frac{2m}{m-1} b$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$	$bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$	$cc > \frac{4.(m-2)}{3.(m-3)} bd$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5.(m-3)}{4.(m-4)} ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis. Retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis, reiecto primo termino considerabimus tres sequentes ad eosque criterium modo inuentum $bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\tfrac{m(m-1)}{2} pp + (m-1)ap + b\right)^2 > \tfrac{3.(m-1)}{2.(m-2)} (mp+a)\left(\tfrac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 + \tfrac{(m-1)(m-2)}{2} app + (m-2)bp + c\right)$$

vnde facta euolutione peruenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \tfrac{2m}{m-1} b\right) pp + \tfrac{2}{m-1}\left(ab - \tfrac{3m}{m-2} c\right) p + \tfrac{4}{(m-1)^2} bb > \tfrac{6}{(m-1)(m-2)} ac$$

statuatur nunc $p = \dfrac{-\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)}{(m-1)\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)}$ vt valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem, multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)^2}{4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)} > \tfrac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1} b$, conditionem hanc per $4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)$ multiplicare licebit; tunc autem facta euolu-

euolutione obtinebimus hoc criterium ſecundi generis

$$bb(3aa-\tfrac{8m}{m-1}b)\gtrless\tfrac{9mm}{(m-2)^2}cc+\tfrac{6ac}{m-2}((m-1)aa-3mb)$$

ex quo deinceps eruitur vt ſupra inuenimus

$$\frac{bb-\frac{3}{2}\cdot\frac{(m-1)}{m-2}ac}{aa-\frac{2m}{m-1}b}\lessgtr\frac{1.(m-1)^2}{4.m^2}(a\pm\sqrt{(aa-\tfrac{2m}{m-1}b)})^4.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius ſecundi generis.

Hinc concludere licet, ſi quis ſimili modo progredi, et ſecundum criterium huius generis ad aequationem transformatam, poſito $x=y+p$, accommodare vellet, inde nouum criterium tertii ordinis deduci poſſe, quod contineret relationem inter quinos coefficientes ſucceſſiuos: Verum tum in formula reſultante littera p ad quartam dimenſionem eſſet aſcenſurum, vnde eius valor eam formulam minimam reddens non applius commode definiri poſſet; quamobrem hanc inueſtigationem vlterius non proſequor, eo contentus, quod criteria ſecundi generis, quae adhuc noua videntur, exhibuerim.

CON-

CONSIDERATIONES
DE THEORIA MOTVS LVNAE PERFICIENDA ET IMPRIMIS DE EIVS VARIATIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etsi Theoria motuum Lunae a praestantissimis Geometris summo studio est inuestigata, atque adeo a Celeb. Professore Göttingensi *Mayero* Tabulae Lunares obseruationibus apprime satisfacientes sunt in medium allatae, plurimum tamen adhuc abest, quo minus ipsa Theoria penitus exculta existimari possit. Quanquam enim forma istarum Tabularum ex Theoria est deriuata, quae etiam plures inaequalitates in motu Lunae accurate suppeditauit nonnullae tamen maximi momenti occurrunt, quarum quantitas ex solis obseruationibus est definita cum earum determinatio per solam Theoriam nimis incerta relinqueretur. Quin etiam nullum est dubium quin verus Lunae motus multo pluribus inaequalitatibus, quam quae in his Tabulis assignantur, perturbetur quae etsi in vsu practico ob paruitatem facile praetermitti possunt, tamen in Theoria minime contemnendae videntur neque Theoria ante satis ex-

culta

culta cenſeri poterit, quam omnes prorſus motus inaequalitates, ne minimis quidem exceptis, accurate aſſignare valuerimus.

II. Ad Theoriam autem motuum Lunae feliciter inueſtigandam, non ſtatim ab eius motu vero exordiendum videtur, quemadmodum ab iis, qui hoc opus ſuſceperunt, eſt factum, verus enim motus, quatenus non ſolum ſecundum longitudinem, ſed etiam ſecundum latitudinem continuo perturbatur, tot tantisque difficultatibus implicatur, et penitus obruitur, vt ſingulis expediendis neque noſtrae neque Analyſeos vires ſufficiant. Quam ob cauſam in hoc tam difficili negotio methodum ab Aſtronomis praecipue feliciſſimo cum ſucceſſu vſitatam adhiberi conueniet, vt ante quam veros Lunae motus inueſtigemus, caſus nobis fingamus ſimpliciores, multo paucioribus difficultatibus obnoxios, quos ſi expedire licuerit, tum demum ſtudia noſtra continuo propius ad veritatem applicare licebit.

III. Primo igitur motus Lunae in latitudinem prorſus remouendus videtur, ita vt non huius, ſed alius cuiusdam Lunae, quae in ipſo eclipticae plano moueatur, motus ſit inueſtigandus; quandoquidem hoc modo calculus a grauiſſimis illis difficultatibus, quibus motus nodorum et inclinatio ad eclipticam premitur, liberatur. Deinde ne ipſe ſolis motus quatenus non eſt vniformis moleſtiam faceſſat, hoc quoque obſtaculum in principio tollatur,

et motus ſolis quaſi eſſet vniformis ſpectetur. Hac ratione aliae inaequalitates inueſtigandae non ſupererunt, niſi quae partim ab excentricitate orbitae lunaris, partim ab elongatione Lunae a Sole pendent. Ac ſi ſimplicitas adhuc maior deſideretur, etiam excentricitas abiiciatur, et eiusmodi Lunae motus indagetur, quae ſine vlla excentricitate in plano eclipticae moueretur ſole curſum ſuum vniformiter abſoluente. Hunc tantum caſum adeo ſimplicem qui accurate et ad computum accommodate euoluere potuerit, is certe iam plurimum in Theoria praeſtitiſſe eſſet cenſendus.

Tab. I. Fig. 2. IV. Remota ergo inclinatione orbitae Lunaris, centrum terrae vt quieſcens ſpectetur in T, et tabula referente planum eclipticae, ſit tempore quodam t elapſo centrum Lunae in L et Solis in S. Aſſumta iam recta fixa TA ad principium ſcilicet arietis ducta vocentur diſtantiae: $TL=v$, $TS=u$ et $LS=z$, et anguli $ATL=\Phi$, $ATS=\theta$, ſitque breuitatis gratia $STL=\Phi-\theta=\eta$, erit $z=\sqrt{(uu-2vu\cos.\eta+vv)}$ vbi quidem diſtantia v eſt valde parua prae u. Porro demiſſo ab L in rectam TA perpendiculo LV ſit $TV=x$ et $VL=y$, eritque $x=v\cos.\Phi$ et $y=v\sin.\Phi$. Hinc $x\cos.\Phi+y\sin.\Phi=v$ et $x\sin.\Phi-y\cos.\Phi=0$: Ergo differentiando $dx\cos.\Phi+dy\sin.\Phi-d\Phi(x\sin.\Phi-y\cos.\Phi)=dv$ ſeu $dx\cos.\Phi+dy\sin.\Phi=dv$ et $dx\sin.\Phi-dy\cos.\Phi+d\Phi(x\cos.\Phi+y\sin.\Phi)=0$ ſeu $dx\sin.\Phi-dy\cos.\Phi=-vd\Phi$. Porro denuo differentiando:

ddx

$ddx \cos.\Phi + ddy \sin.\Phi - d\Phi(dx \sin.\Phi - dy \cos\Phi) = ddv$ seu
$ddx \cos.\Phi + ddy \sin.\Phi = ddv - vd\Phi^2$

$ddx \sin.\Phi - ddy \cos.\Phi + d\Phi(dx \cos.\Phi + dy \sin.\Phi) = -dvd\Phi - vdd\Phi$ seu
$ddy \cos.\Phi - ddx \sin.\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi.$

V. Iam maſſae Solis, terrae ac Lunae deſignentur litteris S, T et L, ita vt ſint vires acceleratrices, quibus Luna vrgetur ad terram ſecundum $LT = \frac{T}{vv}$, et ad ſolem ſecundum $LS = \frac{S}{zz}$, quae ducta recta sLt ipſi TS parallela reſoluitur in has binas vires:

1°. Secundum $LT = \frac{Sv}{z^3}$ et 2°. ſecundum $Ls = \frac{Su}{z^3}$.

Quia deinde terra ad ſolem vrgetur vi ſecundum $TS = \frac{S}{uu}$, et ad Lunam vi ſecundum $TL = \frac{L}{vv}$ hae vires contrarie in Lunam translatae dant vim ſecundum $Lt = \frac{S}{uu}$, et ſecund. $LT = \frac{L}{vv}$ ita vt iam Luna his viribus vrgeri cenſenda ſit;

1°. Sec. $LT = \frac{T+L}{vv} + \frac{Sv}{z^3}$; 2°. ſec. $Lt = \frac{S}{uu} - \frac{Su}{z^3}$

quae porro ſecundum directiones coordinatarum TV et VL, ſeu ducta LR ipſi TA parallela ſecundum LR et VL, reſolutae dant

ſecundum LR vim $= \frac{T+L}{vv} \cos.\Phi + \frac{Sv}{z^3} \cos.\Phi + \frac{S}{uu} \cos.\theta - \frac{Su}{z^3} \cos.\theta$

ſecundum LV vim $= \frac{T+L}{vv} \sin.\Phi + \frac{Sv}{z^3} \sin.\Phi + \frac{S}{uu} \sin.\theta - \frac{Su}{z^3} \sin.\theta.$

VI. His viribus inuentis ſumendo temporis elemento dt conſtante, principia motus praebent has aequationes

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(T+L)\cos.\Phi}{vv} - \frac{S\,v\cos.\Phi}{z^3} - \frac{S\cos.\theta}{uu} + \frac{S\,u\cos.\theta}{z^3}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(T+L)\sin.\Phi}{vv} - \frac{S\,v\sin.\Phi}{z^3} - \frac{S\sin.\theta}{uu} + \frac{S\,u\sin.\theta}{z^3}$$

vnde ob $ddy\cos.\Phi - ddx\sin.\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi$

et $ddx\cos.\Phi + ddy\sin.\Phi = ddv - vd\Phi^2$

nanciſcimur has binas aequationes principales:

1°. $\frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{dt^2} = \frac{S\sin.\eta}{uu} - \frac{S\,u\sin.\eta}{z^3}$

2°. $\frac{ddv - vd\Phi^2}{dt^2} = -\frac{(T+L)}{vv} - \frac{Sv}{z^3} - \frac{S\cos.\eta}{uu} + \frac{S\,u\cos.\eta}{z^3}$.

Vt iam pro dt^2 valorem determinatum introducamus, conſideremus motum Solis, qui cum ad terram ſollicitari cenſendus ſit vi $\frac{S+T}{uu}$, habebitur ſimili modo:

$$\frac{2dud\theta + ud\theta}{dt^2} = 0 \text{ et } \frac{ddu - ud\theta^2}{dt^2} = -\frac{(S+T)}{uu}$$

ſumamus iam Solis diſtantiam a terra mediam $= a$, et motum medium tempori t conuenientem $= \zeta$, erit ex poſteriori aequatione $\frac{ad\zeta^2}{dt^2} = \frac{S+T}{aa}$, vnde colligimus $\frac{1}{dt^2} = \frac{T+S}{a^3 d\zeta^2}$

ſicque loco elementi dt introducimus elementum cognitum pariter conſtans $d\zeta$, et has formulas adipiſcimur:

1°. $2dvd\Phi + vdd\Phi = \frac{S\,a^3 d\zeta^2 \sin.\eta}{S+T}\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right)$

2°. $ddv - vd\Phi^2 = -\frac{(T+L)a^3 d\zeta^2}{(T+S)vv} - \frac{Sa^3 d\zeta^2}{S+T}\left(\frac{v}{z^3} + \frac{\cos.\eta}{uu} - \frac{u\cos.\eta}{z^3}\right)$

vbi

vbi notandum est loco $\frac{S}{S+T}$ vnitatem scribi licere cum massa T prae S euanescat.

VII. Vt litteras maiusculas S, T, L ex calculo exterminemus, contemplemur etiam motum Lunae medium, qui quidem esset futurus, si vires perturbantes a Sole oriundae abessent; hoc casu statuatur distantia Lunae media a terra $= c$, et ratio eius motus medii ad motum medium Solis $= n : 1$; cum igitur sit $v = c$ et $d\Phi = nd\zeta$, posterior aequatio praebet $-cnnd\zeta^2 = -\frac{(T+L)a^3 d\zeta^2}{(T+S)cc}$ vnde fit $\frac{T+L}{T+S} = \frac{nnc^3}{a^3}$; ex quo nostrae aequationes principales sequentes induent formas:

1°. $2dvd\Phi + vdd\Phi = a^3 d\zeta^2 \sin.\eta\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right)$

2°. $ddv - vd\Phi^2 = -\frac{nnc^3}{v} d\zeta^2 - \frac{a^3 v}{z^3} d\zeta^2 - a^3 d\zeta^2 \cos.\eta\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right)$.

Totum ergo negotium huc redit, vt istae aequationes commode tractentur, ac si fieri queat ad integrationem perducantur: vbi quidem notasse iuuabit, membra posteriora quantitates u et z inuoluentia prae reliquis esse valde parua, indeque rationem approximandi esse petendam.

VIII. Ponamus autem breuitatis gratia:

$$\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3} = -M \text{ et } \frac{v}{z^3} + \cos.\eta\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right) = N$$

vt aequationes nostrae fiant

1°. $2dvd\Phi + vdd\Phi = -a^3 M d\zeta^2 \sin.\eta$ et

2°. $ddv - vd\Phi^2 = -\frac{nnc^3}{v} d\zeta^2 - a^3 N d\zeta^2$

vbi ob v prae u valde paruum et $z = V(uu - 2uv\cos.\eta + vv)$ erit per approximationem

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3v}{u^4}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^5}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^6}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^7}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4) \text{ etc.}$$

ideoque litterarum M et N valores prodibunt

$$M = \frac{3v}{u^4}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^5}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^6}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^7}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4)$$

$$N = \frac{v}{u^3}(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3vv}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{v^3}{2u^5}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4) - \frac{5v^4}{8u^6}(15\cos.\eta - 70\cos.\eta^3 + 63\cos.\eta^5)$$

vbi singula membra sequentia prae antecedentibus sunt vehementer exigua.

IX. Prima aequationum nostrarum ad integrabilitatem perducitur multiplicando eam per v tum vero etiam per $2v^3 d\Phi$, posteriori modo prodit $v^4 d\Phi^2 = -2a^3 d\zeta^2 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta$.

Deinde prior multiplicetur per $2vd\Phi$ et posterior per $2dv$ ac summa dabit:

$$2dvddv + 2vdvd\Phi^2 + 2vvd\Phi ddv = -2a^3 Mvd\zeta^2 d\Phi \sin.\eta - \frac{2nnc^3 dv}{vv} d\zeta^2 - 2a^3 Nd\zeta^2 dv$$

vnde per integrationem eruitur:

$$dv^2 + vvd\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} - 2a^3 d\zeta^2 \int Mvd\Phi \sin.\eta - 2a^3 d\zeta^2 \int Ndv.$$

Statuamus breuitatis gratia:

$$a^3 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta = -c^4 P \text{ et } a^3 \int Mvd\Phi \sin.\eta + a^3 \int Ndv = -cc Q$$

vt

vt obtineamus has formas:

1°. $v^4 d\Phi^2 = +2c^4 P d\zeta^2$ et 2°. $dv^2 + vv d\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} + 2cc Q d\zeta^2$

quae facto $v = cx$ fiunt

1°. $x^4 d\Phi^2 = +2P d\zeta^2$ et 2°. $dx^2 + xx d\Phi^2 = \frac{2nn d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$

eritque:

$dP = -\frac{a^3}{c} M x^3 d\Phi \sin.\eta$ et $dQ = -\frac{a^3}{c}(M x d\Phi \sin.\eta + N dx)$

existente

$M = \frac{3cx}{u^3}\cos.\eta - \frac{3ccxx}{2u^4}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5c^3x^3}{2u^5}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3)$

$N = \frac{cx}{u^3}(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3ccxx}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{c^3x^3}{2u^5}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4)$.

X. Ex priore aequatione iam est $d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2P}}{x}$, qui valor in altera substitutus dat:

$$dx^2 + \frac{2P d\zeta^2}{xx} = \frac{2nn d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$$

vnde elicitur:

$$dx = d\zeta\sqrt{(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx})} \text{ vel etiam}$$

$$\frac{dx\sqrt{2P}}{x} = d\Phi\sqrt{(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx})}$$

hincque discimus quantitatem $2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}$ nunquam fieri posse negatiuam; euanescere autem potest, quod fit dum Luna vel in apogeo versatur vel in perigeo, quandoquidem vtroque casu fit $dx = 0$. Ceterum si vires perturbantes abessent pro motu medio,

medio, quo $x = 1$ et $d\Phi = nd\zeta$ foret $n = V2P$, seu $P = \frac{1}{2}nn$ et $nn = 2nn + 2Q$ seu $Q = -\frac{1}{2}nn$, qui ergo valores his litteris proxime conueniunt.

XI. Nisi excentricitas orbitae euanescat vel sit quam minima, eius introductio in calculum satis commode ad formulas differentiales primi gradus manuducit, quae ad computum astronomicum maxime videntur accommodatae. Duplici imprimis modo haec reductio institui potest, vnde deinceps alias latius patentes eiusmodi resolutiones deriuare licet. Alterum quidem modum iam alibi fusius sum persecutus, sed dignitas materiae omnino requirere videtur, vt vtrumque hic dilucide exponam, simulque cognationem ostendam, quo facilius intelligi possit, quanta emolumenta inde expectare liceat.

Reductio prior formularum inuentarum ope excentricitatis facta.

XII. Ordiamur a formula posteriori, quae per $V2$ diuisa est:

$$\frac{dx}{xx} V P = d\Phi V(Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx})$$

ac statuamus $\frac{1}{x} = \frac{1 - q\cos.\omega}{p}$, seu $x = \frac{p}{1 - q\cos.\omega}$, vbi sequentia sunt obseruanda:

1°. Quantitas p in c ducta ob $v = cx$ exprimit semiparametrum orbitae, quatenus ea cum ellipsi comparatur; foretque p quantitas constans, si vires per-

perturbantes abeſſent, nunc autem erit quantitas variabilis.

2°. Quantitas q in eadem comparatione denotat excentricitatem, quae ob vires perturbantes pariter vt variabilis eſt ſpectanda.

3°. Angulus ω deſignat anomaliam veram ab apogeo computatam, et ob $v = cx$, erit diſtantia apogei $= \frac{cp}{1-q}$ et diſtantia perigei $= \frac{cp}{1+q}$, vnde ſemiaxis transuerſus orbitae $= \frac{cp}{1-qq}$.

4°. Loco vnius variabilis x introduximus tres nouas p, q et ω, inter quas autem iam vnam determinationem ſtabiliuimus qua dx euaneſcere debet ſi $\sin.\omega = 0$; alteram determinationem conſideratio formulae irrationalis ſuppeditabit.

XIII. In formula $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx}$ loco $\frac{1}{x}$ ſubſtituamus valorem aſſumtum $\frac{1-q\cos.\omega}{p}$, et prodibit

$$Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} - \frac{nnq}{p}\cos.\omega + \frac{2Pq}{pp}\cos.\omega - \frac{Pqq}{pp}\cos.\omega^2$$

cuius radix quadrata quia factorem habere debet $\sin.\omega$ oportet vt ſit 1°. $P = \frac{1}{2}nnp$, et 2°. $Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} = \frac{Pqq}{pp}$ ſicque prodeat $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx} = \frac{Pqq}{pp}\sin.\omega^2$. Quo facto erit $\frac{dx}{xx}\sqrt{P} = -\frac{qd\Phi\sin.\omega}{p}\sqrt{P}$, ſeu $\frac{dx}{xx} = -\frac{qd\Phi}{p}\sin.\omega$. Cum autem ſit $\frac{dx}{xx} = \frac{dp}{pp} + \cos.\omega\, d.\frac{q}{p} - \frac{q}{p}d\omega\sin.\omega$, habebimus $\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = -\frac{dp}{pp} - \cos.\omega.\, d.\frac{q}{p}$. Ex factis autem binis hypotheſibus erit primo $p = \frac{2P}{nn}$ et ob $nn = \frac{2P}{p}$ altera dat $Q + \frac{P(1-qq)}{pp} = 0$,

ſeu $Q+\frac{nn}{2p}(1-qq)=0$ hincque $\frac{1-qq}{p}=-\frac{2Q}{nn}$. Denique prima aequatio $d\Phi=\frac{d\zeta\sqrt{2P}}{xx}$ dat $\frac{d\Phi}{d\zeta}=\frac{n(1-q\cos.\omega)^2}{p\sqrt{p}}$, ſeu $d\zeta=\frac{pd\Phi\sqrt{p}}{n(1-q\cos.\omega)^2}$.

XIV. Quia nunc P et Q ſunt quantitates, quarum differentialia ſaltem vt cognita ſpectantur, variationes momentaneae elementorum motus ſequenti modo ſe habebunt.

1°. Pro quantitate p erit $dp=\frac{2dP}{nn}$, ideoque

$$dp=\frac{2a^2}{nnc}Mx^3d\Phi\sin.\eta \text{ vbi } x=\frac{p}{1-\cos.\omega}.$$

2°. Pro ſemiaxe orbitae $\frac{cp}{1-qq}$ habemus $d.\frac{1-qq}{p}=-\frac{2dQ}{nn}$

ideoque $d.\frac{1-qq}{p}=\frac{2a^3}{nnc}(Mxd\Phi\sin.\eta+Ndx)$

quia vero eſt $dx=\frac{-qxxd\Phi}{p}\sin.\omega$ erit

$$d.\frac{1-qq}{p}=\frac{2a^3}{nnc}xd\Phi\left(M\sin.\eta-\frac{Nq\sin.\omega}{1-q\cos.\omega}\right).$$

3°. Inuento differentiali quantitatis $\frac{1-qq}{p}$, quam tantisper vocabo R, erit $qq=1-pR$ et $\frac{qq}{pp}=\frac{1}{pp}-\frac{R}{p}$, vnde fit

$$d\frac{qq}{pp}=\frac{2q}{p}d.\frac{q}{p}=-\frac{2dp}{p^3}+\frac{Rdp}{pp}-\frac{1}{p}.dR=-\frac{(1+qq)dp}{p^3}-\frac{1}{p}dR$$

vbi ſi loco dp et dR valores inuenti ſubſtituantur, reperitur

$$\frac{2q}{p}d.\frac{q}{p}=\frac{2a^3qxd\Phi}{nncp}\left(\frac{M(2\cos.\omega+q\sin.\omega^2)\sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2}+\frac{N\sin.\omega}{1-q\cos.\omega}\right) \text{ ideoque}$$

$$d.\frac{q}{p}=\frac{a^3xd\Phi}{nnc}\left(\frac{M(2\cos.\omega+q\sin.\omega^2)\sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2}+\frac{N\sin.\omega}{1-q\cos.\omega}\right)$$

vnde

vnde concluditur:

$$\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = \frac{2a^2}{nnc}\, x\, d\Phi . \frac{M \sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} - \cos.\omega\, d.\frac{q}{p}$$ seu

$$\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = \frac{a^3 x d\Phi}{nnc}\left(\frac{M(2\sin.\omega^2 - q\sin.\omega^2\cos.\omega)\sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} - \frac{N\sin.\omega\cos.\omega}{1-q\cos.\omega}\right)$$

sicque habebimus:

$$d\Phi - d\omega = \frac{a^3 x x\, d\Phi}{nacq}\left(\frac{M(2-q\cos.\omega)\sin.\eta\sin.\omega}{1-q\cos.\omega} - N\cos.\omega\right)$$

vnde motus lineae absidum definitur.

4°. His variationibus definitis erit tandem

$$x = \frac{p}{1-q\cos.\omega} \quad \text{et} \quad d\zeta = \frac{p\, d\Phi \sqrt{p}}{n(1-q\cos.\omega)^2}$$

qua posteriori formula ratio inter $d\Phi$ et $d\zeta$, illinc vero ratio inter $d\Phi$ et $d\omega$ exprimitur.

Reductio altera formularum inuentarum ad differentialia primi gradus.

XV. Aequationi posteriori haec inducatur forma:

$$\frac{dx}{x}\sqrt{P} = -d\Phi\sqrt{(Qxx + nnx - P)}$$

priore existente $xx\,d\Phi = d\zeta\sqrt{2P}$, et excentricitas ita introducatur vt ponatur $x = p + q\cos.\omega$, sicque distantia maxima sit $= p+q$ et minima $= p-q$, vbi autem quantitates p et q sunt variabiles. Cum nunc sit:

$\frac{dx}{x} = \frac{dp + d.q\cos.\omega - q\,d\omega\sin.\omega}{p+q\cos.\omega}$, quae expressio euanescere debet si $\sin.\omega = 0$, valor ipsius x in altera parte substitutus dabit

$$Qxx+nnx-P=Qpp+2Qpq\cos.\omega+Qqq\cos.\omega^2 \\ +nnp+nnq\cos.\omega \\ -P.$$

Hic ergo ponatur $2Qp+nn=0$ et $Qqq=-Qpp-nnp+P$ vt fiat $\sqrt{(Qxx+nnx-P)}=\sin.\omega\sqrt{(Qpp+nnp-P)}=+q\sin.\omega\sqrt{-Q}$. At ob $nnp=-2Qpp$, habemus $Qqq=Qpp+P$, seu

$Q=\frac{-P}{pp-qq}=\frac{-nn}{2p}$, vnde fit $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$, et $\frac{nn}{p}=-2Q$.

Quare altera aequatio hanc induit formam:

$\frac{dx}{x}\sqrt{P}=-qd\Phi\sin.\omega\sqrt{-Q}$, seu $\frac{dx}{x}\sqrt{(pp-qq)}=-qd\Phi\sin.\omega$

vnde colligimus:

$$dp+dq\cos.\omega-qd\omega\sin.\omega=\frac{-q(p+q\cos.\omega)d\Phi\sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}.$$

Hinc singularum quantitatum variationes momentaneas ex differentialibus cognitis dP et dQ assignare poterimus.

1°. Aequatio $\frac{nn}{p}=-2Q$ dat $\frac{nndp}{pp}=2dQ$, ideoque $dp=\frac{2ppdQ}{nn}$.

2°. Ex aequatione $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$ seu $p-\frac{qq}{p}=\frac{2P}{nn}$, sequitur

$dp+\frac{qqdp}{pp}-\frac{2qdq}{p}=\frac{2dP}{nn}$, seu $qdq=\frac{dp(pp+qq)}{2p}-\frac{pdP}{nn}$

vnde fit $qdq=\frac{p(pp+qq)dQ-pdP}{nn}$.

3°. Hi valores in vltima aequatione substituti dabunt:

$$\frac{2ppdQ}{nn}+\frac{p(pp+qq)dQ\cos.\omega}{nnq}-\frac{pdP\cos.\omega}{nnq}-qd\omega\sin.\omega=\frac{-q(p+q\cos.\omega)d\Phi\sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$$

vnde

vnde fit:

$$qqd\omega \sin.\omega = \frac{p\,dQ}{nn}(2pq + (pp+qq)\cos.\omega) - \frac{p\,dP}{nn}\cos.\omega + \frac{qq(p+q\cos.\omega)\,d\Phi \sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}.$$

4°. Cum autem sit $dx = -\frac{qx\,d\Phi \sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$ erit $dP = \frac{-a^3}{c} M x^3 d\Phi \sin.\eta$ et $dQ = \frac{-a^3}{c} d\Phi (M x \sin.\eta - \frac{N q x \sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$, qui valores in formulis inuentis substituti praebent:

$$dp = \frac{-2a^3 pp x\,d\Phi}{nnc}(M \sin.\eta - \frac{N q \sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$$

$$dq = \frac{a^3 p x\,d\Phi}{nnc}(M \sin.\eta(2p\cos.\omega - q\sin.\omega^2) + \frac{N(pp+qq)\sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}})$$

$$d\omega = \frac{x\,d\Phi}{\sqrt{(pp-qq)}} - \frac{a^3 p x\,d\Phi}{nncq}(M \sin.\eta(2p+q\cos.\omega)\sin.\omega - \frac{N(2pq+(pp+qq)\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}).$$

Denique ob $2P = \frac{nn(pp-qq)}{p}$ est $d\zeta = \frac{xx\,d\Phi\sqrt{p}}{n\sqrt{(pp-qq)}}$ existente $x = p + q\cos.\omega$.

Reductio generalior binas praecedentes in se complectens.

XVI. Statuamus $x = \frac{p+q\cos.\omega}{1-r\cos.\omega}$, vbi angulus ω ita se habeat vt casu $\sin.\omega = 0$ euanescat dx; seu vt distantia fiat maxima casu $\omega = 0$, minima vero casu $\omega = 180°$.

Erit ergo $\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\cos.\omega - q\,d\omega \sin.\omega}{p+q\cos.\omega} + \frac{dr\cos.\omega - r d\omega \sin.\omega}{1-r\cos.\omega}$ seu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp+dq\cos.\omega}{p+q\cos.\omega} + \frac{dr\cos.\omega}{1-r\cos.\omega} - \frac{(pr+q)d\omega\sin.\omega}{(p+q\cos.\omega)(1-r\cos.\omega)}.$$

Nunc fiat substitutio in expressione $Qxx + nnx - P$ quae abibit in hanc formam:

$$\left\{\begin{array}{l} +Qpp+2Qpq\cos.\omega+Qqq\cos.\omega^2 \\ +nnP+nnq\cos.\omega-nnqr\cos.\omega^2 \\ -nnpr\cos.\omega-Prr\cos.\omega^2 \\ -P+2Pr\cos.\omega \end{array}\right\} : (1-r\cos.\omega)^2$$

Hic primo ſtatuatur $nn(pr-q)=2Pr+2Qpq$, deinde ſit $Qpp+nnp-P=-Qqq+nnqr+Prr$; vt fiat

$$V(Qxx+nnx-P)=\frac{V(Qpp+nnp-P)}{1-r\cos.\omega}\ \text{ſin. }\omega \text{ ideoque}$$

$$\frac{dx}{x}V\,P=\frac{-d\Phi V(Qpp+nnp-P)}{1-r\cos.\omega}\ \text{ſin. }\omega,$$

vnde ſequentes determinationes deducentur.

XVII. Quaeramus primo rationem inter P et Q quae ob $nn=\frac{2Pr+2Qpq}{pr-q}$ ex aequatione

$$Qpp+nnp-P=-Qqq+nnqr+Prr$$

ita reperitur:

$$Q(p^3r-pqqr+ppq-q^3)=P(-pr+pr^3-q+qrr)$$

quae per $pr+q$ diuiſa dat

$$Q(pp-qq)=-P(1-rr) \text{ ſeu } Q=\frac{-P(1-rr)}{pp-qq}.$$

Hinc prior determinatio $nn(pr-q)=2Pr+2Qpq$ praebet

$$nn(pr-q)=2Pr-\frac{2Ppq(1-rr)}{pp-qq}=\frac{2P(ppr-qqr-pq+pqrr)}{pp-qq}$$

et per $pr-q$ diuidendo $nn=\frac{2P(p+qr)}{pp-qq}$, ita vt ſit

$$\frac{pp-qq}{p+qr}=\frac{2P}{nn} \text{ et } \frac{1-rr}{p+qr}=\frac{-2Q}{nn}.$$

Deinde

Deinde loco nn iterum ſcribendo $\frac{2Pr+2Qpq}{pr-q}$ fit

$$Qpp+nnp-P=\frac{(pr+q)(P+Qpp)}{pr-q}=\frac{P(pr+q)^2}{pp-qq}$$

vnde concludimus:

$$\frac{dx}{x}=\frac{-(pr+q)d\Phi\,\mathrm{sin.}\omega}{(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)\sqrt{(pp-qq)}}.$$

At ob $x=\frac{p+q\,\mathrm{cos.}\omega}{1-r\,\mathrm{cos.}\omega}$, forma differentialis $\frac{dx}{x}$ ita exhiberi poteſt vt ſit

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp+dq\,\mathrm{cos.}\omega}{x(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)}+\frac{dr\,\mathrm{cos.}\omega}{1-r\,\mathrm{cos.}\omega}-\frac{(pr+q)d\omega\,\mathrm{sin.}\omega}{x(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)^2}=\frac{-(pr+q)d\Phi\,\mathrm{sin.}\omega}{(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)\sqrt{(pp-qq)}}.$$

Quocirca erit

$$\frac{(pr+q)d\omega\,\mathrm{sin.}\omega}{1-r\,\mathrm{cos.}\omega}=\frac{(pr+q)xd\Phi\,\mathrm{sin.}\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}+dp+dq\,\mathrm{cos.}\omega+xdr\,\mathrm{cos.}\omega.$$

XVIII. Quodſi iam formulas ſuperiores ad P et Q reductas differentiemus, ad ſequentes expreſſiones perueniemus:

$$+dp(pp+2pqr+qq)-dq(2pq+ppr+qqr)-qdr(pp-qq)=\frac{2(p+qr)^2dP}{nn}$$

$$dp(1-rr)+rdq(1-rr)+qdr(1+rr)+2prdr=\frac{2(p+qr)^2dQ}{nn}$$

vnde cum differentialia dP et dQ dentur, bina tantum trium elementorum dp, dq et dr definiuntur, tertio quaſi arbitrio noſtro relicto. Verum ob $dx=\frac{-(pr+q)xd\Phi\,\mathrm{sin.}\omega}{(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)\sqrt{(pp-qq)}}$

erit: $dP=\frac{-a^3xd\Phi}{c}.Mxx\,\mathrm{sin.}\eta$ et

$$dQ=\frac{-a^3xd\Phi}{c}\left(M\,\mathrm{sin.}\eta-\frac{N(pr+q)\,\mathrm{sin.}\omega}{(1-r\,\mathrm{cos.}\omega)\sqrt{(pp-qq)}}\right).$$

Vel

Vel etiam angulum ω pro lubitu assumere licet, ac tum binis illis aequationibus hanc tertiam iungendo $dp + dq \cos.\omega + x\,dr \cos.\omega = \frac{(pr+q)\,d\omega \sin.\omega}{1-r\cos.\omega} - \frac{(pr+q)x\,d\Phi \sin.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$ omnia tria elementa dp, dq et dr definiri poterunt. Denique ob $2P = \frac{nn(pp-qq)}{p+qr}$ erit $d\zeta = \frac{x\,x\,d\Phi\sqrt{(p+qr)}}{n\sqrt{(pp-qq)}}$.

XIX. Mirum videbitur, quod in hac reductione angulus ω arbitrio nostro relinquatur, cum certe positio et motus lineae absidum minime a nostra voluntate pendeant. Verum hic perpendi oportet, eatenus tantum distantiam $v = cx$ fieri maximam vel minimam facto $\sin.\omega = 0$, quatenus idem angulus ω non in reliquas quantitates ita ingreditur, vt in valore pro $\frac{dx}{x}$ inuento factor $\sin.\omega$ iterum tollatur. Quodsi exempli causa reperiretur $\sqrt{(pp-qq)} = s\sin.\omega$, minime amplius concludere liceret posito $\sin.\omega = 0$, formulam $\frac{dx}{x\,d\Phi}$ esse euanituram. Quocirca angulus ω neutiquam inter quantitates assumtas admitti potest, nisi forte constet a cuiusmodi angulo positio lineae absidum pendeat.

XX. Antequam hunc casum deseram, binas illas aequationes differentiales pro elementis dp, dq et dr inuentas diligentius examinasse iuuabit. Ac si inde primo elementum dp elidatur reperitur:

$$\frac{dq(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + dr(pr+q) = \frac{-(1-rr)\,dP + (pp+qq+2pqr)\,dQ}{nn}$$

sin autem inde elementum dq exterminetur, prodit

$$\frac{dp(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + \frac{dr(pr+q)^2}{p+qr} = \frac{r(1-rr)\,dP + (2pq+ppr+qqr)\,dQ}{nn}$$

Eiecto

Iecto autem elemento dr obtinetur

$$dp(pr+q) - \frac{dq(pr+q)^2}{p+qr} = \frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn}.$$

Quod si iam harum binas quasque in locum illarum substituamus, calculus haud parum fiet simplicior hae vero videntur commodissimae:

$$dp - \frac{dq(pr+q)}{p+qr} = \frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn(pr+q)}$$

$$dr + \frac{dq(1-rr)}{p+qr} = -\frac{(1-rr)dP+(pp+qq+2pqr)dQ}{nn(pr+q)}.$$

Vnde assumto q reliqua elementa facile determinantur sin autem angulus ω vt cognitus spectetur, hinc valores pro dp et dr in postrema aequatione differentiali supra data (XVIII.) substituti determinationem elementi dq suppeditabunt. Peruenitur autem ad hanc aequationem:

$$\frac{dq(pr+q)\sin.\omega^2}{p+qr} = (pr+q)\sin.\omega\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$
$$- \frac{dP}{nn(pr+q)}\left(2pr+q+qrr-(p+qr)(1+rr)\cos.\omega - q(1-rr)\cos.\omega^2\right)$$
$$- \frac{dQ}{nn(pr+q)}\left(q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega + q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2\right).$$

XXI. Substituendo denique hic pro dP et dQ valores supra indicatos (XVIII.)

$$\frac{dq\sin.\omega}{p+qr} = d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}$$
$$+ \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.n\sin.\omega}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)^2}\left(2pp-qq+pqr+(p+qr)(3q-pr)\cos.\omega - q(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\right)$$
$$- \frac{a^3 N x\, d\Phi}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega+q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

si quidem nunc totam aequationem per $(pr+q)\sin\omega$ diuidere licuit; commode enim vsu venit, vt membrum elemento $M\sin.\eta$ affectum factorem $1-\cos.\omega^2 = \sin.\omega^2$ sortiretur.

Quodsi iam hic ponatur $q=0$, reductio resultat prior scribendo q loco r, sin autem ponatur $r=0$, reductio habetur posterior, vnde intelligitur quanto latius pateat haec reductio generalior ambas praecedentes in se complectens. Loco dP et dQ etiam in praecedentibus formulis substituantur valores ac reperietur:

$$dp = \frac{dq(pr+q)}{p+qr} - \frac{a^3 M\,x\,d\Phi\,\sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\big(2pp-qq+pqr+2q(p+qr)\cos.\omega + q(pr+q)\cos.\omega^2\big)$$

$$+\frac{a^3 N\,x\,d\Phi\,\sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\,q\sqrt{(pp-qq)}$$

$$dr = \frac{-dq(1-rr)}{p+qr} - \frac{a^3 M\,x\,d\Phi\sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\big(pr+q-2(p+qr)\cos.\omega+(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\big)$$

$$+\frac{a^3 N\,x\,d\Phi\sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pqr}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

et loco dq valorem superiorem substituendo:

$$\frac{dp\sin.\omega}{p+qr} = \frac{pr+q}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right) - \frac{a^3 M\,x\,d\Phi\sin.\eta\sin.\omega\cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(pr-q+2qr\cos.\omega) - \frac{a^3 N\,x\,d\Phi\cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pq\cos.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

$$\frac{dr(pr+q)\sin.\omega}{p+qr} = -\frac{(pr+q)(1-rr)}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right) - \frac{a^3 M\,x\,d\Phi\sin.\eta\sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\big(2p+qr-prr+(q-3pr-3qrr+pr^3)\cos.\omega+r(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\big)$$

+

$$+\frac{a^3 N \varkappa d\mathfrak{C}}{nnc(1-r\cos.\omega)\sqrt{(pp-qq)}}(ppr+2pq+qqr+(1-rr)(pp+qq)\cos.\omega -r(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2).$$

XXII. Si excentricitas orbitae ſatis fuerit notabilis, commodiſſime reductione prima vtemur, quia ibi aberrationes a motu regulari in ellipſi facto definiuntur. Sin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neque primam reductionem neque ſecundam in vſum vocare licebit, quandoquidem anomaliae ω tum ne locus quidem relinquitur; ac ſpectata quantitate q ſaltem vt minima, quia ea denominatorem formulae pro $d\Phi - d\omega$ inventae afficit, motus lineae abſidum nimis fit vagus et incertus. Neque etiam adhuc perſpicio, quomodo poſtrema reductio ſumendo $\omega = \eta$ in hac inveſtigatione vtilitatem afferre poſſet, tam propter multitudinem, quam complicationem formularum, quas reſolui oporteret. Nihilo tamen minus caſus quo excentricitas plane euaneſceret ſine dubio pro ſimpliciſſimo eſſet habendus; ex quo in eius reſolutione merito omne ſtudium collocandum videtur quo his difficultatibus ſuperatis deinceps veri motus lunaris inueſtigatio feliciori ſucceſſu ſuſcipi, neque tantum ad vſum practicum ſatis conuenienter, ſed etiam multo accuratius abſolui queat. Neque autem ad hunc caſum euoluendum alia via aptior videtur, quam vt ad ipſas aequationes differentio-differentiales reuertamur indeque approximationes idoneas petamus.

Inueſtigatio motus ſi Luna in ecliptica ſine vlla excentricitate ſol autem vniformiter moueretur.

XXIII. Ponamus in ipſis aequationibus differentio differentialibus $v = cx$, et habebimus.

1°. $2dxd\Phi + xdd\Phi + \frac{a^3}{c} M d\zeta^2 \sin.\eta = 0$

2°. $ddx - xd\Phi^2 + \frac{n\,n}{x\,x} d\zeta^2 + \frac{a^3}{c} N d\zeta^2 = 0$

et quia motus ſolis aſſumitur vniformis erit $u = a$ et $\theta = \zeta$ ideoque $\Phi = \zeta + \eta$, hinc

$\frac{a^3}{c} M = 3x \cos.\eta - \frac{3ccx}{2a}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5ccx^3}{2aa}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3)$

$\frac{a^3}{c} N = x(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3ccx}{2a}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{ccx^3}{2aa}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4)$

vnde binae noſtrae aequationes erunt

1°. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2dxd\Phi}{d\zeta^2} + \frac{xdd\Phi}{d\zeta^2} \\ + 3x \sin.\eta\cos.\eta - \frac{3c}{2a} xx \sin.\eta(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5cc}{2aa} x^3 \sin.\eta(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) \end{array} \right\} = 0$

2°. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{ddx}{d\zeta^2} - \frac{xd\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{n\,n}{x\,x} \\ + x(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3cxx}{2a}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{c\,c}{2aa} x^3(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4) \end{array} \right\} = 0$

vbi cum $\frac{c}{a}$ ſit quantitas quam minima, has aequationes in partes ſectas concipere licet, quae ſequentibus multo ſint maiores, ad quem ordinem etiam approximationem accommodari conuenit.

XXIV.

XXIV. Si omnis perturbatio abeſſet, foret ob excentricitatem euaneſcentem, vti vidimus, $x=1$ et $\frac{d\Phi}{d\zeta}=n$ hincque $\frac{d\eta}{d\zeta}=n-1$. Nunc perturbatione accedente ſtatuamus:

$$x=1+P+Q+R \text{ et } \frac{d\Phi}{d\zeta}=n+p+q+r$$

hincque $\frac{d\eta}{d\zeta}=n-1+p+q+r$, vbi P, Q, R et p, q, r ſeries maxime decreſcentes referant, cum ſeriebus ſuperioribus ex perturbatione natis comparandas ac has ipſas quantitates tanquam functiones anguli η ſpectemus, ſiquidem nouimus omnes inaequalitates ab hoc ſolo angulo pendere. Erit ergo $dx=dP+dQ+dR$ et per $\frac{d\eta}{d\zeta}=(n-1)+p+q+r$ multiplicando:

$$\frac{dx}{d\zeta}=\left\{\begin{array}{r}(n-1)dP+(n-1)dQ+(n-1)dR\\ +p\,dP\;+\;p\,dQ\\ +q\,dP\end{array}\right\}:d\eta$$

quae forma differentiata ſumto iam elemento $d\eta$ conſtante dabit

$$\frac{d\,dx}{d\zeta}=\left\{\begin{array}{r}(n-1)d\,dP+(n-1)dd\,Q+(n-1)dd\,R\\ +p\,d\,dP\;+\;p\,d\,dQ\\ +dP\,dp+dp\,dQ\\ +q\,d\,dP\\ +dq\,dP\end{array}\right\}:d\eta$$

multiplicetur denuo per $\frac{d\eta}{d\zeta}$, prodibitque

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r}(n-1)^2 ddP+(n-1)^2 ddQ+(n-1)^2 ddR\\ +2(n-1)pddP+2(n-1)pddQ\\ +(n-1)dpdP+(n-1)dpdQ\\ +2(n-1)qddP\\ +(n-1)dqdP\\ +ppddP\\ +pdpdP\end{array}\right\} : d\eta^2$$

ſimili modo cum ſit

$\frac{ddQ}{d\zeta^2} = dp+dq+dr$ per $\frac{d\eta}{d\zeta}$ multiplicando erit

$$\frac{ddQ}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r}(n-1)dp+(n-1)dq+(n-1)dr\\ +pdp\ +pdq\\ +qdp\end{array}\right\} : d\eta$$

et $\frac{dQ^2}{d\zeta^2} = nn+2np+2nq+2nr$
$+pp+2pq$ ac tandem

$$\frac{1}{xx} = 1-2P-2Q-2R$$
$$+3PP+6PQ$$
$$-4P^3.$$

XXV. Hos igitur valores in aequationes noſtras introductos ſecundum ordines ſtabilitos diſtribuamus, vbi quidem elementum $d\eta$, quippe quod ſponte intelligitur, omittamus.

* Aequa-

* Aequatio Prima

II.	III.	IV.
$+2n(n-1)dP$	$+2n(n-1)dQ$	$+2n(n-1)dR$
$+(n-1)dp$	$+2npdP$	$+2npdQ$
$+3\sin.\eta\cos.\eta$	$+2(n-1)pdP$	$+2nqdP$
	$+(n-1)dq$	$+2(n-1)pdQ$
	$+pdp$	$+2ppdP$
	$+(n-1)Pdp$	$+2(n-1)qdP$
	$+3P\sin.\eta\cos.\eta$	$+(n-1)dr$
	$-\frac{1c}{2a}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2)$	$+pdq$
		$+qdp$
		$+(n-1)Pdq$
		$+Ppdp$
		$+(n-1)Qdp$
		$+3Q\sin.\eta\cos.\eta$
		$-\frac{3c}{a}P\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2)$
		$-\frac{5cc}{2aa}\sin.\eta(3\cos.\eta-7\cos.\eta^3)$

Hic ſcilicet ordo primus deeſt, quia ſublata perturbatione primae aequationis omnia membra ſponte euaneſcunt.

Pro

---

* Huius aequationis nonniſi integrale particulare hic quaeritur, quod ſcilicet hypotheſi aſſumtae, qua excentricitas euaneſcit, conueniat, et manifeſto huiusmodi habet formam $P=A+B\cos.\eta^2$. Integrale autem completum foret

$$P=A+B\cos.\eta^2+M\sin.\tfrac{n}{n-1}\eta+N\cos.\tfrac{n}{n-1}\eta$$

vbi M et N ſunt conſtantes arbitrariae, quibus conditio excentricitatis continetur. Id quod peculiarem euolutionem meretur.

Pro ſequentibus autem ordinibus terminos ad quemuis pertinentes ſeorſim nihilo aequari oportet.

XXVI. Aequatio altera ſequenti modo in membra diſtribuitur.

Aequatio ſecunda.

I.	II.	III.	IV.
$-nn$	$(n-1)^2 ddP$	$+(n-1)^2 ddQ$	$+(n-1)^2\, d\,d\,R$
$+nn$	$-2np$	$+2(n-1)pddP$	$+2(n-1)pddQ$
	$-3nnP$	$+(n-1)dpdP$	$+2(n-1)qddP$
	$+(1-3\text{cof.}\eta^2)$	$-2nq$	$+(n-1)\,dp\,dQ$
		$-pp$	$+(n-1)\,dq\,dP$
		$-2nPp$	$+\ pp\,dd\,P$
		$-3nnQ$	$+p\,dp\,dP$
		$+3nnPP$	$-2nr$
		$+P(1-3\text{cof.}\eta^2)$	$-2pq$
		$+\frac{3c}{2a}(3\text{cof.}\eta-5\text{cof.}\eta^3)$	$-2nPq$
			$-Ppp$
			$-2nQq$
			$-3nnR$
			$+6nnPQ$
			$-4nnP^3$
			$+Q(1-3\text{ cof.}\eta^2)$
			$+\frac{3c}{a}P(3\text{ cof.}\eta-5\text{ cof.}\eta^3)$
			$-\frac{cc}{2aa}(3-30\text{cof.}\eta^2+35\text{cof.}\eta^4)$

vbi membrum primum ſponte ſe tollit.

XXVII. Secundus ordo ex vtraque aequatione quantitatibus ſecundo loco aſſumtis definiendis inſervit,

vit, quae sunt P et p, ideoque ex his duabus aequationibus determinandae.

1°. $2n(n-1)dP+(n-1)dp+3d\eta \sin.\eta\cos.\eta=0$

2°. $(n-1)^2ddP-2npd\eta^2-3nnPd\eta^2+d\eta^2(1-3\cos.\eta^2)=0.$

Prior autem integrata dat $2n\,n-1)P+(n-1)p=\Delta+\frac{3}{2}\cos.\eta^2$ seu $p=-2nP+\frac{\Delta}{n-1}+\frac{3\cos.\eta^2}{2(n-1)}$, qui valor in altera substitutus praebet:

$(n-1)^2ddP+nnPd\eta^2-\frac{2n}{n-1}\Delta d\eta^2-\frac{3nd\eta^2\cos.\eta^2}{n-1}+d\eta^2(1-3\cos.\eta^2)=0$

seu $(n-1)^2ddP+nnPd\eta^2-\frac{2n}{n-1}\Delta d\eta^2-\frac{3(2n-1)}{n-1}d\eta^2\cos.\eta^2+d\eta^2=0.$

Statuamus, quandoquidem forma integralis sponte patet $P=A+B\cos.\eta^2$, si esset $nn=4(n-1)^2$ poni deberet $P=A+B\cos.\eta^2+C\eta\sin.\eta\cos.\eta$, erit $\frac{dP}{d\eta}=-2B\sin.\eta\cos.\eta$ et $\frac{ddP}{d\eta^2}=-2B\cos.\eta^2+2B\sin.\eta^2=2B-4B\cos.\eta^2$ et facta substitutione oritur:

$$\left.\begin{array}{l}+2(n-1)^2B+nnA-\frac{2n}{n-1}\Delta+1\\-4(n-1)^2B\cos.\eta^2+nnB\cos.\eta^2-\frac{3(2n-1)}{n-1}\cos.\eta^2\end{array}\right\}=0$$

hincque $B=\frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)}$ et $\frac{2n}{n-1}\Delta=1+nnA+2(n-1)^2B$ et $p=-2nA-2nB\cos.\eta^2$

$$+\frac{1}{2n}+\frac{3}{2(n-1)}\cos.\eta^2.$$
$$+\tfrac{1}{2}nA$$
$$+\frac{(n-1)^2}{n}B.$$

Quare si ponamus:

$P=A+B\cos.\eta^2$ et $p=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos.\eta^2$

quantitas A arbitrio noſtro relinquitur, eritque

$$B = \frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)} \text{ atque}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}nA + \frac{(n-1)^2}{n} B \text{ et } \mathfrak{B} = \frac{3}{2(n-1)} - 2nB.$$

Quantitas A ideo manet indefinita, vt vel diſtantia media vel motus medius ad veritatem definiri poſſit, ob perturbationem enim, ſi c conueniat cum diſtantia media n non amplius cum ratione $\frac{d\Phi}{d\zeta}$ congruit et vic ſſim.

XXVIII. Ad quantitates tertii ordinis Q et q determinandas, has habemus aequationes:

$$2n(n-1)dQ + (n-1)dq + 2(2n-1)pdP + pdp + (n-1)P\,dp + 3P\text{ſin.}\eta\text{coſ.}\eta - \frac{3c}{2a}\text{ſin.}\eta(1-5\,\text{coſ.}\eta^2) = 0$$

$$(n-1)^2 ddQ - 2nq - 3nnQ + 2(n-1)pddP + (n-1)dpdP - pp - 2nPp + 3nnPP + P(1-3\,\text{coſ.}\eta^2) + \frac{3c}{2a}(3\,\text{coſ.}\eta - 5\,\text{coſ.}\eta^3) = 0.$$

Cum autem ſit $P = A + B\,\text{coſ.}\eta^2$ et $p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\eta^2$ erit $dP = -2B\,\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\eta$ et $dp = -2\mathfrak{B}\,\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\eta$

hi valores in prima aequatione ſubſtituti dant

$$\frac{2n(n-1)dQ + (n-1)dq}{d\eta} - 4(2n-1)\mathfrak{A}B\,\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\eta - 4(2n-1)\mathfrak{B}B\,\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\eta^3 - \frac{3c}{2a}\text{ſin}\,\eta(1-5\,\text{coſ.}\eta^2) = 0$$

$$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B} \qquad -2\mathfrak{B}\mathfrak{B}$$

$$-2(n-1)\mathfrak{B}A \qquad -2(n-1)\mathfrak{B}B$$

$$+3A \qquad +3B$$

vnde

vnde per integrationem elicitur

$$2n(n-1)Q+(n-1)q+(2(2n-1)\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}+(n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{A}-\tfrac{3}{2}\mathfrak{A})\cos.\eta^2$$
$$+\tfrac{3c}{2a}\cos.\eta-\tfrac{5c}{2a}\cos.\eta^3=\Delta$$
$$+((2n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{2}(n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\tfrac{3}{4}\mathfrak{B})\cos.\eta^4$$

fit breuitatis gratia

$$2(2n-1)\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}+(n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{A}-\tfrac{3}{2}\mathfrak{A}=\alpha$$
$$\tfrac{1}{2}(5n-3)\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\tfrac{3}{4}\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$$

erit $q=-2nQ+\frac{\Delta}{n-1}-\frac{\alpha}{n-1}\cos.\eta^2-\frac{\mathfrak{C}}{n-1}\cos.\eta^4-\frac{3c}{2a(n-1)}\cos.\eta$
$$+\tfrac{5c}{2a(n-1)}\cos.\eta^3.$$

Tum pro altera aequatione ob $ddP=2B-4B\cos.\eta^2$ eſt

$2(n-1)pddP$	$4(n-1)\mathfrak{A}B-8(n-1)\mathfrak{A}B\cos.\eta^2-8(n-1)\mathfrak{B}B\cos.\eta^4$			
$+(n-1)dpdP$		$+4(n-1)\mathfrak{B}B$		
		$+4(n-1)\mathfrak{B}B$	$-4(n-1)\mathfrak{B}B$	
$-pp$	$-\mathfrak{A}\mathfrak{A}$	$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$-\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	
$-2nPp$	$-2n\mathfrak{A}A$	$-2n\mathfrak{A}B$	$-2n\mathfrak{B}B$	
$+3nnPP$		$-2n\mathfrak{B}A$		
	$+3nn\mathfrak{A}A$	$+6nn\mathfrak{A}B$	$+3nn\mathfrak{B}B$	
$+P(1-3\cos.\eta^2)$	$+\mathfrak{A}$	$-3\mathfrak{A}$	$-3\mathfrak{B}$	
		$+\mathfrak{B}$		
$+\frac{(n-1)^2ddQ}{d\eta^2}$	$-\frac{2n\Delta}{n-1}$	$+\frac{2n\alpha}{n-1}$	$+\frac{2n\mathfrak{C}}{n-1}$	$+\frac{9c}{2a}\cos.\eta-\frac{15c}{2a}\cos.\eta^3$
$+nnQ$				$+\frac{3nc}{a(n-1)}\cos.\eta-\frac{5nc}{a(n-1)}\cos.\eta^3$

XXIX. Pro reſolutione huius aequationis poni oportere manifeſtum eſt:

$$Q=C+D\cos.\eta^2+E\cos.\eta^4+F\cos.\eta+G\cos.\eta^3$$

eritque $\frac{ddQ}{d\eta^2}=2D-4D\cos.\eta^2-16E\cos.\eta^4-F\cos.\eta-9G\cos.\eta^3$
$$+12E \qquad +6G$$

Hinc istae nascuntur aequationes:

$$0 = mC + 2(n-1)^2 D + 4(n-1)\mathfrak{A}B - \mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n\mathfrak{A}A + 3nnAA + A - \frac{2n\Delta}{n-1}$$

$$0 = 12(n-1)^2 E - (n-2)(3n-2)D - 2(5n-4)\mathfrak{A}B + 8(n-1)\mathfrak{B}B - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}A + 6nnAB - 3A + B + \frac{2n\alpha}{n-1}$$

$$0 = -(3n-4)(5n-4)E - 12(n-1)\mathfrak{B}B - \mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}B + 3nnBB - 3B + \frac{2n\mathfrak{E}}{n-1}$$

$$0 = 6(n-1)^2 G + (2n-1)F + \frac{5(5n-3)c}{2(n-1)a}$$

$$0 = -(2n-3)(4n-3)G - \frac{5(5n-3)c}{2(n-1)a}$$

vnde ordine retrogado litterae G, F, E et D determinantur tum vero ex prima valor ipsius Δ quaeratur, vt C maneat quantitas indefinita, ac tum etiam valor litterae q innotescet per quantitates iam definitas A, B, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ex quibus α et $\mathfrak{E}$ resultant. Si enim ponatur $q = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^3$ erit

$$\mathfrak{C} = -2nC + \frac{\Delta}{n-1}$$

$$\mathfrak{D} = -2nD - \frac{\alpha}{n-1}$$

$$\mathfrak{E} = -2nE - \frac{\mathfrak{E}}{n-1}$$

$$\mathfrak{F} = -2nF - \frac{3c}{2(n-1)a}$$

$$\mathfrak{G} = -2nG + \frac{5c}{2(n-1)a}$$

XXX. Simili modo perturbationes sequentium ordinum ex aequationibus supra datis colligi posse per

per se est manifestum. Calculus quidem haud parum fit molestus ac taedioſus, verum ſufficit methodum eum euoluendi hic dilucide expoſuiſſe, ita vt nulla difficultas ſit metuenda praeter calculi prolixitatem. Interim ſequentia membra ita fiunt parva, vt pro vſu aſtronomico facile reiici queant. Inventis autem his omnibus litteris binae aequationes quibus iam motus lunae continetur ita ſe habent

$$x = 1 + A + C + (B+D)\cos.\eta^2 + E\cos.\eta^4 + F\cos.\eta + G\cos.\eta^3$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = n + \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + (\mathfrak{B}+\mathfrak{D})\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^3$$

exiſtente $d\Phi = d\eta + d\zeta$, et $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{d\zeta} - 1$; vbi manifeſtum eſt conſtantem A nihilo aequalem poni poſſe, dummodo C in calculo retineatur, vt ratio media $d\Phi : d\zeta$ ob ſequentes terminos aliquantillum a vero valore n depulſa corrigi et ad veritatem reduci poſſit modo infra exponendo.

Operae autem pretium erit hos ſingulos terminos euoluere ſumendo pro n valorem per obſervationes definitum, quia eaedem inaequalitates; etiamſi ad caſum hunc maxime particularem pertinentes, tamen in vero quoque lunae motu locum inueniunt.

XXXI. Sumamus ergo $A = 0$, et cum motum lunae medium cum ſolis motu comparando ſit $n = 13,25586$, calculus pro determinatione harum inaequalitatum ita ſe habebit:

$n = 13,25586$
$n-1 = 12,25586$
$2n-1 = 25,51172$
$3n-2 = 37,76758$
$n-2 = 11,25586$

$B = -0,0146899$
$\frac{3}{2(n-1)} = +0,1223904$
$2nB = -0,3894546$
$\mathfrak{B} = +0,5118450$
$\frac{1}{2n} = +0,0377191$
$\frac{(n-1)^2}{n}B = -0,1664559$
$\mathfrak{A} = -0,1287368$

$l(2n-1) = 1,4067394$
$l3 = 0,4771213$
$l3(2n-1) = 1,8838607$
$l(n-1) = 1,0883440$
$l(n-2) = 1,0513787$
$l(3n-2) = 1,5771191$
$3,7168418$
$l-B = 8,1670189$
$l\frac{3}{2} = 0,1760913$
$l(n-1) = 1,0883440$
$l\frac{3}{2(n-1)} = 9,0877473$
$l2 = 0,3010300$
$ln = 1,1224079$
$l2n = 1,4234379$
$l-2nB = 9,5904568$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\frac{(n-1)^2}{n} = 1,0542801$
$l-\frac{(n-1)^2}{n}B = 9,2212990$

XXXII. Nunc pro litteris α et $\mathfrak{C}$ calculus ita se habebit:

$2(n-1)\mathfrak{A}B = +0,096492$
$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -0,065893$
$\alpha = +0,030599$
$\frac{1}{3}(5n-3) = 31,63965$
$\frac{1}{3}(5n-3)\mathfrak{B}B = -0,237897$
$\frac{1}{3}\mathfrak{B}\mathfrak{B} = +0,130993$
$-0,106904$

$l\mathfrak{A} = -9,1097027$
$lB = -8,1670189$
$l2 = 0,3010300$
$l(2n-1) = 1,4067394$
$+8,9844910$
$l\mathfrak{A} = -9,1097027$
$l\mathfrak{B} = +9,7091385$
$-8,8188412$
$-\frac{3}{4}B$

$-\frac{3}{4}\mathfrak{B} = +0,011018$
$\mathfrak{C} = -0,095886$

$l\frac{1}{2}(5n-3) = 1,5002316$
$l\mathfrak{B} = +9,7091385$
$lB = -8,1670189$
$-9,3763890$
$l\mathfrak{B}\mathfrak{B} = 9,4182770$
$l2 = 0,3010300$
$9,1172470$

Hinc primo quaeratur littera E.

$-12(n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{B} = +1,105820$
$-2n\mathfrak{B}\mathfrak{B} = +0,199340$
$+1,305160$
$-\mathfrak{B}\mathfrak{B} = -0,261986$
$+1,043174$
$+3nnBB = +0,113756$
$-3B = +0,044069$
$+1,200999$
$+\frac{2n\mathfrak{C}}{n-1} = -0,207419$
$(3n-4)(5n-4)E = +0,993580$
ergo $E = +0,00044603$

$l\mathfrak{B}\mathfrak{B} = -7,8761574$
$l(n-1) = 1,0883440$
$l12 = 1,0791812$
$-0,0436826$
$l2n = 1,4234379$
$-9,2995953$
$lBB = 6,3340378$
$lnn = 2,2448158$
$l3 = 0,4771213$
$+9,0559749$
$l\mathfrak{C} = -8,9817552$
$l2n = 1,4234379$
$-0,4051931$
$l(n-1) = 1,0883440$
$-9,3168491$
$l+0,99358 = 9,9972028$
$l(3n-4) = 1,5534895$
$l(5n-4) = 1,7943437$
$3,3478332$
$lE = +6,6493696$

XXXIII.

XXXIII. Porro pro littera D.

$12(n-1)^2 E = +0,803968$
$-2(5n-4)\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -0,235557$
$+0,568411$
$+8(n-1)\mathfrak{B}\mathfrak{B} = -0,737223$
$-0,168812$
$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = +0,131786$
$-0,037026$
$\mathfrak{B} = -0,014690$
$-0,051716$
$+\frac{2n\alpha}{n-1} = +0,066192$
$(n-2)(3n-2)D = +0,014476$
Ergo $D = +0,000034052$
$2(n-1)^2 D = +0,010230$
$+4(n-1)\mathfrak{A}\mathfrak{B} = +0,192984$
$+0,203214$
$-\mathfrak{A}\mathfrak{A} = -0,016573$
$+0,186641$
$nn\mathfrak{C} - \frac{2n\Delta}{n-1} = +0,186641$
$\frac{\Delta}{n-1} = 0,007040 + \frac{1}{2}n\mathfrak{C}$
Ergo $\mathfrak{C} = 0,007040 - \frac{3}{2}n\mathfrak{C}$
$-2nD = -0,0009028$
$-\frac{\alpha}{n-1} = -0,0024970$
Ergo $\mathfrak{D} = -0,0033998$
$-2nE = -0,0118250$
$-\frac{\mathfrak{C}}{n-1} = +0,0078237$

$lE = +6,6493696$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\,12 = 1,0791812$
$+9,9052388$
$l2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = +7,5777516$
$l(5n-4) = 1,7943437$
$+9,3720953$
$l\alpha = +8,4857072$
$l\frac{2n}{n-1} = 0,3350939$
$+8,8208011$
$l0,014476 = 8,1606486$
$l(n-2)(3n-2) = 2,6284978$
$lD = 5,5321508$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\,2 = 0,3010300$
$8,0098688$
$l\mathfrak{A}\mathfrak{A} = +8,2194054$
$l\,. = 9,2710070$
$l\,2n = 1,4234379$
$7,8475691$
$lD = 5,5321508$
$l2nD = +6,9555887$
$l\alpha = +8,4857072$
$l(n-1) = 1,0883440$
$+7,3973632$
$lE = +6,6493696$
$l2n = 1,4234379$
$+8,0728075$

Ergo

Ergo $\mathfrak{E} = -0,0040013$

$(2n-3)(4n-3)G = -12,90796 \frac{c}{a}$

$G = -0,010975. \frac{c}{a}$

$+6(n-1)^2 G = -9,89097. \frac{c}{a}$

$\frac{3(5n-3)c}{2(n-1)a} = +7,74478. \frac{c}{a}$

$(2n-1)F = +2,14619. \frac{c}{a}$

Ergo $F = +0,084126. \frac{c}{a}$

$-2nF = -2,23032. \frac{c}{a}$

$-\frac{3c}{2(n-1)a} = -0,122390. \frac{c}{a}$

$\mathfrak{F} = -2,35271. \frac{c}{a}$

$-2nG = +0,29096. \frac{c}{a}$

$+\frac{3c}{2(n-1)a} = +0,20399. \frac{c}{a}$

$\mathfrak{G} = +0,49495. \frac{c}{a}$

$l\mathfrak{E} = -8,9817552$

$l(n-1) = 1,0883440$

$-7,8934112$

$l\frac{5n-3}{2} = 1,5002316$

$l(n-1) = 1,0883440$

$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0,4118876$

$l5 = 0,6989700$

$1,1108576$

$1,1108576 = l12,90796$

$1,3712844 = l(2n-3)$

$1,6991735 = l(4n-3)$

$3,0704579$

$-8,0403997 = lG$

$2,1766880 = l(n-1)^2$

$0,7781513 = l6$

$-0,9952390$

$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0,4118876$

$l3 = 0,4771213$

$0,8890089$

$l2,14619 = 0,3316683$

$l(2n-1) = 1,4067394$

$lF = +8,9249289$

$lG = -8,0403997$

$l2n = 1,4234379$

$l2nF = +0,3483668$

$l2nG = -9,4638376.$

XXXIV. Ex his igitur valoribus colligimus:

$$x = 1 + C - 0{,}014656 \cos.\eta^2 + 0{,}000446 \cos.\eta^4 + 0{,}084126.\tfrac{c}{a}\cos.\eta - 0{,}010975.\tfrac{c}{a}\cos.\eta^2$$

$$\tfrac{d\Phi}{d\zeta} = 13{,}134163 - \tfrac{3}{2}nC + 0{,}508445\cos.\eta^2 - 0{,}004001\cos.\eta^4 - 2{,}3527\tfrac{c}{a}.\cos.\eta + 0{,}4949.\tfrac{c}{a}\cos.\eta^2$$

vbi conſtans C ita definiri debet, vt motus medius ex poſteriori forma erutus praecise conueniat cum motu medio ex obſeruationibus deducto. In hunc autem finem poteſtates $\cos.\eta^2$ et $\cos.\eta^4$ ad cosinus angulorum ſimplicium reduci debent, quia inde partes conſtantes emergunt cum principali coniungendae. Scilicet ob $\cos.\eta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.2\eta$ et $\cos.\eta^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos.2\eta + \frac{1}{8}\cos.4\eta$, fit pars conſtans:

$13{,}386885 - \frac{3}{2}nC$ ipſi $n = 13{,}25586$ aequanda, vnde fit $\frac{3}{2}nC = 0{,}131025$, ideoque $C = 0{,}0065895$.

Euolutis autem poteſtatibus $\cos.\eta$ reperitur

$$x = 0{,}999428 - 0{,}007105\cos.2\eta + 0{,}000056\cos.4\eta + 0{,}07589\tfrac{c}{a}\cos.\eta - 0{,}00274\tfrac{c}{a}\cos.3\eta$$

$$\tfrac{d\Phi}{d\zeta} = 13{,}25586 + 0{,}252222\cos.2\eta - 0{,}000500\cos.4\eta - 1{,}9815\tfrac{c}{a}\cos.\eta + 0{,}1237\tfrac{c}{a}\cos.3\eta.$$

XXXV. Quo hinc facilius ipſum angulum Φ definire queamus, ponamus breuitatis gratia $\frac{d\Phi}{d\zeta} = n + r$ erit

$$\tfrac{d\Phi}{d\eta} = \frac{n+r}{n-1+r} = \frac{n}{n-1} - \frac{r}{(n-1)^2} + \frac{rr}{(n-1)^3}$$

fit

ſit $r = \alpha \cos. 2\eta + \beta \cos. 4\eta + \gamma \cos. \eta + \delta \cos. \eta^3$ erit

$rr = \frac{1}{2}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha \cos. 4\eta$ omiſſis reliquis terminis, qui ad ordines ſequentes deuoluerentur, et ob parvitatem facile negliguntur. Integratione ergo inſtituta prodit

$$\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta - \frac{\alpha \sin. 2\eta}{2(n-1)^2} - \frac{\beta \sin. 4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma \sin. \eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta \sin. 3\eta}{3(n-1)^2} + \frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta + \frac{\alpha\alpha \sin. 4\eta}{8(n-1)^3}$$

vbi eſt:

$$\alpha = +0,252222; \beta = -0,000500; \gamma = -1,9815.\frac{c}{a}; \delta = +0,1237.\frac{c}{a}$$

atque iam ante quidem C ita definiri debuiſſet, vt et hic particula $\frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta$ tolleretur, prodiretque ſecundum motum medium $\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta = \Delta + 1,081593\eta$. Singulis igitur terminis euolutis et in minuta ſecunda conuerſis habebitur:

$$\Phi = \Delta + 1.081593\eta - 173'',177 \sin. 2\eta + 1'',063 \sin. 4\eta + 2721''.\frac{c}{a} \sin. \eta - 57''.\frac{c}{a} \sin. 3\eta.$$

XXXVI. Sed cum η ex motu medio non innoteſcat, relatio primo inter ζ et η eſt ſtabilienda, quae ob $\Phi = \zeta + \eta$ elicitur:

$$\zeta = \Delta + \frac{1}{n-1}\eta - \frac{\alpha \sin. 2\eta}{2(n-1)^2} - \frac{\beta \sin. 4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma \sin. \eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta \sin. 3\eta}{3(n-1)^2} + \frac{\alpha\alpha \sin. 4\eta}{8(n-1)^3}$$

hincque colligitur:

$$\eta = \text{Conſt.} + 12,25586\zeta + 2122'',43 \sin.2\eta - 13'',023 \sin.4\eta - 33348'' \tfrac{c}{a} \sin.\eta + 694'' \tfrac{c}{a} \sin.3\eta$$

vnde haud difficulter ad datam ſolis longitudinem mediam angulus η colligitur, tum vero erit $\Phi = \eta + \zeta$. Denique diſtantia lunae a terra habebitur:

$$v = c\left(0,999428 - 0,007105\cos.2\eta + 0,000056\cos.4\eta + 0,07589 \tfrac{c}{a}\cos.\eta - 0,00274 \tfrac{c}{a}\cos.3\eta\right)$$

At ex maſſis Solis, lunae, et terrae quantitas c ita definitur vt ſit $\frac{n\,n\,c^3}{a^3} = \frac{T+L}{T+S} = \frac{T}{S}$, vnde patet ob actionem ſolis diſtantiam lunae mediam aliquantillum imminui.

XXXVII. In vero lunae motu eaedem iſtae inaequalitates quoque occurrunt, vnde haud inutile erat eas omni cura determinaſſe; ab Aſtronomis autem nomine variationis lunae deſignantur, quia omnes in vna tabula comprehendi poſſunt, argumentum diſtantiae ſolis a luna prae ſe ferente. Patet autem eius partem poſteriorem a parallaxi ſolis pendere, ſeu a fractione $\frac{c}{a}$, dum prior abſolute datur. Quare ſi quantitas huius inaequalitatis pro variis angulis per obſeruationes innoteſceret, inde viciſſim parallaxis ſolis concludi poſſet. Cum igitur Tabulae *Mayerianae* cum coelo ita exacte conueniant,

niant; vt inaequalitates tanquam ex obſeruationibus concluſae ſpectari queant, comparatio noſtrae formulae inuentae cum his Tabulis parallaxin ſolis nobis exhibere poterit. Conſideremus ſolum caſum, quo angulus $\eta = 90°$, quia tum pars variationis abſoluta euaneſcit, eritque per formulam noſtram variatio $= -34042''.\frac{c}{a}$ tabulae autem *Mayerianae* habent $-1', 57'' = -117''$ vnde ſequitur $\frac{a}{c} = \frac{34042}{117} = 291$, cui rationi cum ratio parallaxium ſit aequalis, parallaxis autem lunae media ſit $57', 15'' = 3435''$, erit parallaxis ſolis $= \frac{3435}{291} = 11\frac{4}{5}''$. Haec fortaſſe methodus parallaxin ſolis definiendi reliquis excepto veneris tranſitu, longe anteferenda videtur, ſi quidem tabulae *Mayerianae* nunquam vltra minutum a coelo diſſident; quia enim haec variationis portio ad $117''$ aſſurgit, leuis mutatio in parallaxi ſolis aſſumta ſenſibilem aberrationem a veritate produceret vt ſcilicet parallaxis ſolis prodiret $= 8\frac{1}{2}''$ tabulae *Mayerianae* loco $-117''$ habere deberent $-84''$, ex hac autem ſolis parallaxi foret $\frac{a}{c} = 400$. Conſiderari poteſt quoque maxima variatio angulo $\eta = 135°$ fere reſpondens, quae ex noſtra forma eſt $= -2122'' - 23050''.\frac{c}{a}$; at ex Tabulis *Mayerianis* $= -41', 41'' = -2501''$, vnde ſequitur $\frac{a}{c} = \frac{23050}{379}$, ſed haec concluſio minus eſt certa, ob effectum a parallaxi ſolis ortum multo minorem. Contra vero maxima variatio hinc potius oriri videtur $= -2202''$ ſeu $36', 42''$. Verum hic probe animaduerti oportet,

ex excentricitate partem quoque ipsi sin. 2η proportionalem nasci, quae in his tabulis cum vera variatione est coniuncta. Haecque est causa, cur parallaxin solis ex variatione vbi sin. $2\eta = 0$ et sin. $4\eta = 0$ feliciter determinare licuerit minime vero ex variatione maxima.

ANNO-

ANNOTATIO QVARVNDAM CAVTELARVM IN INVESTIGATIONE INAEQVALITATVM QVIBVS CORPORA COELESTIA IN MOTV PERTVRBANTVR OBSERVANDARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnis perfectio, quae adhuc in Theoria Aſtronomiae deſideratur, in reſolutione huius quaeſtionis continetur, vt trium pluriumue corporum, quae ſe mutuo in ratione duplicata inuerſa diſtantiarum attrahant, motus definiatur. Cum enim ex motibus Lunae, quos iam ſatis exacte per Theoriam aſſignare licuit, vires illae, quibus corpora coeleſtia in ſe mutuo agunt, penitus ſint confirmatae, nullum ſupereſt dubium, quin leues illae anomaliae, quae in motu planetarum tam primariorum quam ſecundariorum obſeruantur, eidem cauſae ſint attribuendae. In Saturno et Ioue iſta motus perturbatio adeo nimis eſt manifeſta, quam vt in dubium vocari poſſit; atque etiam in reliquis planetis, etſi eorum motus regulis *Kepleri* multo magis

eſt

eſt conformis, tamen nonnullae a Tabulis Aſtronomicis aberrationes obſeruantur, quae nulli alii cauſae niſi eorum actioni mutuae adſcribi poſſunt. Satellitum autem cum Iouis tum Saturni motum ſimilibus perturbationibus ac lunam eſſe obnoxium, obſeruationes ſatis manifeſto declarant.

2. Quanquam autem in Marte, Terra, Venere et Mercurio tales perturbationes minus ſunt conſpicuae, vt aberrationes a calculo aſtronomico ſolis elementis minus recte conſtitutis tribuendae videantur, tamen eorum motum non penitus Regulis *Keplerianis* eſſe conſentaneum euidentiſſime oſtendi poteſt. Si enim hi Planetae, vti iſtae Regulae a ſummo *Newtono* ſunt expoſitae, vnice ad ſolem ſecundum rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum pellerentur, non ſolum quisque motum ſuum in eodem plano ellipſim deſcribendo perficeret, ſed etiam haec ellipſis omnino foret immutabilis, ſuumque axem perpetuo in eodem ſitu eſſet conſeruatura. Cum igitur tam lineae nodorum, quam abſidum cunctorum planetarum etiam reſpectu ſtellarum fixarum non quieſcant, manifeſtum hinc conſequimur criterium, hos planetas non vnice ſolem verſus impelli, ſed iſta phaenomena aliis cauſis deberi, quarum effectus etiamſi potiſſimum in motu lineae abſidum et nodorum cernatur, tamen dubium eſt nullum, quin inde etiam vel minimae inaequalitates in ipſo earum motu proficiſcantur.

3. Quan-

3. Quantumuis autem Tabulae planetarum inferiorum ac praecipue terrae ad conſenſum obſeruationum accommodatae videantur, tamen ſaepenumero minutae quaedam aberrationes animaduertuntur, quae tabulas cuiusdam erroris arguunt, in quibus inueſtigandis nunc quidem fere omnis Aſtronomorum induſtria conſumitur, poſtquam craſſiora huius ſcientiae momenta ſatis felici cum ſucceſſu ſunt expedita. Verum nullo modo ſperare licet, iſtas leues aberrationes per ſolas obſeruationes vnquam ita in ordinem redigi poſſe, vt praedici queant, in quo omnis Aſtronomiae vis verſatur; minimi etiam errores, qui in obſeruationibus plane euitari nequeunt, tale inſtitutum omnino irritum reddunt, dum ſemper in dubio relinquunt, quanta pars re vera motum planetarum afficiat. Quemadmodum etiam ad eam accuratam motus Lunae cognitionem qua nunc quidem fruimur, ſolis obſeruationibus innixi nunquam certe peruenturi fuiſſemus, niſi Theoria in ſubſidium fuiſſet vocata.

4. Etſi igitur ſummum ſtudium, quod Aſtronomi ad artem obſeruandi perficiendam impendunt, imprimis eſt neceſſarium, tamen maxima incrementa huius ſcientiae potiſſimum a Theoria ſunt exſpectanda, qua niſi praxis adiuuetur, parum inde commodi ad veram cognitionem motuum coeleſtium redundare poteſt. Vniuerſa autem Theoria ad problema initio memoratum reducitur, vt motus plurium corporum, quae ſe mutuo attrahant in ratione

reciproca duplicata diſtantiarum, accurate determinetur. Solutionem vero huius problematis non ſolum eſſe difficillimam, ſed etiam ſi in genere tractetur, vires ingenii humani fere ſuperare, omnes qui in eo vires ſuas exercuerunt, ſatis ſuperque ſunt experti.

5. Si duo tantum eſſent corpora, quae ſe mutuo attrahant, quaeſtio nulli amplius difficultati eſſet obnoxia, cum vtrumque circa commune centrum grauitatis perfectam ellipſin eſſet deſcripturum. Verum ſtatim ac tria conſiderantur corpora, problema tam fit difficile, vt omnia artificia quae quidem adhuc ſunt detecta, ad id perfecte ſoluendum minime ſufficiant. Haud igitur vtilitate carituram arbitror, ſi has difficultates, earumque cauſas accuratius examinauero; quandoquidem illarum enodatio ne ſperari quidem poterit, niſi ante diligentiſſime fuerint perpenſae. Quin etiam haec ipſa contemplatio nouos aperiet fontes, ex quibus ſolutio petenda videtur, qui etſi initio parum adiumenti praebere videantur, tamen vberior meditatio fortaſſe nos continuo propius ad intentum ſcopum perducere valebit.

6. Quaeſtio ergo, quae omnem Aſtronomiae vim in ſe complectitur, ad Mechanicam ſeu motus ſcientiam refertur, cuius principia iam ita ſolide ſunt conſtituta, vt eorum applicatio ad caſum propoſitum nulla laboret difficultate; vnde cauſam tenebra-

nebrarum, in quibus adhuc circa accuratam motuum coeleſtium cognitionem verſamur, minime ignorantiae noſtrae in motus ſcientia tribuere licet. Peruenimus autem non difficulter, quotcunqne etiam fuerint corpora ſe mutuo attrahentia, ad aequationes differentio-differentiales, quae in ſe omnia motus phaenomena complectuntur, et ad quarum reſolutionem totum negotium reducitur. Non igitur difficultas in Mechanica motusque determinatione eſt ſita, ſed omnis in Analyſi continetur, cuius imperfectioni vnice eſt imputandum, quidquid adhuc in Theoria Aſtronomiae deſideratur.

7. Forma harum aequationum differentio-differentialium iam ſatis eſt nota, ex iis ſcriptis, quae cum de Luna, tum de perturbatione motus ſaturni prodierunt, vnde patet motum vniuscuiusque corporis niſi fiat in eodem plano, neceſſario ternis huiusmodi aequationibus includi: in quibus omnes quantitates variabiles, quae ad ſingula corpora pertinent, maxime ſint inter ſe permixtae; ita vt nullius corporis ſeorſim ſumti motus definiri queat, quin ſimul inaequalitates motus omnium reliquorum corporum inuoluantur. Ex quo ſumma difficultas, qua huiusmodi motuum determinatio impeditur, per ſe eſt perſpicua, neque vllum remedium extare videtur, niſi vt methodus generalis aperiatur aequationes differentio-differentiales quotcunque, in quibus variabiles vtcunque inter ſe fuerint permixtae, reſoluendi; talis autem methodus nimis ma-

gna ſcientiae Analyticae incrementa requirit, quam vt ea vnquam ſperare liceat.

8. Tanta ſcilicet impedimenta occurrerent, ſi problema de motu trium pluriumue corporum ſe mutuo attrahentium in genere et perfecte eſſet ſolvendum; pro dato autem caſu plerumque ſe offerunt eiusmodi commoda, quibus illa impedimenta multo redduntur leuiora. Veluti ſi quaeſtio ſit de tribus corporibus, Sole, terra ac Luna, huiusque motus, qualis ex terra ſpectatur, definiri debeat, qua quidem quaeſtione tota Lunae Theoria continetur; primum commode euenit, vt motus ſolis apparens tanquam cognitus ſpectari poſſit, propterea quod perturbationem in motu terrae ab attractione Lunae oriundam pro nihilo reputare licet. Deinde etiam ſolutio non mediocriter inde ſubleuatur, quod diſtantia Lunae prae ſolis diſtantia ſit perquam exigua, ſimulque vis Lunae abſoluta multo ſit minor vi terrae. Tum vero etiam excentricitas orbitae Lunaris non nimis magna, atque inclinatio eius ad planum eclipticae ſatis parua plurimum confert ad difficultates ſuperandas, his autem commodis Tabulae Lunares, quae quidem reliquis praeſtant, acceptae ſunt referendae.

9. His autem ſubſidiis nullus amplius locus relinqueretur, ſi vel Lunae a terra diſtantia eſſet multo maior, vel eius maſſa ſeu vis attractiua abſoluta multo fortior exiſteret, vel ſi orbita eius multo

multo maiorem haberet excentricitatem, vel denique si cum plano eclipticae multo maiorem angulum constitueret: quarum conditionum si vel vna vel plures in Luna deprehenderentur, eius motus hac ratione nullatenus definiri posset, neque eius inaequalitates per simplices angulos, vti in tabulis lunaribus fieri solet, repraesentare liceret. Si talis Luna terrae contigisset, vix patet, quomodo eius motus saltem ita prope cognosci potuisset, vt errores non fuerint vehementer enormes: hoc quippe casu Luna quasi medium quendam statum inter satellitem terrae et planetam primarium esset sortita, spectari deberet.

10. Cum igitur consueta methodus Lunae motum repraesentandi, tabulisque complectendi omni vsu destitueretur, si status Lunae tantillam mutationem accepisset; satis hoc est indicii, solitam motus Lunae repraesentationem naturae non esse conformem. Praeterquam enim quod motum Lunae tantum vero proxime definit, et accurata determinatio innumerabiles huiusmodi inaequalitates requireret, quarum praetermissio quidem in statu, quo Luna reuera versatur, errorem vix notabilem gignit; si alius status Lunae obtigisset, non solum inaequalitatum harum, quae adhuc essent notabiles, numerus in immensum augeri, sed etiam id incommodi facile accedere posset, vt istae infinitae inaequalitates ne seriem quidem conuergentem constituerent, verum continuo fierent maiores; ex quo istius mo-

di repraeſentatio motus Lunae omni plane vſu eſſet caritura.

11. Quo magis autem diſtantia Lunae a terra augeretur, eo grauiora etiam obſtacula motus determinationi aduerſarentur; neque tamen ideo aucta diſtantia continuo multiplicarentur. Nam ſimulac Luna eousque a terra fuiſſet remota, vt locum Veneris vel Martis eſſet occupatura, iſta obſtacula iterum ſed quaſi contrario quodam modo euaneſcerent, dum Luna motum planetae primarii eſſet ſecutura, cuius perturbationes, ſi quae a vi terrae efficerentur, alia plane methodo inueſtigari deberent. Haec ſcilicet inueſtigatio ſimilis foret illi, qua perturbationes motus ſaturni, aliusue planetae primarii, quae ab attractione alius planetae primarii oriuntur indagari ſolent; quae etſi per ſimiles formulas expeditur, tamen multo diſſimili modo inſtituitur; ibi enim Luna primum circa terram ſecundum regulas *Kepleri* moueri, aſſumitur, atque aberrationes ab his regulis quaeruntur; hic vero motus Lunae, quaſi circa ſolem ſecundum easdem regulas fieret, ſpectari, et aberrationes ab hoc motu regulari aſſignari deberent.

12. Quantumuis igitur motus Lunae determinatu ſit difficilis, ſi quidem determinatio ad omnes diſtantias, in quibus Luna a terra collocari potuiſſet, patere debeat, tamen dantur quaſi duo caſus extremi, quibus motus facillime definiri poſſet,

ſet, quos propterea probe expendi conueniet. Prior ſcilicet caſus, quo determinatio motus Lunae nulla difficultate laboraret, foret, ſi Luna terrae eſſet proxima tum enim ſecundum regulas *Kepleri* circa terram perfectam ellipſin eſſet deſcriptura, cuius alterum focum centrum terrae conſtanter occuparet. Poſterior vero caſus locum haberet, ſi Luna a terra tam longe eſſet remota, vt quaſi in regione Martis vel Veneris verſaretur; tum enim iterum motu regulari eſſet inceſſura et circa ſolem ellipſin deſcriptura, cuius alter focus in centro ſolis exiſteret. Vtroque autem caſu facile foret eius motum non ſolum per calculum definire, ſed etiam ad tabulas reuocare.

13. Hinc igitur colligimus veram motus Lunae, ſi neque terrae ſit proxima, neque ab ea nimis remota, determinationem ita comparatam eſſe debere, vt ambobus memoratis caſibus in determinationes illas ſimplices abeat. Atque hic inſignis defectus in methodo, qua motus Lunae ad certas regulas reuocari ſolet, ſtatim deprehenditur, quippe quae tantum ad alterum caſum extremum, refertur. Ita ſcilicet tantum motum Lunae definit, vt ſi diſtantia Lunae a terra euaneſceret, motus quidem regularis et regulis *Keplerianis* conformis eſſet proditurus; verum ſi Luna in immenſum a terra remoueretur, non ſolum non ad regularitatem illam, qua tum Luna eſſet progreſſura, appropinquaret, ſed potius ab ea in infinitum eſſet digreſſura. Nullum

lum igitur eſt dubium, quin huiusmodi methodus, quae ad vtrumque caſum extremum aeque inclinet, naturae rei multo magis foret conſentanea, atque negotium multo felicius eſſet expeditura.

14. His conſiderationibus etiam problema generale de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium non mediocriter adiuuari videtur. Sint enim propoſita tria corpora A, B, C, quae ſe inuicem in ratione reciproca duplicata attrahant, et quaeratur, vti in Aſtronomia quaeſtio inſtitui ſolet, motus reſpectiuus, quo corpora duo B et C, ſpectatori in A poſito moveri videbuntur; litterae autem A, B, C denotent maſſas horum corporum ſeu eorum vires attractrices abſolutas. Quodſi iam vnum horum corporum euaneſceret, haberetur caſus duorum corporum tantum, quorum motus ſine vlla difficultate definiri poſſet; vnde obtinemus illos caſus extremos, ad quas ſolutionem generalem aeque dirigi oportet. Iſtas igitur extremitates diligentius examinari operae erit pretium, verum ne difficultates nimium obruantur, motum omnium trium corporum in eodem plano fieri aſſumam, quoniam ſi difficultates pro hac hypotheſi eſſent ſuperatae, reliquae ex planorum diuerſitate oriundae haud difficulter vincerentur.

Problema 1.

15. Si tria corpora A, B, C ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, atque

que in eodem plano moueantur, definire motum corporum B et C qualis ſpectatori in corpore A poſito apparebit.

Solutio.

Quoniam corpus A tanquam in quiete perſiſtens conſiderari debet, ex quo motus binorum reliquorum ſpectetur, ducatur in plano motus per A linea recta ♈ A ♎ ad puncta aequinoctialia ſeu alia puncta in coelo fixa, directa; ac tempore quocunque ab epocha quadam elapſo t reperiantur bina reliqua corpora in B et C ad quae ex A ducantur rectae AB et AC. Vocentur ergo hae diſtantiae $AB = x$; $AC = y$; itemque anguli $\angle A B = p$; $\angle AC = q$, qui longitudinem vtriusque corporis referunt; tum ponatur horum angulorum differentia $BAC = q - p = s$, eritque iuncta recta $BC = V(xx + yy - 2xy \cos. s) = v$. Iam cum horum corporum maſſae ſint A, B, C, eaque ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, ſequentes habebimus vires acceleratrices: Tab. II. Fig. 1.

I. Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \end{cases}$

II. Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \end{cases}$

Corpus autem A ſollicitatur a corporibus B et C viribus acceleratricibus ſecundum $AB = \frac{B}{xx}$ ſecundum

$AC = \frac{C}{yy}$. Quare cum corpus A debeat in quiete retineri, hae vires ſecundum directiones contrarias in corpora B et C ſunt transferendae. Praeter vires ergo ſuperiores, ſi ducamus BM et CN parallelas ipſis CA et BA, inſuper has habebimus:

I. Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA\,vi = \frac{B}{xx} \\ BM\,vi = \frac{C}{yy} \end{cases}$

II. Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA\,vi = \frac{C}{yy} \\ CN\,vi = \frac{B}{xx} \end{cases}$

Vires ergo quibus haec corpora coniunctim ſollicitantur, ſunt:

Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA\,vi = \frac{A+B}{xx} \\ BC\,vi = \frac{C}{vv} \\ BM\,vi = \frac{C}{yy} \end{cases}$

Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA\,vi = \frac{A+C}{yy} \\ CB\,vi = \frac{B}{vv} \\ CN\,vi = \frac{B}{xx}. \end{cases}$

Quaeſtio ergo huc redit, quomodo motus corporum ab his viribus ſollicitatorum futurus ſit comparatus. Hunc in finem ductis ad rectam $\Upsilon \simeq$ perpendiculis BP et CQ, illas vires reſoluere licet, ſecundum directiones fixas, quarum alterae Bb et Cc ſint ipſi $\Upsilon \simeq$ parallelae, alterae vero BP et CQ ad eam normales; ad quod noſſe oportet ſingularum rectarum inclinationes ad axem $\Upsilon \simeq$. Ac primo quidem rectae BA et CN

eo

eo inclinantur angulo: $\curlyvee A B = \curlyvee N C = p$; rectae vero CA et BM angulo $\curlyvee A C = \curlyvee M B = q$; verum recta BC ad axem inclinatur angulo CBb, cuius sinus est $= \frac{BP - CQ}{v}$ et cosinus $= \frac{AP - AQ}{v}$. Cum iam sit $BP = x \sin. p$; $AP = x \cos p$; $CQ = y \sin. q$ et $AQ = y \cos. q$ fiet

$$\sin. CBb = \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v} \text{ et } \cos. CBb = \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}.$$

Hinc ergo corpus B sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Bb	secundum BP
$\frac{A+B}{xx} \cos. p$	$\frac{A+B}{xx} \sin. p$
$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$	$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$
$+ \frac{C}{yy} \cos. q$	$+ \frac{C}{yy} \sin. q.$

Porro autem corpus C sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Cc	secundum CQ
$\frac{A+C}{yy} \cos. q$	$\frac{A+C}{yy} \sin. q$
$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$	$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$
$+ \frac{B}{xx} \cos. p$	$+ \frac{B}{xx} \sin. p.$

Ponamus breuitatis gratia has vires:

$$\frac{A+B}{xx} \cos. p + \frac{C(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \cos. q = P$$
$$\frac{A+B}{xx} \sin. p + \frac{C(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \sin. q = Q$$
$$\frac{A+C}{yy} \cos. q - \frac{B(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \cos. p = R$$
$$\frac{A+C}{yy} \sin. q - \frac{B(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \sin. p = S$$

eritque ex principiis Mechanicis sumto elemento temporis dt constante:

$$\frac{2}{dt^2}dd.x\cos.p+P=0;\ \frac{2}{dt^2}dd.x\sin.p+Q=0$$
$$\frac{2}{dt^2}dd.y\cos.q+R=0;\ \frac{2}{dt^2}dd.y\sin.q+S=0$$

Hinc autem per idoneam combinationem elicitur:

$$P\cos.p+Q\sin.p+\frac{2}{dt^2}(ddx-xdp^2)=0$$
$$Q\cos.p-P\sin.p+\frac{2}{dt^2}(2dxdp+xddp)=0$$
$$R\cos.q+S\sin.q+\frac{2}{dt^2}(ddy-ydq^2)=0$$
$$S\cos.q-R\sin.q+\frac{2}{dt^2}(2dydq+yddq)=0.$$

At ex superioribus formulis fit:

$$P\cos.p+Q\sin.p=\frac{A+B}{xx}+\frac{C(x-y\cos.s)}{v^3}+\frac{C\cos.s}{yy}$$
$$Q\cos.p-P\sin.p=\frac{-Cy\sin.s}{v^3}+\frac{C\sin.s}{yy}$$
$$R\cos.q+S\sin.q=\frac{A+C}{yy}-\frac{B(x\cos.s-y)}{v^3}+\frac{B\cos.s}{xx}$$
$$S\cos.q-R\sin.q=\frac{+Bx\sin.s}{v^3}-\frac{B\sin.s}{xx}$$

vnde pro motu amborum corporum determinando sequentes quatuor aequationes prodibunt:

I. $ddx-xdp^2+\frac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+B}{xx}+\frac{C(x-y\cos.s)}{v^3}+\frac{C\cos.s}{yy}\right)=0$

II. $2dxdp+xddp+\frac{1}{2}dt^2\left(\frac{C\sin.s}{yy}-\frac{Cy\sin.s}{v^3}\right)=0$

III. $ddy-ydq^2+\frac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+C}{yy}+\frac{B(y-x\cos.s)}{v^3}+\frac{B\cos.s}{xx}\right)=0$

IV. $2dydq+yddq+\frac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3}-\frac{B\sin.s}{xx}\right)=0.$

Coroll.

Coroll. 1.

16. Circa has aequationes in genere id tantum annotandum duco quod si prima multiplicetur per $y \sin. s$; secunda per $\frac{(A+C)x}{C} - y \cos. s$ tertia per $-x \sin. s$ et quarta per $\frac{(A+B)y}{B} - x \cos. s$, summa productorum futura sit:

$$(yddx - xddy)\sin.s + xy(dq^2 - dp^2)\sin.s + \frac{(A+C}{C}(xxddp + 2xdxdp) + \frac{A+B}{B}(yyddq + 2ydydq) - 2ydxdp\cos.s - xyddp\cos.s - 2xdydq\cos.s - xyddq\cos.s = 0$$

cuius integrale est:

$$\frac{A+C}{C}xxdp + \frac{A+B}{B}yydq + (ydx - xdy)\sin.s - xy(dp+dq)\cos.s = \alpha dt.$$

Coroll. 2.

17. Si haec ad motum Lunae transferre velimus, in A terra constituatur et B pro sole, C vero pro Luna habeatur. Cum autem magnitudo massae Lunae non in computum veniat, siquidem ad perturbationem motus terrae inde oriundam hic non respicimus, facto $C = 0$, has habebimus aequationes:

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{A+B}{xx} = 0$
II. $2dxdp + xddp = 0$
} pro motu solis

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$
IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{B\,x\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$
} pro motu Lunae.

Coroll. 3.

18. Motus ergo ſolis ex terra apparens erit regularis ſeu regulis *Keplerianis* conformis. Pro Luna autem alter caſus extremus locum habebit, ſi diſtantiae x et v ſint quaſi infinities maiores quam y, ſeu Luna circa terram in minima diſtantia reuolueretur, quo caſu etiam eius motus regulis *Keplerianis* foret conformis, hisque aequationibus contineretur:

III. $ddy - y\,dq^2 + \frac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{A}{yy} = 0$

IV. $2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$

qui caſus etiam ex generalibus formulis naſcitur, ſi maſſa ſolis B vt euaneſcens ſpectetur.

Coroll. 4.

19. Alter autem caſus extremus obtinebitur, quo Luna veluti planeta primarius circa ſolem reuolueretur, ſi maſſa terrae A pro nihilo habeatur; hoc igitur caſu motus Lunae ex terra ſpectatus his aequationibus exprimeretur.

III. $ddy - y\,dq^2 + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$

IV. $2\,dy\,dq + y\,ddq + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{B\,x\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0.$

Coroll. 5.

20. Etſi autem hoc caſu motus Lunae ſit regularis, tamen reſolutio iſtarum aequationum minus patet;

patet; propterea quod motum ex terra visum definiunt, sicque inaequalitatem secundam, vti ab Astronomis vocatur, simul inuoluunt. Quamobrem harum aequationum resolutio a posteriori est cognita; quae ergo si fuerit expedita, non parum ad resolutionem aequationum generalium collatura esse videtur.

Coroll. 6.

21. Hoc igitur certum est, resolutionem formularum generalium seu saltem earum, quae §. 17. pro motu Lunae sunt exhibitae, ita comparatam esse debere, vt tam formularum §. 18. quam formularum §. 19. integrationem in se complectatur. Illarum scilicet integratio oriri debet ex generali, si ponatur $B=0$, harum vero si $A=0$, quare vtrumque casum seorsim euoluamus.

Problema 2.

22. Propositae sint sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \tfrac{A}{yy} = 0 \text{ et } 2dydq + yddq = 0$$

quarum integralia inueniri oporteat.

Solutio.

Posterior aequatio per y multiplicata ob dt constans statim praebet hoc integrale $yydq = \alpha dt$. Deinde

Deinde prima per $2dy$ posterior vero per $2ydq$ multiplicata summam dant:

$$2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq + dt^2 \cdot \frac{\mathfrak{A}dy}{yy} = 0$$

cuius integrale est:

$$dy^2 + yydq^2 = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{\mathfrak{A}dt^2}{y}.$$

Cum igitur sit $dq = \frac{\alpha dt}{yy}$ erit

$$dy^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{yy} = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{\mathfrak{A}dt^2}{y}$$

ideoque $ydy = -dt\sqrt{(\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha)}$ vnde fit

$$dt = \frac{-ydy}{\sqrt{(\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha)}} \text{ et } dq = \frac{-\alpha dy}{y\sqrt{(\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha)}}.$$

Quo autem constantes arbitrarias α et $\mathfrak{C}$ commodius definiamus pro y introducamus angulum θ, vt sit $y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta}$ et $dy = \frac{-nc\,d\theta\,\sin.\theta}{(1-n\cos.\theta)^2}$ et $\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha = \frac{\mathfrak{C}cc + \mathfrak{A}c - n\mathfrak{A}c\cos.\theta - \alpha\alpha + 2n\alpha^2\cos.\theta - nn\alpha\alpha\cos.\theta^2}{(1-n\cos.\theta)^2}$

statuatur $\alpha^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{A}c$ et $\mathfrak{C}cc + \mathfrak{A}c - \alpha\alpha = nn\alpha\alpha$, seu

$$\mathfrak{C}cc + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}c = \tfrac{1}{2}nn\mathfrak{A}c \text{ ideoque } \mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{A}}{2c}(1-nn)$$

eritque $\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha = \frac{\frac{1}{2}nn\mathfrak{A}c\sin.\theta^2}{(1-n\cos.\theta)^2}$ et $\sqrt{(\mathfrak{C}yy + \mathfrak{A}y - \alpha\alpha)} = \frac{n\sin.\theta}{1-n\cos.\theta}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}c}$.

Quibus valoribus substitutis habebimus:

$$dt = \frac{cc\,d\theta}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{A}c}} \text{ et } dq = d\theta$$

ideoque per nouam variabilem θ reliquas ita definimus vt sit:

$$q = f + \theta;\ y = \frac{c}{1-n\cos.\theta} \text{ et } dt = \frac{d\theta}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{A}}}c^2.$$

Coroll.

Coroll. 1.

23. Eodem modo etiam ſuperiores aequationes motum ſolis continentes conſtruentur:

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{A+B}{xx} = 0 \text{ et } 2dxdp + xddp = 0$$

ſi enim breuitatis gratia ponamus $A+B=E$ erit

$$p = e+\eta;\ x = \frac{a}{1-m\cos.\eta};\ dt = \frac{d\eta}{(1-m\cos.\eta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{E}}a^{\frac{3}{2}}.$$

Cum autem vtrinque elementum temporis dt ſit idem, erit

$$\frac{d\theta}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{A}}c^{\frac{3}{2}} = \frac{d\eta}{(1-m\cos.\eta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{E}}a^{\frac{3}{2}}.$$

Coroll. 2.

24. Si nolimus nouam variabilem introducere, quoniam inuenimus, $\alpha\alpha = \frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C} = -\frac{A}{2c}(1-nn)$, erit $\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)} = \sqrt{\frac{A}{2c}}(-cc+2cy-yy+nnyy) = \sqrt{\frac{A}{2c}}((1+n)y-c)(c-(1-n)y)$, ſicque habebimus

$$dt = \frac{-ydy\sqrt{2c}}{\sqrt{A((1+n)y-c)(c-(1-n)y)}} \text{ et } dq = \frac{-cdy}{y\sqrt{((1+n)y-c)(c-(1-n)y)}}$$

quae formulae ita ad ellipſin ſunt accommodatae, vt $\frac{c}{1-n}$ denotet diſtantiam apogei, et $\frac{c}{1+n}$ diſtantiam perigei, vnde diſtantia media eſt $\frac{c}{1-nn}$, excentricitas $=n$, et c ſemiparameter.

Coroll. 3.

25. Simili modo pro motu ſolis, nullam nouam variabilem introducendo habebimus has formulas:

$$dt = \frac{-xdx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-adx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}$$

vbi signum — praefixi, vt motus ab apogeo computetur.

Coroll. 4.

26. Sin autem nouam variabilem vtpote angulum θ introducere velimus, id etiam infinitis aliis modis fieri potest. Veluti si ponamus $y = \frac{c(1+v\cos.\theta)}{1-n\cos.\theta}$, reperiemus:

$$dt = \frac{d\theta(1+v\cos.\theta)}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{A}(1+nv)c^3} \text{ et } dq = \frac{d\theta}{1+v\cos.\theta}\sqrt{(1-vv)}$$

vbi distantia apogei est $= \frac{c(1+v)}{1-n}$; distantia perigei $= \frac{c(1-v)}{1+n}$ distantia media $= \frac{c(1+nv)}{1-nn}$, et excentricitas $= \frac{n+v}{1+nv}$, tum vero semiaxis coniugatus $= c\sqrt{\frac{1-vv}{1-nn}}$, et semiparameter $= \frac{c(1-vv)}{1+nv}$.

Problema 3.

27. Si propositae sint sequentes aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y-x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

existente $s = q - p$ et

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{E}{xx} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

earum integralia inuenire.

Solutio.

Solutio.

Pro relatione quantitatum x et p ad tempus t iam inuenimus:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}$$

qui valores in ipsis propositis aequationibus sunt adhibendi. Quod autem ad has ipsas aequationes attinet, recordandum est iis designari eiusmodi motum corporis C, qui ad punctum B relatus futurus esset regularis. Ducta ergo Bb axi $\curlyvee$ parallela si ponamus angulum $CBb = u$, ob $BC = v = \sqrt{(xx+yy-2xy\cos.s)}$ habebimus pro hoc motu istas aequationes:

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{B((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} \text{ et } du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}.$$

At est $\sin.u = \frac{x\sin.p - y\sin.q}{v}$ et $\cos.u = \frac{x\cos.p - y\cos.q}{v}$.

Atque hinc elicitur:

$$du = \frac{xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\sin.s - xy(dp+dq)\cos.s}{vv}$$

vnde nanciscimur:

$$xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\sin.s - xy(dp+dq)\cos.s = \frac{-b\,v\,dv}{\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = dt\sqrt{\tfrac{1}{2}B}b.$$

Cum igitur primo x et p deinde etiam v detur per t, ista aequatio $xx - 2xy\cos.s + yy = vv$, cum hac coniuncta determinabit duas reliquas quantitates incognitas y et q. Verum definito v per t, ex eo primum quaeratur angulus $u = CBb$, quo inuento ob $x\sin.p - y\sin.q = v\sin.u$ et $x\cos.p - y\cos.q = v\cos.u$

erit tang. $q = \frac{x \sin. p - v \sin. u}{x \cos. p - v \cos. u}$; et $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv \cos.(p-u))}$. Verum inuenimus esse $u = \int \frac{-b\,d\,v}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$, et angulus q etiam facilius ex hac forma, tang. $(q-p) = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v \cos.(p-u)}$ erui potest, eritque idcirco

tang. $s = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v \cos.(p-u)}$ seu sin. $s = \frac{v \sin.(p-u)}{y}$.

Coroll. 1.

28. Pro aequationibus ergo differentio-differentialibus propositis hanc nacti sumus resolutionem. Primo ad datum tempus t quaerantur valores x et p per has formulas:

$$dt = \frac{-x\,d\,x\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,d\,x}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}.$$

Deinde ad idem tempus colligatur valor ipsius v per hanc formulam

$$dt = \frac{-v\,d\,v\sqrt{2b}}{\sqrt{E((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$$

quo inuento definiatur porro angulus u vt sit:

$$du = \frac{-b\,d\,v}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = \frac{d\,t}{v\sqrt{v}}\sqrt{\tfrac{1}{2}}B\,b$$

vnde tandem habebitur $y = \sqrt{(xx+vv-2xv\cos.(p-u)}$ et tang. $q = \frac{x \sin. p - v \sin. u}{x \cos. p - v \cos. u}$ seu tang. $(q-p) =$ tang. $s = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v \cos.(p-u)}$.

Coroll. 2.

29. Si igitur proponantur resoluendae hae aequationes latius patentes

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{y^2 y} + \frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B x \sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{E}{x^2} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

existente $vv = xx + yy - 2xy\cos.s$ et $s = q - p$; solutionem iam inuenimus pro binis casibus extremis altero quo $B = 0$ (in probl. 2.) altero quo $A = 0$ (in probl. 3.).

Coroll. 3.

30. Ponamus pro casu $B = 0$ prodiisse $y = P$ et $q = Q$ pro casu autem $A = 0$ prodiisse $y = R$ et $q = S$, ac manifestum est solutionem formularum latius patentium, quae sit $y = T$ et $q = V$ ita esse debere comparatam, vt posito $B = 0$ fiat $T = P$ et $V = Q$, posito autem $A = 0$ fiat $T = R$ et $V = S$, vnde iam quodammodo solutionis generalis indolem colligere licet.

Coroll. 4.

31. Solutio autem casus posterioris, quo $A = 0$, etsi rei natura considerata, motuque ad corpus B relato, sit facilis, tamen si aequationes nostras differentio-differentiales spectemus, difficillime constat, quemadmodum solutio inuenta ex iis immediate elicui potuerit. Posito enim $A = 0$, solutio vix minus recondita videri debet, quam si non esset $A = 0$.

Coroll. 5.

32. Pro motu ergo Lunae accurate determinando, atque adeo in genere problemate de motu trium corporum se mutuo attrahentium resoluendo maximum adiumentum inde merito est expectandum, vt casus ille quo $A=0$, ex sola contemplatione formularum differentio-differentialium euoluatur. Hoc saltem est certum, nisi hunc casum expedire valeamus, multo magis de solutione generali esse desperandum.

Coroll. 6.

33. Cum igitur pro hoc casu solutio, quam a posteriori concinnauimus constet, methodus tantum Analytica idonea et quasi sponte se offerens desideratur, cuius ope eadem illa solutio a priori ipsas aequationes differentio-differentiales tractando erui queat. Nullum enim est dubium, quin eadem methodus pro solutione generali minime successu sit caritura.

Coroll. 7.

34. Quoniam a posteriori iam valores finitos pro quantitatibus y et q elicuimus, haud abs re erit earum differentialia quoque contemplari; quorum euolutio cum laborem non parum taediosum requirat, ea hic apponam:

$$dq = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) + xdp(x - v\cos.(p-u))}{yy}$$

$$ds = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) - vdp(v - x\cos.(p-u))}{yy}$$

$$dy = \frac{dx(x - v\cos.(p-u)) + dv(v - x\cos.(p-u)) + xv(dp - du)\sin.(p-u)}{y}$$

vnde componitur:

$$dy^2 + yydq^2 = dx^2 + xxdp^2 + dv^2 + vvdu^2 - 2dxdv\cos.(p-u) - 2xvdpdu\cos.(p-u) + 2xdvdp\sin.(p-u) - 2vdxdu\sin.(p-u).$$

Denique si ex aequatione, qua v per t determinatur, constantes b et i per integrationem ingressae iterum per differentiationem tollantur, prodibit: $d^2v + \frac{2dvdv}{v} + \frac{Bdt^2dv}{2v^3} = 0$, quae propterea aequationibus propositis satisfacere est censenda.

Scholion.

35. Hae formulae autem, quarum ope ista resolutio aequationum casu $A = 0$, obtineri posset, nimis sunt complicatae, earumque inuentio ipsa nimis recondita, quam vt Analystae occurrere possent. Quo autem inuestigatio directa est difficilior, eo magis in eam inquirendum videtur, quoniam inde procul dubio insignia subsidia ad problema generale expediendum merito expectare licet. Cum autem hoc artificium, quo solutio casus $A = 0$, tam facilis euasit, multo latius pateat, atque ad omnes leges attractionis extendatur, ex contemplatione huius maioris amplitudinis facilius fortasse id, quod quaeri-

mus,

mus, elici poterit; vnde idem Problema latiſſimo ſenſu acceptum ſimili modo reſolui conueniet.

Problema 4.

36. Si corpora A et C ad corpus B attrahantur in ratione quacunque diſtantiarum ab eo, eaque in eodem plano vtcunque moueantur, definire motum reſpectiuum, quo ambo corpora B et C ſpectatori in A poſito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia omnia ad ſpectatorem in A poſitum ſunt referenda, ponantur, vt ante, diſtantiae $AB=x$; $AC=y$; $BC=v$; et anguli $\measuredangle AB=p$; $\measuredangle AC=q$ et $BAC=q-p=s$; vt ſit $v=\sqrt{(xx+yy-2xy\cos.s)}$. Tum ſit vis acceleratrix qua corpus A ad B trahitur $=X$, et ea qua corpus C ad B attrahitur $=V$; eritque pro puncto A quaſi fixo ſpectato, vis acceleratrix

qua B ſollicitatur ſecundum $BA=X$
qua C ſollicitatur ſecundum $CB=V$
qua C ſollicitatur ſecundum $CN=X$.

Hinc ratiocinium ſimili modo quo ſupra inſtituendo obtinebimus ſequentes quatuor aequationes:

I. $ddx-xdp^2+\frac{1}{2}dt^2.X=0$. II. $2dxdp+xddp=0$

III. $ddy-ydq^2+\frac{1}{2}dt^2.(\frac{y-x\cos.s}{v}.V+X\cos.s)=0$

IV. $2dydq+yddq+\frac{1}{2}dt^2.(\frac{x\sin.s}{v}.V-X\sin.s)=0$.

Bina-

Binarum autem priorum ſolutio eſt in promtu, ſecunda enim praebet $xxdp = \alpha dt$, ideoque $dp = \frac{\alpha dt}{xx}$; qui valor in prima ſubditus dat: $ddx - \frac{\alpha\alpha dt^2}{x^3} + \frac{1}{2}Xdt^2 = 0$, qui per $2dx$ multiplicatus pro integrali habet:

$$dx^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{xx} + dt^2 \int X dx = \mathfrak{C} dt^2$$

vnde fit

$$dt = \frac{-xdx}{\sqrt{(\mathfrak{C}xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}} \text{ et } dp = \frac{-\alpha dx}{x\sqrt{(\mathfrak{C}xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}}.$$

Quanquam autem nullus patet modus, quo binae poſteriores aequationes reſolui queant, tamen conſideratio, quod motus corporis C ex B ſpectatus ſit determinabilis, earum ſolutionem largitur, ſi enim ponamus angulum $CBb = u$, ita vt ſit:

$$\text{ſin.}u = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - y\,\text{ſin.}\,q}{v}; \quad \text{cof.}u = \frac{x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q}{v}$$

et $\text{tang.}\,q = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - v\,\text{ſin.}\,u}{x\,\text{cof.}\,p - v\,\text{cof.}\,u}$; $y = V(xx + vv - 2xv\,\text{cof.}(p-u))$

hincque $\text{tang.}\,s = \frac{v\,\text{ſin.}\,(p-u)}{x - v\,\text{cof.}\,(p-u)} = \text{tang.}(q-p)$

inter v, V et u ſimiles habebuntur aequationes, atque inter x, X et p, ſicque binae poſteriores aequationes aequiualebunt iſtis:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.V = 0 \text{ et } 2dvdu + vddu = 0$$

vnde ſequentes valores integrales eliciuntur:

$$dt = \frac{-vdv}{\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}; \quad du = \frac{-\gamma dv}{v\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}$$

quae ſimul aequationibus III et VI. ſuperioribus ſatisfacere ſunt cenſendae.

Coroll. 1.

37. Si ex aequatione inter v et t constantes δ et γ per differentiationem tollantur, obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus:

$$vd^3v + 3dvddv + \tfrac{1}{2}dt^2(3\,\mathrm{V}dv + vd\mathrm{V}) = 0$$

quae aequatio facile quoque deducitur ex formulis:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{V}dt^2 = 0 \text{ et } 2dvdu + vddu = 0$$

nam prior dat $du^2 = \frac{d\,dv}{v} + \frac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{\mathrm{V}}{v}$, ideoque differentiando:

$2duddu = \frac{d^3v}{v} - \frac{dvddv}{vv} + \frac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{vd\mathrm{V} - \mathrm{V}dv}{vv}$, qui valores in altera per $2du$ multiplicata $4dvdu^2 + 2vduddu = 0$ substituti praebent aequationem inuentam.

Coroll. 2.

38. Haec quidem sunt facilia, sed cardo rei in hoc versatur, vt certa assignetur methodus, cuius ope inuentae formulae differentiales primi gradus, immediate ex quatuor aequationibus primo inventis erui queant. Atque in hoc negotio eximia Analyseos promotio consistere videtur.

Scholion.

39. Cum autem nulla adhuc pateat via hoc praestandi, ipsa huius defectus commemoratio vtilitate non caritura videtur, qua sagacitas Analystarum incitetur. Quin etiam haud alienum erit problema

blema de tribus corporibus ſe mutuo attrahentibus, in ſenſu latiſſimo euoluere, vt attractio legem diſtantiarum quamcunque ſequatur, ſaepe numero enim calculi compendia et artificia in problematibus generalioribus facilius inueniuntur, quam in ſpecialioribus, quoniam ipſa limitatio non raro impedit, quominus ratio artificiorum, quae adhiberi queant, perſpiciatur.

Problema 5.

40. Si tria corpora A, B, C ſe mutuo attrahant in ratione quacunque diſtantiarum, eorumque motus in eodem fiat plano, determinare motum reſpectiuum, quo corpora B et C ſpectatori in A poſito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia hic corporum actio mutua ſpectari debet, eorum maſſae in computum ſunt ducendae. Sint igitur vires acceleratrices, quibus corpus A vrgetur ad $B=BX$, et ad $C=CY$, quae in reliqua corpora translatae ſuppeditabunt cum iis, quibus ea actu ſollicitantur ſequentes vires acceleratrices:

Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = (A+B)X \\ BC \text{ vi} = CV \\ BM \text{ vi} = CY \end{cases}$

Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA\ vi = (A+C)Y \\ CB\ vi = BV \\ CN\ vi = BX \end{cases}$

vbi X, Y et V ſunt eae diſtantiarum $AB = x$; $AC = y$ et $BC = v$ functiones, quibus vires attractiuae praeter maſſas ſunt proportionales. Hinc igitur pro motu corporum ſequentes aequationes colligentur.

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2((A+B)X + \frac{C(x-y\cos.s)}{v}V + CY\cos.s) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \frac{1}{2}dt^2(CY\sin.s - \frac{Cy\sin.s}{v}V) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2((A+C)Y + B\frac{(y-x\cos.s)}{v}V + BX\cos.s) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2(\frac{Bx\sin.s}{v}V - BX\sin.s) = 0$

vbi eſt

$$vv = xx + yy - 2xy\cos.s \text{ et } s = q - p.$$

Verum praeter has aequationes aliae exhiberi poſſunt motum pariter in ſe continentes, quae oriuntur, ſi motus corporum A et C relatiuus, quales ſpectatori in B poſito cerneretur, ſimili modo euolvatur. Poſito autem angulo $CBb = u$ vt ſit

$$\sin.u = \frac{x\sin.p - y\sin.q}{v} \text{ et } \cos.u = \frac{x\cos.p - y\cos.q}{v}$$

obtinebuntur hae aequationes:

$ddv - vdu^2 + \frac{1}{2}dt^2((B+C)V + \frac{A(v-x\cos.(p-u))}{y}Y + AX\cos.(p-u)) = 0$

$2dvdu + vddu + \frac{1}{2}dt^2(AX\sin.(p-u) - \frac{Ax\sin.(p-u)}{y}Y) = 0$

$ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2((A+B)X + \frac{C(x-v\cos.(p-u)}{y}Y + CV\cos.(p-u) = 0$

$2dxdp + xddp + \frac{1}{2}dt^2(\frac{Cv\sin.(p-u)}{y}Y - CV\sin.(p-u)) = 0$

quae duae poſtremae cum ſuperiorum I et II conueniunt ob

$y\sin.s = v\sin.(p-u)$ et $y\cos.s = x - v\cos.(p-u)$.

Quanquam ergo motus corporum per quatuor aequationes tantum determinatur, iis tamen duae hic inuentae commode adiunguntur, quippe quae non parum ad ſolutionem idoneam inueniendam conferre poſſe videntur; ſicque habebimus ſex ſequentes aequationes, quarum autem quaeque quaternae problemati ſoluendo ſufficiunt.

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2((A+B)X + \frac{x-y\cos.s}{v}CV + CY\cos.s) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \frac{1}{2}dt^2((CY\sin.s - \frac{y}{v}.CV\sin.s) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2((A+C)Y + \frac{y-x\cos.s}{v}BV + BX\cos.s) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2(\frac{x}{v}.BV\sin.s - BX\sin.s) = 0$

V. $ddv - vdu^2 + \frac{1}{2}dt^2((B+C)V + \frac{x-y\cos.s}{v}AX + \frac{y-x\cos.s}{v}AY) = 0$

VI. $2dvdu + vddu + \frac{1}{2}dt^2(\frac{y}{v}AX\sin.s - \frac{x}{v}AY\sin.s) = 0$.

Coroll. 1.

41. Praeterquam quod eſt $s = q - p$, circa has quantitates notari meretur eſſe $vv = xx + yy - 2xy\cos.s$, tum vero $v\sin.u = x\sin.p - y\sin.q$ et $v\cos.u = x\cos.p - y\cos.q$; vbi anguli p, q et u inclinationes rectarum AB, AC et BC ad rectam fixam $\Upsilon\simeq$ denotant.

Porro autem eſt $x : y : v = \text{ſin.}(q-u) : \text{ſin.}(p-u) : \text{ſin.}\, s$ ſiue

$$\frac{x}{\text{ſin.}(q-u)} = \frac{y}{\text{ſin.}(p-u)} = \frac{v}{\text{ſin.}\, s} \quad \text{et}$$

$x = y \cos. s + v \cos.(p-u)$; $v = x \cos.(p-u) - y \cos.(q-u)$; et $y = x \cos. s - v \cos.(q-u)$.

Coroll. 2.

42. His aequationibus diuerſis modis combinandis aliae non incongruae formari poſſunt; imprimis autem duae ſunt notandae combinationes, quae ad aequationes integrabiles deducunt. Prima oritur

II. $\frac{x}{C}$ + IV. $\frac{y}{B}$ + VI. $\frac{v}{A}$ vnde fit

$$\frac{2xdxdp+xxddp}{C} + \frac{2ydydq+yyddq}{B} + \frac{2vdvdu+vvddu}{A} = 0$$

quae integrata dat:

$$\frac{xxdp}{C} + \frac{yydq}{B} + \frac{vvdu}{A} = \alpha\, dt.$$

Coroll. 3.

43. In altera omnes ſex coniunguntur hoc modo:

I. $\frac{2dx}{C}$ + II. $\frac{2xdp}{C}$ + III. $\frac{2dy}{B}$ + IV. $\frac{2ydq}{B}$ + V. $\frac{2dv}{A}$ + VI. $\frac{2vdu}{A}$

vnde emergit:

$$\frac{2dx\,ddx+2xdxdp^2+2xxdpddp}{C} + \frac{2dyddy+2ydydq^2+2yydqddq}{B}$$
$$+ \frac{2dvddv+2vdvdu^2+2vvduddu}{A} +$$

$$dt^2\left\{\begin{array}{l}+\frac{(A+B)}{C}Xdx+\frac{x-y\cos.s}{v}Vdx+Ydx\cos.s+Yxdp\sin.s-\frac{xy}{v}Vdp\sin.s\\+\frac{(A+C)}{B}Ydy+\frac{y-x\cos.s}{v}Vdy+Xdy\cos.s-Xydq\sin.s+\frac{xv}{v}dq\sin.s\\+\frac{(B+C)}{A}Vdv+\frac{x-y\cos.s}{v}Xdv+\frac{y-x\cos.s}{v}Ydv+Xydu\sin.s-Yxdu\sin.s\end{array}\right\}=0$$

Coroll. 4.

44. Iam vero est $\frac{x-y\cos.s}{v}dx+\frac{y-x\cos.s}{v}dy+\frac{xyds\sin.s}{v}=dv$ et

$$\frac{x-y\cos.s}{v}dv+dy\cos.s-y(dq-du)\sin.s=dx$$

$$\frac{y-x\cos.s}{v}dv+dx\cos.s+x(dp-du)\sin.s=dy$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{dx^2+xxdp^2}{C}+\frac{dy^2+yydv^2}{B}+\frac{dv^2+vvdu^2}{A}$$
$$+(A+B+C)dt^2\left(\frac{\int Xdx}{C}+\frac{\int Ydy}{B}+\frac{\int Vdv}{A}\right)=0$$

quae aequatio principium conseruationis virium vivarum in se complectitur.

Coroll. 5.

45. Patet hinc quantae sint vtilitatis binae aequationes postremae V et VI, etiamsi in reliquis iam contineantur. Si enim sit $A=0$, aequationes quatuor priores nullam idoneam determinationem suppeditant; ex illis autem facillime ad datum quodvis tempus tam distantia v quam angulus u assignantur. Atque hinc merito concludere videor, in inuestigatione perturbationis motus planetarum ab his postremis aequationibus non exiguum fructum iure

spera-

ſperari poſſe, qui iis neglectis vix ac ne vix quidem obtineri queat.

Scholion.

46. Quoniam igitur vidimus, motum lunae, ſi terrae eſſet valde vicina nullo labore definiri poſſe, dum is ad terram referatur, ſin autem luna multo magis a terra diſtaret, vt planetis principalibus eſſet accenſenda, tum eius motum ad ſolem referri conuenire; hinc concludendum videtur pro caſu, quo lunae motus vtriusque naturae eſt particeps, quemadmodum re vera vſu venit, tum eum forte facillime definitum iri ſi neque ad ſolem neque ad terram, ſed ad aliud quodpiam punctum medium certa ratione motum referatur. Hunc in finem ſequens problema adiicio, in quo generatim motum corporis ad datum punctum relatum ad aliud punctum vtcunque motum referre docebo.

Problema 6.

Tab. II. Fig. 2. 47. Motum corporis C ad punctum A relatum, ad aliud punctum O, quod reſpectu puncti A vtcunque moueatur, ita referre, vt is qualis ſpectatori in O conſtituto ſit appariturus, definiatur.

Solutio.

Poſita diſtantia $AC=y$ et angulo $\measuredangle AC=q$, binae habentur aequationes differentio-differentiales, quibus

quibus ad quoduis tempus t valores y et q definiuntur, hasque aequationes ita comparatas esse vidimus:

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + M\,dt^2 = 0 \quad \text{et} \quad ddy - y\,dq^2 + N\,dt^2 = 0$$

quas obseruo ex his formis esse natas:

$$dd.y\cos.q + dt^2(N\cos.q - M\sin.q) = 0$$
$$dd.y\sin.q + dt^2(N\sin.q + M\cos.q) = 0.$$

Iam pro motu puncti O statuamus distantiam $AO = m$ et angulum $\curlyvee AO = n$; pro dato scilicet tempore t, atque vt motum corporis C ad hoc punctum referamus, vocemus distantiam $OC = z$ et angulum $\curlyvee OC = w$. Cum igitur sit $y\cos.q = m\cos.n + z\cos.w$ et $y\sin.q = m\sin.n + z\sin.w$, his valoribus ibi substitutis habebimus: has duas aequationes.

I°. $+(ddm - mdn^2)\cos.n - (2dmdn + mddn)\sin.n + dt^2(N\cos.q - M\sin.q) = 0$
$\quad +(ddz - zdw^2)\cos.w - (2dzdw + zddw)\sin.w$

II°. $+(ddm - mdn^2)\sin.n + (2dmdn + mddn)\cos.n + dt^2(N\sin.q + M\cos.q) = 0$
$\quad +(ddz - zdw^2)\sin.w + (2dzdw + zddw)\cos.w$

vnde combinatio I. $\cos.w$ + II. $\sin.w$ praebet

$$ddz - zdw^2 + (ddm - mdn^2)\cos.(w-n) + (2dmdn + mddn)\sin.(w-n)$$
$$+ dt^2(N\cos.(w-q) + M\sin.(w-q)) = 0$$

haec vero combinatio II. $\cos.w$ − I. $\sin.w$ dat:

$$2dzdw + zddw - (ddm - mdn^2)\sin.(w-n) + (2dmdn + mddn)\cos.(w-n)$$
$$+ dt^2(M\cos.(w-q) - N\sin.(w-q)) = 0$$

ficque pro corporis C motu quaesito respectu puncti O ad quoduis tempus t his binis aequationibus tam distantia $OC = z$ quam angulus $\Upsilon OC = w$ definitur. Tum vero quia nunc elementa $AC = y$ et $\Upsilon AC = q$ ex calculo elidi debent, in triangulo ACO notandum, esse angulos:

$$AOV = w - n;\ OAC = q - n;\ \text{et}\ ACO = w - q;$$

hincque $yy = mm + zz + 2mz\cos.(w-n)$ atque

$$\text{tang.}(w-q) = \frac{m\sin.(w-n)}{z + m\cos.(w-n)}$$

vnde colligitur:

$$\sin.(w-q) = \frac{m\sin.(w-n)}{y} \text{ et } \cos.(w-q) = \frac{z + m\cos.(w-n)}{y}$$

simili modo ob $\text{tang.}(q-n) = \frac{z\sin.(w-n)}{m + z\cos.(w-n)}$ erit

$$\sin.(q-n) = \frac{z\sin.(w-n)}{y} \text{ et } \cos.(q-n) = \frac{m + z\cos.(w-n)}{y}.$$

Coroll. 1.

48. Cum ergo ante ad quoduis tempus t definiri debuerint quantitates y et q, nunc motus cognitio perducta est ad determinationem quantitatum z et w, vbi quantitates m et n arbitrio nostro relinquuntur.

Coroll. 2.

49. Totum igitur negotium eo reuocatur, quemadmodum quantitates m et n pro quouis tempore t assumi oporteat, vt inuestigatio quantitatum z et w facillima reddatur. His enim inuentis quantitates

titates y et q, motum corporis C ex A visum declarantes, inde facile colliguntur.

Scholion.

50. Operae igitur pretium erit hanc methodum ad motum lunae accommodare, vt pateat, an quicquam lucri inde expectari queat? Facile autem intelligitur punctum O in ipsa recta AB centra solis et terrae iungente assumi conuenire, quia alioquin nimis magna linearum et angulorum multitudo calculum non mediocriter perturbaret. Positis ergo vt supra trium corporum massis A, B, C, distantiis $AB=x$, $AC=y$, $BC=v$, quarum functiones X, Y et V rationem virium in his distantiis exertarum exprimant, et angulis $\curlyvee ABC=p$ $\curlyvee ACB=q$, $BAC=q-p=s$, vt sit $v=\sqrt{(xx+yy-2xy\cos.s)}$ in sequente problemate in motum corporis C, quemadmodum spectatori in O posito sit apparitrus, inquiram; vbi quidem vocata distantia $AO=m$, angulus $ACO=n$ ipsi $\curlyvee ABC=p$ aequalis est statuendus.

Problema 7.

51. Dum terna corpora A, B, C se mutuo in ratione quacunque distantiarum attrahunt, motum corporis C respectu puncti O perpetuo in recta AB vtcunque assumto, definire.

Solutio.

Primum ergo tam diſtantiam $AC=y$ quam angulum $\curlyvee AC=q$ ex calculo eliminari oportet; per noua elementa $OC=z$ et $\curlyvee OC=w$ ob punctum O introducta; vbi quidem vidimus ob $n=p$, et $q-n=q-p=s$ eſſe:

$$yy=mm+zz+2mz\cos.(w-p) \text{ et}$$

$$\sin.(w-q)=\frac{m\sin.(w-p)}{y},\ \cos.(w-q)=\frac{z+m\cos.(w-p)}{y}$$

$$\sin.s=\frac{z\sin.(w-p)}{y},\ \cos.s=\frac{m+z\cos.(w-p)}{y}.$$

Porro cum ſit $OC=z$, $OB=x-m$ et $BOC=w-p$, erit $BC=v=\sqrt{((x-m)^2+zz-2(x-m)z\cos.(w-p))}$ tum vero $\frac{x-y\cos.s}{v}=\frac{x-m-z\cos.(w-p)}{v}$ et

$$y-x\cos.s=\frac{yy-mx-xz\cos.(w-p)}{y}=\frac{zz-m(x-m)-z(x-2m)\cos.(w-p)}{y}.$$

His ſubſtitutis primo pro elementis x et p has habebimus aequationes:

$$ddx-xdp^2+\tfrac{1}{2}(A+B)Xdt^2+\tfrac{1}{2}Cdt^2\left(\frac{x-m-z\cos.(w-p)}{v}V+\frac{m+z\cos.(w-p)}{y}Y\right)=0$$

$$2dxdp+xddp+\tfrac{1}{2}Cdt^2\left(\frac{z\sin.(w-p)}{y}Y-\frac{z\sin.(w-p)}{v}V\right)=0.$$

Deinde cum in problemate praecedente poſuerimus:

$$ddy-ydq^2+Ndt^2=0 \text{ et } 2dydq+yddq+Mdt^2=0$$

erit comparatione facta:

$$N=\tfrac{1}{2}(A+C)Y+\tfrac{1}{2}B\left(\frac{zz-m(x-m)-z(x-2m)\cos.(w-p)}{yv}V+\frac{m+z\cos.(w-p)}{y}X\right)$$

$$M=\tfrac{1}{2}B\left(\frac{xz\sin.(w-p)}{yv}V-\frac{z\sin.(w-p)}{y}X\right)$$

ſupereſt

fupereſt ergo vt colligamus hinc iſtos valores: Primo

$$N\cos.(w-q)+M\sin.(w-p)=\frac{N(z+m\cos.(w-p))+Mm\sin.(w-p)}{y}$$
$$=\frac{(A+C)(z+m\cos.(w-p))}{2y}Y+\tfrac{1}{2}B(z-(x-m)\cos.(w-p)\frac{V}{v}$$
$$+\tfrac{1}{2}B\cos.(w-p).X$$

deinde

$$M\cos.(w-q)-N\sin.(w-p)=\frac{M(z+m\cos.(w-p))-Nm\sin.(w-p)}{y}$$
$$=-\frac{(A+C)m\sin.(w-p)}{2y}Y+\tfrac{1}{2}E(x-m)\sin.(w-p)\frac{V}{v}-\tfrac{1}{2}B\sin.(w-p).X.$$

Quocirca pro motu corporis C, quatenus ad punctum O refertur et variabilibus z et w definitur, has adipiſcimur aequationes:

$$ddz-zdw^2+(ddm-mdp^2)\cos.(w-p)+(2dmdp+mddp)\sin.(w-p)$$
$$+\tfrac{1}{2}(A+C)\,dt^2\,(z+m\cos.(w-p)).\frac{Y}{y}+$$
$$\tfrac{1}{2}B\,dt^2(z-(x-m)\cos.(w-p)).\frac{V}{v}+\tfrac{1}{2}Bdt^2\cos.(w-p).X=0$$

$$2dzdw+zddw-(ddm-mdp^2)\sin.(w-p)+(2\,dmdp$$
$$+mddp)\cos.(w-p)$$
$$-\tfrac{1}{2}(A+C)dt^2.m\sin.(w-p).\frac{Y}{y}+\tfrac{1}{2}Bdt^2.(x-m)\sin.(w-p)\frac{V}{v}$$
$$-\tfrac{1}{2}Bdt^2\sin.(w-p).X=0.$$

Coroll. 1.

52. Si diſtantia $AO=m$ perpetuo datam teneat rationem ad diſtantiam $AB=x$ vt ſit $m=\alpha x$, erit:

$$yy=\alpha\alpha xx+zz+2\alpha xz\cos.(w-p) \text{ et}$$
$$vv=(1-\alpha)^2xx+zz-2(1-\alpha)xz\cos.(w-p)$$

vnde patet existente $\alpha = 0$, fore $y = z$, sin autem sit $\alpha = 1$, esse $v = z$, quemadmodum quidem per se est manifestum.

Coroll. 2.

53. Sumto autem $m = \alpha x$ erit $ddm - mdp^2 = \alpha(ddx - xdp^2)$ ideoque

$$ddm - mdp^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha(A+B)Xdt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C(\alpha x + z\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C((1-\alpha)x - z\cos.(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2$$

$$\text{et } 2dmdp + mddp = -\tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2$$

qui valores in superioribus aequationibus substituti praebent

$$ddz - zdw^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\cos.(w-p).Xdt^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)(z + \alpha x\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B+\alpha C)(z-(1-\alpha)x\cos.(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2 = 0$$

$$2dzdw + zddw - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\sin.(w-p).Xdt^2 - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)\alpha x\sin.(w-p).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B+\alpha C)(1-\alpha)x\sin.(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2 = 0.$$

Coroll. 3.

54. Nunc ergo esset videndum, vtrum numero α eiusmodi valor tribui possit, vt harum aequationum resolutio facilior euaderet, quam casibus $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, vnde vulgo motus lunae inuestigari solet.

Scho-

Scholion 1.

55. Quanquam de commodis quae hinc forte ſperare licet, nihil adhuc pronunciare licet, tamen ex his formulis caſus maxime memorabilis deduci poteſt, quem iam alia occaſione euolui. Certum ſcilicet eſt lunae initio eiusmodi ſitum et motum intra terram A et ſolem B tribui potuiſſe, vt perpetuo in eadem directione a terra ad ſolem porrecta fuiſſet permanſura, ideoque ſoli iugiter coniuncta apparitura. Ad hunc caſum inueſtigandum, capiamus punctum O in ipſo illo lunae loco, ita vt ſit $z=0$, ideoque $y=\alpha x$ et $v=(1-\alpha)x$ atque ambae noſtrae aequationes inuentae in hanc vnam coaleſcunt

$$((1-\alpha)B-\alpha A)X+\alpha((1-\alpha)C+A)x\frac{Y}{y}-(1-\alpha)(B+\alpha C)x\frac{V}{v}=0.$$

Vnde ſi ponamus $X=x^\lambda$, $Y=y^\lambda$ et $V=v^\lambda$, vt fiat $\frac{xY}{y}=xy^{\lambda-1}=\alpha^{\lambda-1}x^\lambda$ et $\frac{xV}{v}=(1-\alpha)^{\lambda-1}x^\lambda$, haec aequatio in iſtam abit formam:

$$((1-\alpha)B-\alpha A+\alpha^\lambda((1-\alpha)C+A)-(1-\alpha)^\lambda(B+\alpha C)=0$$

ſeu $A(\alpha^\lambda-\alpha)-B((1-\alpha)^\lambda-(1-\alpha))+C(\alpha^\lambda(1-\alpha)-\alpha(1-\alpha)^\lambda)=0$

vel $\alpha A(\alpha^{\lambda-1}-1)-(1-\alpha)B((1-\alpha)^{\lambda-1}-1)+\alpha(1-\alpha)C(\alpha^{\lambda-1}-(1-\alpha)^{\lambda-1})=0$

vnde ex data maſſarum A, B, C ratione valor fractionis α elici, ſicque loca illa lunae, quibus ſoli perpetuo maneret coniuncta definiri poſſunt; vbi quidem perſpicuum eſt ſi eſſet $\lambda=1$, hoc vbique vſu venire poſſe.

Scholion

Scholion 2.

56. Haec ſpeculatio accuratiorem euolutionem meretur, et quia attractio rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum ſequitur, poſito $\lambda = -2$, habebimus:

$$\frac{A(1-\alpha^3)}{\alpha\alpha} - \frac{B(1-(1-\alpha)^3)}{(1-\alpha)^2} + \frac{C((1-\alpha)^3-\alpha^3)}{\alpha^2(1-\alpha)^2} = 0 \text{ ſeu}$$

$$A(1-\alpha)^2(1-\alpha^3)-B\alpha\alpha(3\alpha-3\alpha\alpha+\alpha^3)+C(1-3\alpha+3\alpha\alpha-2\alpha^3)=0$$

quae ſecundum poteſtates ipſius α diſpoſita praebet

$$(A+B)\alpha^5-(2A+3B)\alpha^4+(A+3B+2C)\alpha^3-(A+3C)\alpha^2 +(2A+3C)\alpha-A-C=0$$

vbi ſi ſtatuamus $\alpha = \frac{1-u}{2}$ fit

$$(A+B)u^5-(A-B)u^4-2(A+B)u^3+10(A-B)uu+17A+B)u+7(A-B)=0 \quad +8C \qquad +24C$$

ita vt valor fractionis α a reſolutione huius aequationis quinti gradus pendeat. Quodſi bina corpora A et B inter ſe eſſent aequalia foret

$Au^5-2Au^3+17Au=0$ hincque vel $u=0$ et $\alpha=\frac{1}{2}$

$+4C \quad +12C$

vel $uu = \frac{A-2C+\sqrt{(4CC-16AC-16AA)}}{A}$

vnde reliqui pro u valores fiunt imaginarii. Sin autem B repraeſentet ſolem, vt ſit quaſi $B=\infty$, quia tum α fit minimum proxime erit $(A+3B$

$+2C)\alpha^3-A-C=0$ ſeu $\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}}$ et accuratius

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}} - \frac{3(A+2C)B-C(5A+6C)}{3(A+3B+3C)\sqrt[3]{(A+C)(A+3B+2C)^2}}$$

Scholion

Scholion 3.

57. Iuuabit forsitan ipsi α hunc valorem ingenere tribuisse, ita vt posito $X = \frac{1}{xx}$, $Y = \frac{1}{yy}$ et $V = \frac{1}{vv}$ fit $(1-\alpha)B - \alpha A = \frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^2} - \frac{A-(1-\alpha)C}{\alpha\alpha}$; siquidem eum in lunae motum inquirere velimus, qui ad casum istum memorabilem proxime accederet, ita vt distantia z prae αx maneret minima. Quia enim tum proxime fit $\frac{1}{y^3} = \frac{1}{\alpha^3 x^3} - \frac{3z\cos.(w-p)}{\alpha^4 x^4}$ et $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{(1-\alpha)^3 x^3} + \frac{3z\cos.(w-p)}{(1-\alpha)^4 x^4}$, binae aequationes motum exprimentes ad has formas reducuntur:

$$ddz - zdw^2 + \frac{z(1-3\cos.(w-p)^2)}{2x^3}dt^2\left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

$$2dzdw + zddw + \frac{3z\sin.(w-p)\cos.(w-p)}{2x^3}dt^2\left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

quae si motus solis pro vniformi et distantia x pro constanti habeatur, ita repraesentari poterunt:

$$ddz - zdw^2 + \gamma z dp^2(1 - 3\cos.(w-p)^2) = 0$$

$$2dzdw + zddw + 3\gamma z dp^2 \sin.(w-p)\cos.(w-p) = 0$$

quae aequationes, cum z vnam dimensionem non excedat pro simplicioribus sunt habendae.

INVESTIGATIO ACCVRATIOR PHAENOMENORVM QVAE IN MOTV TERRAE DIVRNO A VIRIBVS COELESTIBVS PRODVCI POSSVNT.

Auctore
L. EVLERO.

Motum terrae diurnum a viribus Solis et Lunae ita affici vt inde aequinoxiorum praeceſſio et axis terreſtris nutatio exoriatur *Neutonus* iam erat ſuſpicatus, Acutiſſ. vero *Alembertus* dilucide demonſtrauit. Quod ſpecimen ſagacitatis humanae eo pluris eſt aeſtimandum, quod illo tempore ſubſidia dynamica, quibus haec inueſtigatio innititur, neutiquam adhuc ſatis erant euoluta, ex quo ſummas et grauiſſimas calculi difficultates ſuperari erat neceſſe. Principium autem harum perturbationum in eo eſt ſitum, quod telluris corpus a figura ſphaerica recedit, ac diameter aequatoris aliquantum ſuperat axis quantitatem; quodſi enim eius figura perfecte eſſet ſphaerica, motus vertiginis ipſi ſemel impreſſus perpetuo eadem celeritate continuaretur, axisque eandem directionem conſeruaret; neque vires externae vllam immutationem in hoc motu efficere valerent. Statim autem ac terrae figura a ſphaerica diſcrepat, ex

ex viribus Solis ac Lunae naſcitur momentum ad axem de ſitu ſuo deturbandum tendens, quatenus quidem hae vires oblique in axem agunt. Quocirca in hac inueſtigatione, poſtquam vera terrae figura eſſet conſtituta, ex lege attractionis vires Solis et Lunae ſingula terrae elementa ſollicitantes definiri, indeque momenta poſitionem axis afficientia colligi oportuit; tum vero ſumma adhuc difficultas in effectu determinando reſidebat, quem illa virium momenta in ſitum axis exerere debeant, quod ſine profundiſſima cum Dynamicae tum Analyſeos ſcientia nullo modo praeſtari poterat.

Cum autem non ita pridem haec dynamicae pars maxime abſtruſa, quae in motu corporum gyratorio circa axem mobilem definiendo eſt occupata, a me ſit ſatis proſpero ſucceſſu ita pertractata, vt in genere corporum quacunque figura praeditorum motus dum a viribus quibuscunque ſollicitantur, ad formulas analyticas ſatis ſimplices reduci queat; haud incongruum fore arbitror, ſi ope huius methodi omnes inaequalitates, quibus motus terrae diurnus perturbatur, ita accuratius determinauero, vt non ſolum verus motus, quo terra cietur, inde innoteſcat, ſed etiam inde aliorum motuum, qui in terram cadere potuiſſent, ſiquidem initio aliter fuiſſet impulſa, indolem perſpicere liceat. Quae igitur de hoc argumento ſum meditatus, ſequentibus propoſitionibus ſum complexurus.

I. Quacunque figura terra ſit praedita ad praeſens inſtitutum non opus eſt veram compoſitionis rationem, qua ſingulae partes inter ſe ſunt diſtributae et ordinatae, noſſe; verum ſufficit vt ex principiis, quae circa motum corporum rigidorum in genere ſtabiliui, terni axes principales ſe mutuo in centro grauitatis ſeu potius inertiae normaliter decuſſantes notentur, momentaque inertiae reſpectu ſingulorum explorata habeantur. Hinc poſita terrae maſſa tota $=M$, ſi ex centro inertiae I educti ſint axes principales IA, IB, IC, eorum reſpectu momenta inertiae his formulis Maa, Mbb, Mcc deſignabo. His enim tribus momentis inertiae vniuerſa internae ſtructurae ratio, quatenus quidem inde motus determinatio pendet, continetur, ita vt iam taedioſiſſimis illis calculis, quos alias figura et ſtructura terrae exigere ſolet, ſuperſedere queamus.

II. Quodſi haec tria momenta inertiae inter ſe eſſent aequalia, omnes plane axes per centrum terrae ducti pari gauderent proprietate, omnesque aeque pro principalibus haberi poſſent, ita vt terra, circa quemcunque axem initio gyrari coepiſſet, hunc motum perpetuo ſine vlla axis et celeritatis alteratione eſſet proſecutura, neque etiam a viribus peregrinis vlla perturbatio eſſet pertimeſcenda. Perinde ſcilicet terra ſe eſſet habitura, ac ſi eius figura perfecte eſſet ſphaerica, omnisque materia aequabiliter circa centrum diſtributa; vbi imprimis eſt notandum

tandum hanc insignem proprietatem etiam in figuras maxime irregulares competere posse, dummodo terna illa momenta inertiae fuerint inter se aequalia, hoc autem in figuris maxime irregularibus euenire posse minime dubitare licet.

III. Eatenus ergo tantum motus terrae diurnus perturbationes pati potest, quatenus terna eius momenta inertiae principalia inter se non sunt aequalia. Verum etiamsi terra initio fuisset sphaerica statim atque circa certum axem gyrari coepisset, ob fluiditatem circa aequatorem intumescere debuisset, vnde respectu axis gyrationis momentum inertiae incrementum accepisset. In hoc autem negotio fluiditatis rationem minime habere licet, cum principia dynamica neutiquam adhuc ad hunc scopum sint euoluta; ob quem defectum vtique cogimur terram tanquam corpus solidum spectare, cuius figura nullis viribus sollicitantibus cedere queat. Quamobrem quae de eius motu diurno sum traditurus, ita sunt accipienda, vt ob maris mobilitatem, qua actioni virium quodammodo obsequitur, aliquam correctionem admittere intelligantur.

IV. Terram igitur tanquam eiusmodi corpus solidum consido, cuius trium axium principalium vnus puta IA cum eius axe proprie sic dicto, qui ab altero polo ad alterum per centrum porrigitur conueniat, et cuius respectu momentum inertiae sit $= Maa$. Bini ergo reliqui axes principales in

ipſum aequatorem cadent, et quoniam omnium meridianorum par eſſe ratio videtur, momenta inertiae eorum reſpectu tanquam inter ſe aequalia ſpectari poterunt, ita vt ſit $cc = bb$. Hoc autem admiſſo omnes diametri aequatoris axium principalium proprietate aeque erunt praediti ita vt terra circa vnumquemque eorum libere gyrari poſſet. Vnde cum puncta B et C in aequatore pro lubitu accipi queant, dum 90° a ſe inuicem diſtent, alterum B in eo meridiano, qui pro primo habetur, aſſumere licebit; ita in ſuperficie terrae arcus AB primum meridianorum deſignabit.

V. Quoniam motus terrae diurnus potiſſimum ab eo motu qui terrae initio fuerit impreſſus, pendet, quanta varietas inde proficiſci potuerit, ante omnia perpendi conueniet, ac primo quidem mentem ab actione Solis et Lunae abſtrahendo. Iam ſatis perſpicuum eſt ſi terrae in rerum principio motus gyratorius vel circa axem vel quempiam diametrum aequatoris fuiſſet impreſſus, hunc motum ita perpetuo vniformiter duraturum fuiſſe, vt axis gyrationis conſtanter idem coeli punctum reſpexiſſet. Sin autem terra circa aliam quamcunque lineam per centrum tranſeuntem gyrari coepiſſet, tum motus quidem gyratorius vniformis manſiſſet, ſed ipſe axis gyratorius interea circa quodpiam coeli punctum per circulum quendam minorem vniformiter fuiſſet circumlatus, quemadmodum alibi de huius-

huiusmodi corporibus, quae momentorum inertiae principalium bina habent inter se aequalia, fusius demonstraui et hic nouo modo sum demonstraturus.

VI. Statim autem ac vires perturbatrices siue Solis siue Lunae accedunt, vtrumque motus genus ita afficitur, vt vel gyrationis celeritas immutetur, vel axis, circa quem terra gyratur motu magis irregulari feratur. Ad hanc perturbationem inuestigandam quaestionem latiori sensu acceptam tractari conuenit, vt solutio etiam ad eos casus pateat, quibus forte terrae ab initio motus circa axem a principalibus diuersum fuerit impressus. Cum enim a viribus sollicitantibus axis gyrationis de situ suo deturbetur, omnino necesse est, vt etiamsi hae vires abessent gyratio circa axem mobilem definiri queat. Tum vero etiam ad scientiae incrementum non parum conducere videtur, si etiam indolem eorum motuum, qui in terram cadere possent, etiamsi re vera in ea non insint assignare valeamus. Quocirca formulas generales ita sum instructurus, vt etiam ad casum quo bina momenta inertiae principalia non forent aequalia accommodari queant.

VII. Cum ob vires perturbatrices omnia phaenomena ad coelum immotum referri oporteat, sit circulus ♈ ☊ ♎ ecliptica, et E eius polus; et quo inuestigatio aeque ad lunam ac solem pateat, sit O ☊ R orbita astri perturbantis eclipticam secans in nodo ascendente ☊, et nunc quidem hoc astrum Tab. II. Fig. 3.

hae-

haereat in S, per quod punctum ducto latitudinis circulo ESQ erit ♈Q longitudo et QS latitudo aſtri, tum vero ♈☊ longitudo nodi. Ponamus ergo haec elementa ♈☊ = ω, ang. ♈☊O = ε, arcus ♈☊Q = q et ES = p

atque ex trigonometria conſtat fore cotang.p = tang.ε ſin.$(q-\omega)$. Haec proprie ad lunam ſunt accommodata, pro ſole autem inclinatio ſeu angulus ♈☊O = ε euaneſcens eſt ſumendus, et ob latitudinem nullam arcus ES = p conſtanter manet 90°.

VIII. Pro actionis autem, quam aſtrum S in terram exerit, quantitate, ſit v eius diſtantia a centro terrae at e ea diſtantia in qua aſtri vis attractrix ipſi grauitati naturali eſt aequalis ita vt eius vis centrum terrae ſollicitans ſit ad grauitatem vt $\frac{e\,e}{v\,v}$ ad 1. Porro autem ſit g altitudo, ex qua grauia in terrae ſuperficie libere delabuntur tempore vnius minuti ſecundi, quibus poſitis quantitas actionis aſtri in terram hac formula $\frac{2\,g\,e\,e}{v^3}$ continetur, quam breuitatis gratia littera V = $\frac{2\,g\,e\,e}{v^3}$ denotabo. Vbi obſeruandum eſt ſi corpus ab aſtro attractum ad diſtantiam = v in circulo reuoluerctur, id ſingulis minutis ſecundis angulum eſſe percurſurum, qui ſit = $\sqrt{\frac{2\,g\,e\,e}{v^3}} = \sqrt{V}$. Ex quo ſi aſtrum ſit ſol $\sqrt{V}$ denotat motum terrae medium vni minuto ſecundo conuenientem; ſin autem aſtrum fuerit luna, ac maſſa lunae aequalis ſtatuatur maſſae telluris, fore $\sqrt{V}$ motum medium lunae vni minuto ſecundo

do conuenientem. Quoties autem maſſa lunae minor fuerit maſſa terrae, motum illum medium in ratione ſubduplicata diminui oportet; vnde ex cognito motu medio valor litterae V facile definitur.

IX. His praemiſſis teneat iam elapſo tempore t in minutis ſecundis exprimendo terra ſitum in figura repraeſentatum, vt axis eius ſeu polus boreus ſit in A, primus meridianus AB, et BC quadrans aequatoris, vbi B et C ſpectantur tanquam bini reliqui axes principales terrae. Ponantur ergo arcus et anguli ſtatum terrae definientes:

1°. Diſtantia poli A a polo eclipticae E ſeu $EA = l$

2°. Longitudo poli A ſeu angulus $\Upsilon EA = \psi$

3°. Situs primi meridiani ſeu angulus $EAB = \Phi$.

Hincque colligantur ſequentes arcus:

$$SA = \zeta,\ SB = \eta \quad \text{et} \quad SC = \theta$$

qui per trigonometriam ſphaericam ita definiuntur vt ſit:

$$\text{cof.}\zeta = \text{ſin.}\, p(\text{ſin.}\, l \text{cof.}\,(q-\psi) + \text{tang.}\, \varepsilon \text{cof.}\, l \text{ſin.}\,(q-\omega))$$

$$\text{cof.}\eta = \text{ſin.}\, p(-\text{ſin.}\,\Phi \text{ſin.}\,(q-\psi) - \text{cof.}\, l \text{cof.}\,\Phi \text{cof.}\,(q-\psi) + \text{tang.}\, \varepsilon \text{ſin.}\, l \text{cof.}\,\Phi \text{ſin.}\,(q-\omega))$$

$$\text{cof.}\theta = \text{ſin.}\, p(-\text{cof.}\,\Phi \text{ſin.}\,(q-\psi) + \text{cof.}\, l \text{ſin.}\,\Phi \text{cof.}\,(q-\psi) - \text{tang.}\, \varepsilon \text{ſin}\, l \text{ſin.}\,\Phi \text{ſin.}\,(q-\omega))$$

vbi notetur fore $\text{cof.}\zeta^2 + \text{cof.}\,\eta^2 + \text{cof.}\,\theta^2 = 1$.

X. Nunc cum reſpectu ternorum axium principalium A, B, C momenta inertiae terrae ſint Maa, Mbb, Mcc quaerantur primo tres quantitates x, y, z ex his aequationibus:

$$dx+\frac{cc-bb}{aa}dt(yz-3\,\mathrm{V}\cos.\eta\cos.\theta)=0$$
$$dy+\frac{aa-cc}{bb}dt(xz-3\,\mathrm{V}\cos.\zeta\cos.\theta)=0$$
$$dz+\frac{bb-aa}{cc}dt(xy-3\,\mathrm{V}\cos.\zeta\cos.\eta)=0$$

tum vero reliqua elementa ſitum terrae determinantia ex his aequationibus colligi oportet:

$$dl=-dt(y\sin.\Phi+z\cos.\Phi)$$
$$d\Phi=xdt-\frac{dt(y\cos.\Phi-z\sin.\Phi)}{\tang.l}$$
$$d\Psi=\frac{dt(y\cos.\Phi-z\sin.\Phi)}{\sin.l}$$

quarum aequationum ratio ex iis, quae de motu corporum gyratorio circa axem mobilem alibi tradidi, haud difficulter deducitur.

XI. Quoniam vero momenta inertiae pro axibus B et C aequalia ſtatuimus vt ſit $cc=bb$, primo quidem ob $dx=0$ habebimus $x=f$ quantitati nempe conſtanti; tum vero ponendo breuitatis gratia $\frac{aa-bb}{bb}=\alpha$ ſeu $\frac{aa}{bb}=1+\alpha$, quinque ſequentes aequationes reſolui oportet:

$$dy+\alpha dt(fz-3\,\mathrm{V}\cos.\zeta\cos.\theta)=0$$
$$dz-\alpha dt(fy-3\,\mathrm{V}\cos.\zeta\cos.\eta)=0$$
$$dl=-dt(y\sin.\Phi+z\cos.\Phi)$$

$d\Phi$

$$d\Phi = f dt - \frac{dt(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)}{tang.\, l}$$

$$d\Psi = \frac{dt(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)}{sin.\, l}$$

ex quibus binis posterioribus eliminatis y et z colligitur:

$$d\Phi + d\Psi \cos.l = f dt$$

ita vt formula $d\Phi + d\Psi \cos.l$ sit temporis elemento proportionalis.

XII. Quo nunc has aequationes distinctius euoluam, a simplicioribus ad difficiliora ita ordine ascendam, vt primo vires perturbatrices tanquam euanescentes spectans motum terrae diurnum, quomodo tum se esset habiturus, definiam, deinde astrum perturbans in ipsa ecliptica motu vniformi circa terram reuolui assumam, vt eandem perpetuo servet distantiam v, et V sit quantitas constans. Deinde astrum etiam vniformiter ad distantiam constantem sed in orbita ad eclipticam parumper inclinata circumferri ponam. Denique vero astro motum inaequabilem secundum leges *Keplerianas* tribuam, orbitam vero eius in ipsam eclipticam incidentem considerabo; qui bini posteriores effectus coniuncti ad motum lunae verum accommodari possunt.

I. Euolutio casus, quo vires perturbatrices euanescunt.

XIII. Posito ergo pro hoc casu $V = 0$, binae priores aequationes fiunt:

$$dy+\alpha fzdt=0 \quad \text{et} \quad dz-\alpha fydt=0$$

vnde colligitur $ydy+zdz=0$, et $yy+zz=hh$, ad quam aequationem cum reliquis commodiſſime conſtruendam, notari conuenit, in coelo dari punctum fixum L, circa quod polus A vniformiter gyretur, dum interea terra circa hunc polum etiam vniformiter reuoluitur. Hoc ergo punctum L in calculum introducentes ponamus:

$\curlyvee EL=\gamma$, $EL=m$, $LA=n$, exiſtente $EA=l$

tum vero etiam angulos in triangulo ſphaerico EAL

$$ELA=\lambda, \quad EAL=\mu \quad \text{et} \quad AEL=\nu$$

vt ſint elementa γ, m et n conſtantia, angulus vero $ELA=\lambda$ tempori proportionalis. Vocetur porro etiam angulus $LAB=\sigma$, eritque

$$\curlyvee EA=\psi=\gamma-\nu \quad \text{et} \quad EAB=\Phi=\sigma-\mu.$$

XIV. His poſitis ex trigonometricis habetur:

$$\text{cof.}\,l=\text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,n+\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n\,\text{cof.}\,\lambda$$

vnde ob m et n conſtantes differentiatio praebet:

$$dl\,\text{ſin.}\,l=d\lambda\,\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n\,\text{ſin.}\,\lambda$$

et quia $\frac{\text{ſin.}\,\lambda}{\text{ſin.}\,l}=\frac{\text{ſin.}\,\mu}{\text{ſin.}\,m}=\frac{\text{ſin.}\,\nu}{\text{ſin.}\,n}$ erit

$$dl=d\lambda\,\text{ſin.}\,n\,\text{ſin.}\,\mu=d\lambda\,\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,\nu.$$

Deinde cum ſit ſimili modo:

$$\text{cof.}\,m=\text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,n+\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu \quad \text{et}$$

$$\text{cof.}\,n=\text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,m+\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu$$

erit

erit quoque differentiando:

$$0 = -dl \sin.l \cos.n + dl \cos.l \sin.n \cos.\mu - d\mu \sin.l \sin.n \sin.\mu$$

$$0 = -dl \sin.l \cos.m + dl \cos.l \sin.m \cos.\nu - d\nu \sin.l \sin.m \sin.\nu$$

vnde colligitur:

$$d\mu = \frac{dl(\cos.l \sin.n \cos.\mu - \sin.l \cos.n)}{\sin.l \sin.n \sin.\mu} = \frac{d\lambda}{\sin.l}(\cos.l \sin.n \cos.\mu - \sin.l \cos.n)$$

$$d\nu = \frac{dl(\cos.l \sin.m \cos.\nu - \sin.l \cos.m)}{\sin.l \sin.m \sin.\nu} = \frac{d\lambda}{\sin.l}(\cos.l \sin.m \cos.\nu - \sin.l \cos.m).$$

XV. Ex trigonometria iam recordemur esse:

$$\cos.\mu = \frac{\sin.n \cos.m - \sin.m \cos.n \cos.\lambda}{\sin.l}; \quad \cos.\nu = \frac{\sin.m \cos.n - \sin.n \cos.m \cos.\lambda}{\sin.l}$$

similique modo etiam

$$\cos.\mu = \frac{\sin.l \cos.m - \cos.l \sin.m \cos.\nu}{\sin.n}; \quad \cos.\nu = \frac{\sin.l \cos.n - \cos.l \sin.n \cos.\mu}{\sin.m}$$

vnde concinnius posteriora differentialia ita definiuntur:

$$d\mu = \frac{-d\lambda \sin.m \cos.\nu}{\sin.l} \text{ et } d\nu = \frac{-d\lambda \sin.n \cos.\mu}{\sin.l}$$

sicque pro elementis prius adhibitis habebimus:

$$d\psi = \frac{d\lambda \sin.n \cos.\mu}{\sin.l} \text{ et } d\Phi = d\sigma + \frac{d\lambda \sin.m \cos.\nu}{\sin.l}$$

vbi loco $\cos.\mu$ et $\cos.\nu$ priores valores scribi conueniet, vt omnia ad elementa m, n et λ reuocentur:

XVI. Nunc igitur statuamus:

$$y = h \cos.\sigma \quad \text{et} \quad z = -h \sin.\sigma$$

qui valores in prioribus aequationibus substituti dant:

$$-hd\sigma \sin.\sigma - \alpha fhdt \sin.\sigma = 0 \text{ seu } d\sigma = -\alpha f dt.$$

Tum vero ob

$$y \sin.\Phi + z \cos.\Phi = b \sin.(\Phi - \sigma) = -b \sin.\mu \text{ et}$$
$$y \cos.\Phi - z \sin.\Phi = b \cos.(\Phi - \sigma) = b \cos.\mu$$

ternae posteriores aequationes has induent formas:

$$dl = d\lambda \sin.n \sin.\mu = b\,dt \sin.\mu, \text{ seu } d\lambda = \frac{b\,dt}{\sin.n}$$
$$d\Phi = -\alpha f dt + \frac{d\lambda \sin.m \cos.\nu}{\sin.l} = f dt - \frac{b\,dt \cos.\mu}{tang.l}$$
$$d\Psi = \frac{b\,dt \cos.\mu}{\sin.l} - \frac{b\,dt(\sin.n \cos.m - \sin.m \cos.n \cos.\lambda)}{\sin.l^2}.$$

Antepenultima autem ob $d\lambda = \frac{b\,dt}{\sin.n}$ per dt diuisa dat

$$(1+\alpha)f = \frac{b \sin.m \cos.\nu}{\sin.l \sin.n} + \frac{b \cos.l \cos.\mu}{\sin.l} = \frac{b(\cos.l \cos.\mu \sin.n + \sin.m \cos.\nu)}{\sin.l \sin.n}.$$

Verum cum sit $\cos.\mu = \frac{\cos.m - \cos.l \cos.n}{\sin.l \sin.n}$ et $\cos.\nu = \frac{\cos.n - \cos.l \cos.m}{\sin.l \sin.m}$ obtinetur:

$$(1+\alpha)f = \frac{b(\cos.n - \cos.l^2 \cos.n)}{\sin.l^2 \sin.n} = \frac{b \cos.n}{\sin.n}$$

ita vt etiam quantitas $b = (1+\alpha) f$ tang.n determinetur, sitque adeo constans, vt rei natura postulat.

XVII. Ex dato ergo coeli puncto L, ad quod motus terrae est referendus, ab eoque axis distantia $LA = n$, motus terrae ita se habebit, vt primo axis A circa illud punctum L vniformiter reuoluatur celeritate angulari $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{b}{\sin.n} = \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}$, quippe qua singulis minutis secundis angulus $= \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}$ absoluitur ita vt hoc motu angulus ELA continuo increscat. Tum vero interea ipsa terra circa axem A gyrabi-

tur

tur celeritate angulari $\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha f$, qua angulus LAB continuo imminuetur; vbi notandum, quantitatem f a motu terrae primum impreſſo perinde atque arcum n pendere, litteram α vero rationem compoſitionis terrae inuoluere. In motu autem quem terra reuera eſt initio adepta, arcus $LA = n$ euaneſcit, ſicque ſine viribus perturbantibus, ipſe arcus LA cum polo A fixus maneret, totusque motus ex angulo $LAB = \Phi$ ita definiretur, vt ob $h = 0$ eſſet celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt} = f$, vnde patet quantitatem f exprimere celeritatem angularem motus terrae diurni.

XVIII. Si terra eiusmodi motum vertiginis accepiſſet vt arcus $LA = n$ valorem haberet notabilem, polus A maiori celeritate circa coeli punctum L reuolueretur, ſiquidem conſtans f eundem retineret valorem, ipſa vero terra lentiſſime interea circa axem A in plagam contrariam conuerteretur, ob fractionem α minimam, ita vt hoc motu neglecto terra circa axem per coeli punctum L tranſeuntem reuolui videretur, ſpatio ſaltem temporis non nimis magno tempore autem labente quia ſenſim alia terrae puncta coeli punctum L ſubeunt, terra alium axem gyrationis recipere videbitur, ex quo etiam aequator et locorum latitudines mutationem patientur, ſicque tam coeli quam terrae phaenomena ingentibus perturbationibus forent obnoxia, etiamſi nullae vires perturbatrices externae accederent.

XIX.

XIX. Hoc casu si pro quouis tempore t situm terrae respectu eclipticae definire velimus; primum ad hoc tempus angulum $\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{coj.n} t +$ Const. colligi oportet, pro quo facile tabula conderetur. Tum vero hoc angulo inuento statim habebitur axis A a polo eclipticae E distantia $EA = l$ ope formulae $\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$ vbi m et n sunt certi anguli dati. Porro pro situ arcus EA quaeratur angulus ν vt sit $\text{cotang.}\, \nu = \frac{\sin. m \cos. n - \cos. m \sin n \cos. \lambda}{\sin. n \sin. \lambda}$, eritque angulus $\Upsilon EA = \psi = \gamma - \nu$, denotante γ angulum quendam constantem. Denique pro situ primi meridiani AB seu angulo $LAB = \Phi = \sigma - \mu$, primo angulus σ tempori proportionalis ex formula $\sigma =$ Const. $- \alpha f t$ facile colligitur, tum vero angulus μ ex hac formula capiatur:

$$\text{cotang.}\, \mu = \frac{\sin. n \cos. m - \cos. n \sin. m \cos. \lambda}{\sin. m \sin. \lambda}$$

sicque status terrae ad tempus propositum erit determinatus omnem autem hunc calculum commode tabulis complecti liceret. Hoc casu expedito ad vires perturbantes progredior, quae tractatio praeparationem postulat, reliquis casibus quos suscepi praemittendam.

Praeparatio ad effectus virium perturbantium euoluendos.

XX. Quoniam hic effectus est minimus, ex casu praecedente facile intelligitur, quomodo hanc tracta-

tractationem aptissime suscipi conueniat. Vniuersus scilicet motus quoque ad coeli quoddam punctum L referatur, quod autem non amplius tanquam fixum spectetur, sed ita pro variabili habeatur, vt tam angulus $\Upsilon EL = \gamma$ quam arcus $EL = m$ et $LA = n$ a viribus perturbantibus parumper immutari censeantur, neque etiam anguli $ELA = \lambda$ et $LAB = \sigma$ incrementa tempori exacte proportionalia capere sunt censenda; quamobrem quoque quantitas b tanquam variabilis erit tractanda. Ponamus deinde vt supra; $EA = l$, angulos $EAL = \mu$, $AEL = \nu$ tum vero angulos $\Upsilon EA = \psi$ et $EAB = \Phi$ vt sit $\psi = \gamma - \nu$ et $\Phi = \sigma - \mu$.

XXI. Statuamus ergo etiam nunc quoque

$$y = b \cos.\sigma \quad \text{et} \quad z = -b \sin.\sigma$$

et quia quantitatem b quoque vt variabilem spectamus, binae priores aequationes differentiales fient:

$$db\cos.\sigma - bd\sigma\sin.\sigma - \alpha f b dt \sin.\sigma - 3\alpha V dt \cos.\zeta\cos.\theta = 0$$
$$-db\sin.\sigma - bd\sigma\cos.\sigma - \alpha f b dt\cos.\sigma + 3\alpha V dt\cos.\zeta\cos.\eta = 0$$

vnde per combinationem elicimus:

$$-bd\sigma - \alpha f b dt - 3\alpha V dt\cos\zeta(\sin\sigma\cos.\theta - \cos.\sigma\cos.\eta) = 0$$
$$db - 3\alpha V dt\cos.\zeta\,(\cos.\sigma\cos.\theta + \sin.\sigma\cos.\eta) = 0.$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\cos.\sigma\cos.\eta - \sin.\sigma\cos.\theta = P \quad \text{et} \quad \cos.\sigma\cos.\theta + \sin.\sigma\cos.\eta = Q$$

vt habeamus has aequationes:

$$d\sigma = -\alpha f dt + \frac{3\alpha V P dt\cos.\zeta}{b} \quad \text{et} \quad db = 3\alpha V Q dt\cos.\zeta.$$

Verum ex formulis ſupra §. IX. ob $\Phi = \sigma - \mu$ ſeu $\sigma - \Phi = \mu$ colligimus:

$$P = \text{ſin.}p(\text{ſin.}\mu\,\text{ſin.}(q-\psi) - \text{coſ.}l\,\text{coſ.}\mu\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\varepsilon\,\text{ſin.}l\,\text{coſ.}\mu\,\text{ſin.}(q-\omega))$$

$$Q = \text{ſin.}p(-\text{coſ.}\mu\,\text{ſin.}(q-\psi) - \text{coſ.}l\,\text{ſin.}\mu\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\varepsilon\,\text{ſin.}l\,\text{ſin.}\mu\,\text{ſin.}(q-\omega))$$

exiſtente $\text{coſ.}\zeta = \text{ſin.}p(\text{ſin.}l\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\varepsilon\,\text{coſ.}l\,\text{ſin.}(q-\omega))$.

Reliquae vero aequationes erunt:

$$dl = h\,dt\,\text{ſin.}\,\mu$$

$$d\Phi = d\sigma - d\mu = f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{coſ.}\,\mu}{\text{tang.}\,l}$$

$$d\psi = d\gamma - d\nu = \frac{h\,dt\,\text{coſ.}\,\mu}{\text{ſin.}\,l}.$$

XXII. Haec iam differentialia dl, $d\mu$ et $d\nu$ ad differentialia $d\lambda$, dm et dn reduci oportet; ac primo quidem cum ſit $\text{coſ.}l = \text{coſ.}m\,\text{coſ.}n + \text{ſin.}m\,\text{ſin.}n.\,\text{coſ.}\lambda$ erit differentiando:

$$dl\,\text{ſin.}l = dm\,\text{ſin.}m\,\text{coſ.}n + dn\,\text{coſ.}m\,\text{ſin.}n + d\lambda\,\text{ſin.}m\,\text{ſin.}n\,\text{ſin.}\lambda - dm\,\text{coſ.}m\,\text{ſin.}n\,\text{coſ.}\lambda - dn\,\text{ſin.}m\,\text{coſ.}n\,\text{coſ.}\lambda$$

quae forma ob

$$\text{ſin.}n\,\text{coſ.}m - \text{ſin.}m\,\text{coſ.}n\,\text{coſ.}\lambda = \text{ſin.}l\,\text{coſ.}\mu \text{ et } \text{ſin.}m\,\text{coſ.}n - \text{ſin.}n\,\text{coſ.}m\,\text{coſ.}\lambda = \text{ſin.}l\,\text{coſ.}\nu$$

tranſit in hanc ſimpliciorem:

$$dl\,\text{ſin.}l = dm\,\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\nu + dn\,\text{ſin.}l\,\text{coſ.}\mu + d\lambda\,\text{ſin.}m\,\text{ſin.}n\,\text{ſin.}\lambda$$

ſeu

ſeu cum ſit $\frac{\sin.\lambda}{\sin.l} = \frac{\sin.\mu}{\sin.m} = \frac{\sin.\nu}{\sin.n}$ in hanc

$$dl = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu.$$

XXIII. Deinde vero ſimili modo elicitur:

$$dm = dl\cos.\nu + dn\cos.\lambda + d\mu\sin.n\sin.\lambda$$

vbi ſi loco dl valor modo inuentus ſubſtituatur, prodit

$$dm = dm\cos.\nu^2 + dn\cos.\mu\cos.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda + dn\cos.\lambda$$

ſeu ob $\cos.\lambda + \cos.\mu\cos.\nu = \cos.l\sin.\mu\sin.\nu$

$$dm\sin.\nu^2 = dn\cos.l\sin.\mu\sin.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda.$$

Eſt vero $\sin.n\sin.\mu = \sin.m\sin.\nu$ et $\sin.n\sin.\lambda = \sin.l\sin.\nu$, vnde per $\sin.\nu$ diuidendo habetur:

$$dm\sin.\nu = dn\cos.l\sin.\mu + d\lambda\sin.m\cos.\nu + d\mu\sin.l$$

ita vt ſit $d\mu = \frac{dm\sin.\nu}{\sin.l} - \frac{dn\cos.l\sin.\mu}{\sin.l} - \frac{d\lambda\sin.m\cos.\nu}{\sin.l}$.

Verum quia elementum dl tam commode exprimitur, vt ſit $dl = hdt\sin.\mu$ praeſtabit hunc valorem ſtatim introduci vnde prodit

$$d\mu = \frac{-hdt\sin.\mu\cos.\nu + dm - dn\cos.\lambda}{\sin.n\sin.\lambda}$$ ſimilique modo

$$d\nu = \frac{-hdt\sin.\mu\cos.\mu + dn - dm\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}.$$

XXIV. Ex prima ergo aequatione adipiſcimur:

$$hdt\sin.\mu = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu$$

vnde ſit $d\lambda = \frac{hdt}{\sin.n} - \frac{dm\cos.\nu - dn\cos.\mu}{\sin.n\sin.\mu}$

at tertia aequatio praebet

$$d\gamma = \frac{h\,dt\,\text{cos.}\,\mu}{\text{sin.}\,l} - \frac{h\,dt\,\text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\mu}{\text{sin.}\,m\,\text{sin.}\,\lambda} + \frac{dn - dm\,\text{cos.}\,\lambda}{\text{sin.}\,m\,\text{sin.}\,\lambda}$$

seu $d\gamma = \frac{dn - dm\,\text{cos.}\,\lambda}{\text{sin.}\,m\,\text{sin.}\,\lambda}$

secunda vero aequatio ad $d\Phi$ spectans dat

$$d\sigma = f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos.}\,\mu\,\text{cos.}\,l}{\text{sin.}\,l} - \frac{h\,dt\,\text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\nu}{\text{sin.}\,n\,\text{sin.}\,\lambda} + \frac{dm - d\,n\,\text{cos.}\,\lambda}{\text{sin.}\,n\,\text{sin.}\,\lambda}$$

vbi notandum terminos elemento $h\,dt$ affectos, cum sint

$$-\frac{h\,dt\,(\text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\nu + \text{sin.}\,\nu\,\text{cos.}\,\mu\,\text{cos.}\,l)}{\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\,\nu}$$

ob $\text{cot.}\,n = \frac{\text{sin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\nu + \text{sin.}\,\nu\,\text{cos.}\,\mu\,\text{cos.}\,l}{\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\,\nu}$ abire in $-\frac{h\,d\,t\,\text{cos.}\,n}{\text{sin.}\,n}$

ita vt sit

$$d\sigma = f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos.}\,n}{\text{sin.}\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cos.}\,\lambda}{\text{sin.}\,n\,\text{sin.}\,\lambda} = -\alpha f\,dt + \frac{3\alpha\,V\,P\,dt\,\text{cos.}\,\zeta}{b}$$

hincque $(1+\alpha)f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos.}\,n}{\text{sin.}\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cos.}\,\lambda}{\text{sin.}\,n\,\text{sin.}\,\lambda} = \frac{3\alpha\,V\,P\,dt\,\text{cos.}\,\zeta}{b}$.

XXV. Nunc igitur sumamus $h = (1+\alpha)f\,\text{tang.}\,n$ vt viribus euanescentibus, arcus m et n prodeant constantes, et postrema aequatio dabit

$$dm - dn\,\text{cos.}\,\lambda = \frac{3\alpha\,V\,P\,dt\,\text{cos.}\,n\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\zeta}{(1+\alpha)f}$$

arcus vero n ex hac integratione est definiendus

$$\text{tang.}\,n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int V\,Q\,dt\,\text{cos.}\,\zeta$$

seu $dn = \frac{3\alpha\,V\,Q\,dt\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,n^2}{(1+\alpha)f}$

vnde fit $dm = \frac{3\alpha\,V\,dt\,\text{cos.}\,n\,\text{cos.}\,\zeta}{(1+\alpha)f}(P\,\text{sin.}\,\lambda + Q\,\text{cos.}\,n\,\text{cos.}\,\lambda)$

hinc-

hincque porro

$$dm\cos.\nu + dn\cos.\mu = \frac{3\alpha V dt \cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f}\sin.\lambda(P\cos.\nu + Q\cos.m\cos.n\sin.\nu).$$

Inuentis autem variationibus dm et dn, erit

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{dm\cos.\nu - dn\cos.\mu}{\sin.n\sin.\mu} \text{ seu}$$

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{dm(\sin.m\cos.n - \sin.n\cos.m\cos.\lambda)}{\sin.m\sin.n\sin.\lambda} - \frac{dn(\sin.n\cos.m - \sin.m\cos.n\cos.\lambda)}{\sin.m\sin.n\sin.\lambda}$$

et anguli ν E L variatio simul innotescit, quae est

$$d\gamma = \frac{dn - dm\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda} = \frac{3\alpha V dt\cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f\sin.m}(Q\cos.n\sin.\lambda - P\cos.\lambda)$$

substitutis autem pro dm et dn valoribus reperitur

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{3\alpha V dt\cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f\sin.m\sin.n}(P(\sin.m\cos.n - \sin.n\cos.m\cos.\lambda) + Q(\sin.n\cos.m\cos.n\sin.\lambda).$$

Denique pro angulo $EAB = \Phi$ habebimus:

$$d\Phi = fdt - \frac{(1+\alpha)fdt\sin.n\cos.\mu\cos.l}{\cos.n\sin.l} \text{ et } d\psi = \frac{(1+\alpha)fdt\sin.n\cos.\mu}{\sin.l\cos.n}$$

ita vt sit $d\Phi + d\psi\cos.l = fdt$, in quibus integrationibus arcus m et n tanquam constantes spectare licet, simul vero erit proxime $d\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}dt$, siquidem perturbatio fuerit minima.

XXVI. Quo haec nunc propius ad praesens institutum accommodemus, obseruandum est in motu vertiginis terrae arcum n quam minimum esse statuendum, ita vt ob $d\Phi = fdt$ iam f denotet angulum vno minuto secundo confectum, et angulus ψ in integrationibus pro constanti haberi poterit.

Deinde ob $\cot.\mu = \frac{n\cos.m - \sin.m\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}$, colligitur fore angulum $\mu = 180^\circ - \lambda - \frac{n\sin.\lambda}{tang.m}$, ita vt sit.

$$\sin.\mu = \sin.\lambda + \frac{n\sin.\lambda\cos.\lambda}{tang.m}\ ;\quad \sin.(\lambda+\mu) = \frac{n\sin.\lambda}{tang.m}$$

$$\cos.\mu = -\cos.\lambda + \frac{n\sin.\lambda^2}{tang.m}\ ;\quad \cos.(\lambda+\mu) = 1$$

neglectis terminis vbi n ad altiores potestates exsurgit.

Porro ob $\cos.l = \cos.m + n\sin.m\cos.\lambda$ erit $l = m - n\cos.\lambda$ hincque

$$n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int V Q dt \cos.\zeta;\ m = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int V dt \cos.\zeta(P\sin.\lambda + Q\cos.\lambda)$$

$$d\lambda = (1+\alpha)fdt - \frac{2\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{V dt\cos.\zeta(P\sin.m - n\cos.m(P\cos.\lambda - Q\sin.\lambda))}{n\sin.m}$$

$$= (1+\alpha)fdt - \frac{3\alpha V P dt\cos.\zeta}{(1+\alpha)nf} - \frac{3\alpha V dt\cos.\zeta\cos.m(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{(1+\alpha)f\sin.m}$$

$$d\gamma = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{V dt\cos.\zeta(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{\sin.m}$$

$$d\Phi = fdt + \frac{n(1+\alpha)fdt\cos.m\cos.\lambda}{\sin.m}$$

$$d\psi = \frac{-n(1+\alpha)fdt\cos.\lambda}{\sin.m}.$$

XXVII. Cum sit proxime $\mu = 180^\circ - \lambda$, et $l = m$ in quantitatibus P et Q his valoribus vti licet, ex quo erit:

$$P = \sin.p(\sin.\lambda\sin.(q-\psi) + \cos.m\cos.\lambda\cos.(q-\psi) - tang.\varepsilon\sin.m\cos.\lambda\sin.(q-\omega))$$

$$Q = \sin.p(\cos.\lambda\sin.(q-\psi) - \cos.m\sin.\lambda\cos.(q-\psi) + tang.\varepsilon\sin.m\sin.\lambda\sin.(q-\omega))$$

existente $\cos.\zeta = \sin.p(\sin.m\cos.(q-\psi) + tang.\varepsilon\cos.m\sin.(q-\omega))$

vnde

vnde colligitur:

$P \sin.\lambda + Q \cos.\lambda = \sin. p \sin.(q-\psi)$

$Q \sin.\lambda - P \cos.\lambda = \sin. p\,(-\cos. m \cos.(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon \sin. m \sin.(q-\omega))$.

Hinc totum calculum satis expedite absoluere licebit; valor tantum anguli λ moram facessere videtur, ob terminum $\frac{-3\alpha V P\, dt \cos.\zeta}{(1+\alpha) f n}$, quantitatem minimam n in denominatore inuoluentem; quae si euaneſceret, hic terminus adeo in infinitum excreſceret. Quod cum in motu terrae eueniat, manifestum est hanc appropinquandi rationem nostro casu locum habere non posse ex quo aliam methodum ingredi conueniet, quam nunc accuratius sum expositurus.

Alia methodus formulas inuentas euolvendi, ad motum vertiginis terrae magis accommodata.

XXVIII. Resumamus nostras formulas pro motu vertiginis supra expositas:

1°. $\frac{dy}{dt} + \alpha f z - 3\alpha V \cos.\zeta \cos.\theta = 0$

2°. $\frac{dz}{dt} - \alpha f y + 3\alpha V \cos.\zeta \cos.\eta = 0$

3°. $dl = -dt(y \sin.\Phi + z \cos.\Phi)$

4°. $d\Phi = f dt - \frac{dt}{\text{tang.}\,i}(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)$

5°. $d\psi = \frac{dt}{\sin. i}(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)$

vbi

vbi primum obſeruo, ſi vires perturbatrices littera $V = \frac{2gee}{v^3}$ contentae euaneſcerent, binis prioribus aequationibus ſatisfacere has formulas $y = h \cos. \alpha ft$ et $z = h \sin. \alpha ft$ praeſenti autem caſu quantitatem h euaneſcentem accipi debere. Quare cum ob quantitatem V particulae quaedam ad hos valores y et z accedant, has ipſas particulas inueſtigari conuenit, quibus deinceps reiectis illis membris litteram h involuentibus; erit vtendum.

XXIX. Hunc in finem autem opus eſt ante omnia formulas $\cos.\zeta\cos.\eta$ et $\cos.\zeta\cos.\theta$ euoluisse, vnde facta reductione reperitur:

$$\cos.\zeta\cos.\eta = \tfrac{1}{4}\sin.p^2\left\{\begin{array}{l} -\sin.l\sin.\Phi\sin.2(q-\psi)-\sin.l\cos.l\cos.\Phi-\sin.l\cos.l\cos.\Phi\cos.2(q-\psi) \\ +\tang.\varepsilon\sin.l^2\cos.\Phi\sin.(2q-\psi-\omega)+\tang.\varepsilon\sin.l^2\cos.\Phi\sin.(\psi-\omega)+\tang.\varepsilon\cos.l\sin.\Phi\cos.(2q-\psi-\omega) \\ -\tang.\varepsilon\cos.l^2\cos.\Phi\sin.(2q-\psi-\omega)-\tang.\varepsilon\cos.l^2\cos.\Phi\sin.(\psi-\omega)-\tang.\varepsilon\cos.l\sin.\Phi\cos.(\psi-\omega) \end{array}\right\}$$

omiſſis terminis quadratum $\tang.\varepsilon^2$ implicantibus vtpote minimis; quam ob cauſam pro $\sin.p^2 = \frac{1}{1+\tang.\varepsilon^2\sin.(q-\omega)^2}$ etiam vnitatem ſcribere licet. Hinc etiam angulo Φ in ſinus et coſinus ſimplices inuoluto, adipiſcimur:

$$\begin{array}{l} 4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2l\cos.\Phi-\sin.l\cos.(\Phi-2q+2\psi)+\sin.l\cos.(\Phi+2q-2\psi) \\ \qquad\qquad -\sin.l\cos.l \qquad\qquad -\sin.l\cos.l \\ -\tang.\varepsilon\cos.2l\sin.(\Phi+2q-\psi-\omega)+\tang.\varepsilon\cos.2l\sin.(\Phi-2q+\psi+\omega) \\ +\tang.\varepsilon\cos.l \qquad\qquad +\tang.\varepsilon\cos.l \\ +\tang.\varepsilon\cos.2l\sin.(\Phi-\psi+\omega)-\tang.\varepsilon\cos.2l\sin.(\Phi+\psi-\omega) \\ -\tang.\varepsilon\cos.l \qquad\qquad -\tang.\varepsilon\cos.l \end{array}$$

vbi

vbi notandum eſt ψ eſſe longitudinem puncti ſolſtitialis aeſtiui a termino fixo Υ puta prima ſtella arietis. Quodſi ergo longitudo primae ſtellae arietis a puncto aequinoctiali verno computata ponatur $= x$, erit $\psi + x = 90°$ et $\psi = 90° - x$, indeque $q - \psi = q + x - 90°$, vbi $q + x$ denotabit aſtri longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam quae ex tabulis habetur. Hinc ergo per motos cofinus erit

$$4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2i\cos.\Phi + \sin.i(1+\cos.i)\cos.(\Phi - 2q - 2x) - \sin.i(1-\cos.i)\cos.(\Phi + 2q + 2x)$$
$$- \operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.i - \cos.2i)\cos.(\Phi + 2q + x - \omega) + \operatorname{tang}\varepsilon(\cos.i + \cos.2i)\cos.(\Phi - 2q + \omega - x)$$
$$+ \operatorname{tang}\varepsilon(\cos.i - \cos.2i)\cos.(\Phi + \omega + x) - \operatorname{tang}\varepsilon(\cos.i + \cos.2i)\cos.(\Phi - \omega - x)$$

vbi $\omega + x$ denotat longitudinem nodi aſcendentis $\mathfrak{Q}$ a puncto aequinoctiali verno computatam.

XXX. Quodſi ergo pro vſu tabularum q denotet ipſam aſtri perturbantis longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam, ſimilique modo ω longitudinem nodi aſcendentis, erit

$$4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2i\cos.\Phi + \sin.i(1+\cos.i)\cos.(\Phi - 2q) - \sin.i(1-\cos.i)\cos.(\Phi + 2q)$$
$$+ \operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.i - \cos.2i)\cos.(\Phi + \omega) - \operatorname{tang}\varepsilon(\cos.i + \cos.2i)\cos.(\Phi - \omega)$$
$$- \operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.i - \cos.2i)\cos.(\Phi + 2q - \omega) + \operatorname{tang}\varepsilon(\cos.i + \cos.2i)\cos.(\Phi - 2q + \omega)$$

vbi si loco Φ scribatur $\Phi+90°$ oritur valor alterius formulae $4\cos.\zeta\cos.\theta$, quam ergo seorsim euolui non est opus. Deinde obseruo si astrum non in circulo aequabiliter circa terram circumferatur, vt longitudinis q incrementa non sint tempori proportionalia, tamen ex cognita inaequalitate motus, hos cosinus, in cosinus aliorum angulorum tempori proportionalium euolui posse, quod etiam de ipsa forma $V=\frac{2gee}{v^3}$ est intelligendum, quae cum illa coniuncta pariter ad cosinus angulorum tempori proportionalium reuocabitur, quoniam ipse angulus Φ celeritatem angularem motus diurni terrae designans, in his integrationibus vt tempori proportionalis spectari potest. Quocirca certum est has formulas ita semper expressum iri vt sit

$$3\alpha V\cos.\zeta\cos.\eta=A\cos.\Phi+B\cos.(\Phi-\mathfrak{E}t)+C\cos.(\Phi-\gamma t)+D\cos.(\Phi-\delta t)+\mathfrak{B}\cos.(\Phi+\mathfrak{E}t)+\mathfrak{C}\cos.(\Phi+\gamma t)+\mathfrak{D}\cos.(\Phi+\delta t)\text{ etc.}$$

$$3\alpha V\cos.\zeta\cos.\theta=-A\sin.\Phi-B\sin.(\Phi-\mathfrak{E}t)-C\sin.(\Phi-\gamma t)-D\sin.(\Phi-\delta t)-\mathfrak{B}\sin.(\Phi+\mathfrak{E}t)-\mathfrak{C}\sin.(\Phi+\gamma t)-\mathfrak{D}\sin.(\Phi+\delta t)\text{ etc.}$$

vbi pro quolibet astro anguli $\mathfrak{E}t$, γt, δt etc. quotcunque fuerint, cum coefficientibus facile exhibentur.

XXXI. Statuamus iam $d\Phi=mdt$ et $\alpha f=n$, sitque pro quantitatibus y et z non omissis partibus ante commemoratis:

$$y=h$$

$$y = b\cos.nt + O\cos.\Phi + P\cos.(\Phi - \mathfrak{E}t) + Q\cos.(\Phi - \gamma t) + R\cos.(\Phi - \delta t) + \mathfrak{P}\cos.(\Phi + \mathfrak{E}t) + \mathfrak{Q}\cos.(\Phi + \gamma t) + \mathfrak{R}\cos.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$z = b\sin.nt - O\sin.\Phi - P\sin.(\Phi - \mathfrak{E}t) - Q\sin.(\Phi - \gamma t) - R\sin.(\Phi - \delta t) - \mathfrak{P}\sin.(\Phi + \mathfrak{E}t) - \mathfrak{Q}\sin.(\Phi + \gamma t) - \mathfrak{R}\sin.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

ac facta ſubſtitutione in prioribus aequationibus fiet

$$\left.\begin{array}{llll} -nb\sin.nt - mO\sin.\Phi - (m-\mathfrak{E})P\sin.(\Phi-\mathfrak{E}t) - (m+\mathfrak{E})\mathfrak{P}\sin.(\Phi+\mathfrak{E}t)\text{ etc.} \\ +nb & -nO & -nP & -n\mathfrak{P} \\ & +A & +B & +\mathfrak{B} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{llll} nb\cos.nt - m\cos.\Phi - (m-\mathfrak{E})P\cos.(\Phi-\mathfrak{E}t) - (m+\mathfrak{E})\mathfrak{P}\cos.(\Phi+\mathfrak{E}t)\text{ etc.} \\ -nb & -nO & -nP & -n\mathfrak{P} \\ & +A & +B & +\mathfrak{B} \end{array}\right\} = 0$$

quae cum congruant, conſequimur has determinationes:

$$O = \frac{A}{m+n};\quad P = \frac{B}{n+m-\mathfrak{E}};\quad Q = \frac{C}{n+m-\gamma};\quad R = \frac{D}{n+m-\delta}\text{ etc.}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{B}}{n+m+\mathfrak{E}};\quad \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{C}}{n+m+\gamma};\quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{n+m+\delta}\text{ etc.}$$

ſicque quotcunque fuerint termini haec integralia facile formantur.

XXXII. His autem valoribus pro y et z inventis colligimus ſequentes formas:

$$y\sin.\Phi + z\cos.\Phi = b\sin.(\Phi+nt) + (P-\mathfrak{P})\sin.\mathfrak{E}t + (Q-\mathfrak{Q})\sin.\gamma t + (R-\mathfrak{R})\sin.\delta t \text{ etc.}$$

$$y\cos.\Phi - z\sin.\Phi = b\cos.(\Phi+nt) + O + (P+\mathfrak{P})\cos.\mathfrak{E}t + (Q+\mathfrak{Q})\cos.\gamma t + (R+\mathfrak{R})\cos.\delta t \text{ etc.}$$

ex quibus primo veram poli aequatoris a polo ecliptícae diſtantiam $EA = l$ elicimus; cum enim ſit:

$$dl = -hdt \text{ ſin.}(\Phi + nt) - (P - \mathfrak{P})dt \text{ ſin.} \mathfrak{C}t - (Q - \mathfrak{Q})dt \text{ ſin.} \gamma t - \text{etc.}$$

ſi haec diſtantia media ponatur $= l$, erit integrando

$$l = l + \frac{h}{m+n} \text{ cof.}(\Phi + nt) + \frac{P-\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}} \text{ cof.} \mathfrak{C}t + \frac{Q-\mathfrak{Q}}{\gamma} \text{ cof.} \gamma t + \frac{R-\mathfrak{R}}{\delta} \text{ cof.} \delta t \text{ etc.}$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$, quo motus gyratorii celeritas definitur, accuratius cognoſcendo habemus:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f - \frac{h \text{ cof.}(\Phi + nt)}{\text{tang. } l} - \frac{Q}{\text{tang. } l} - \frac{(P+\mathfrak{P})}{\text{tang. } l} \text{ cof.} \mathfrak{C}t - \text{etc.}$$

vnde per integrationem elicimus:

$$\Phi = ft - \frac{h \text{ ſin.}(\Phi + nt)}{(m+n) \text{ tang. } l} - \frac{Qt}{\text{tang. } l} - \frac{(P+\mathfrak{P}) \text{ ſin.} \mathfrak{C}t}{\mathfrak{C} \text{ tang. } l} - \frac{(Q+\mathfrak{Q}) \text{ ſin.} \gamma t}{\gamma \text{ tang. } l} - \text{etc.}$$

Denique pro vera longitudine primae ſtellae arietis $x = 90° - \psi$, colligimus:

$$x = C - \frac{h \text{ ſin.}(\Phi + nt)}{(m+n) \text{ ſin. } l} - \frac{Qt}{\text{ſin. } l} - \frac{(P+\mathfrak{P}) \text{ ſin.} \mathfrak{C}t}{\mathfrak{C} \text{ ſin. } l} - \frac{(Q+\mathfrak{Q}) \text{ ſin.} \gamma t}{\gamma \text{ ſin. } l} - \frac{(R+\mathfrak{R}) \text{ ſin.} \delta t}{\delta \text{ ſin. } l} \text{ etc.}$$

qua aequatione praeceſſio aequinoctiorum cum omnibus inaequalitatibus determinatur.

XXXIII. Hic denotat m celeritatem motus diurni, vbi loco vnius minuti ſecundi aliud quodvis tempus datum accipere licet, dummodo reliquae celeritates ad idem tempus referantur. Sumto ergo tempore vnius diei, erit $m = 360°$ cui etiam littera f aequalis eſt cenſenda, tum vero erit $n = \alpha m$ vbi

vbi notandum, esse $\alpha = \frac{aa-bb}{bb}$ fractionem minimam ita vt n prae m quasi euanescat. Reliquae celeritates angulares nunc etiam ad tempus vnius diei referendae ex motu et vi astri perturbantis peti debent, cuius locum cum vel Sol vel Luna occupare possit, pro vtroque seorsim has anomalias in motu et axe terrae scrutari conueniet. Vnde mox patebit non opus esse ad horum astrorum inaequalitatem motus respicere cum anomaliae ex eorum motu medio resultantes iam adeo sint exiguae, vt quae insuper ex orbitae excentricitate nascerentur, tuto negligi queant.

De perturbatione motus diurni a vi solis producta.

XXXIV. Pro sole ergo inclinatio ε euanescit, ac posito solis motu diurno $= \mu$ est vt supra vidimus $V = \mu\mu$ et celeritas solis $\frac{dq}{dt} = \mu$; existente q longitudine solis media. Cum ergo sit

$$4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2l\cos.\Phi + \sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q) - \sin l(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q)$$

erit $\mathfrak{C}t = 2q$, et $\mathfrak{C} = 2\mu$ tum vero

$$A = -\tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu\sin.2l,\quad B = \tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu\sin.l(1+\cos.l),\quad \mathfrak{B} = -\tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu\sin.l(1-\cos.l)$$

hincque

$$O = \frac{-3\alpha\mu\mu\sin.2l}{4(1+\alpha)m};\quad P = \frac{3\alpha\mu\mu\sin.l(1+\cos.l)}{4((1+\alpha)m-2\mu)};\quad \mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\mu\mu\sin.l(1-\cos.l)}{4((1+\alpha)m+2\mu)}$$

et ſequentes litterae Q, $\mathfrak{Q}$ etc. euaneſcent:

XXXV. Quare primo pro diſtantia polorum aequatoris et eclipticae EA $= l$, poſita hac diſtantia media $= \mathfrak{l}$, erit

$$l = \mathfrak{l} + \frac{b}{(1+\alpha)m} \text{cof.}(\Phi + \alpha m t) + \frac{P - \mathfrak{P}}{2\mu} \text{cof.} 2q.$$

Deinde pro angulo EAB $= \Phi$ colligimus

$$\Phi = (f + \frac{3\alpha\mu\mu \text{cof.} l^2}{2(1+\alpha)m}) t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \text{ſin.} 2q}{2\mu \text{tang.} l} - \frac{b \text{ſin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha) m \text{tang.} l}$$

vbi iam tempus t in diebus eſt exprimendum; eritque $f = m - \frac{3\alpha\mu\mu \text{cof.} l^2}{2(1+\alpha)m}$; ſeu potius denotante f motum terrae diurnum primo impreſſum is ob vim ſolis cenſendus eſt acceleratus particula $\frac{3\alpha\mu\mu \text{cof.} l^2}{2(1+\alpha)m}$. Denique pro longitudine primae ſtellae arietis obtinemus:

$$x = C - \frac{b \text{ſin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha) m \text{ſin.} l} + \frac{3\alpha\mu\mu \text{cof.} l}{2(1+\alpha)m} t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \text{ſin.} 2q}{2\mu \text{ſin.} l}$$

vnde patet primam ſtellam arietis quotidie per ſpatiolum $\frac{3\alpha\mu\mu \text{cof.} l}{2(1+\alpha)m}$ promoueri.

De perturbatione motus diurni a vi lunae producta.

XXXVI. Hic conſtat pro ε angulum circiter 5^0 capi oportere; quodſi iam q denotet longitudinem lunae mediam, ν eius motum diurnum; ω longitudinem nodi aſcendentis et o eius motum diurnum retrogradum et $\frac{dq}{dt} = \nu$ et $\frac{d\omega}{dt} = -o$. Tum vero ſi maſſa lunae aequalis eſſet terrae foret

$V = \nu\nu$;

$V = \nu\nu$; si ergo statuatur massa terrae ad massam lunae vt 1 ad λ, vt posita terrae massa $= M$ futura sit massa lunae $= \lambda M$ erit $V = \lambda\nu\nu$. Consideremus iam formam:

$$4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2l\cos\Phi + \sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q) - \tang.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-\omega)$$
$$-\sin.l(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q) + \tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+\omega)$$
$$+\tang.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega)$$
$$-\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q-\omega)$$

atque hinc consequimur hos valores:

$$A = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l;\quad \left.\begin{matrix} B = \tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1+\cos l) \\ \mathfrak{B} = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1-\cos.l)\end{matrix}\right\} \mathfrak{E} = 2\nu$$

sicque

$$\left.\begin{matrix} C = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l) \\ \mathfrak{C} = +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\end{matrix}\right\} \gamma = -\mathfrak{o}$$

$D = -C$

et

$\mathfrak{D} = -\mathfrak{C}$

$$\left.\begin{matrix} D = +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l) \\ \mathfrak{D} = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\end{matrix}\right\} \delta = 2\nu+\mathfrak{o}$$

XXXVII. Ex his porro sequentes valores elicientur:

$$\mathfrak{O} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l}{4(1+\alpha)m};\quad P = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1+\cos.l)}{4((1+\alpha)m-2\nu)}$$
$$\mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1-\cos.l)}{4((1+\alpha)m+2\nu)}$$
$$Q = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l)}{4((1+\alpha)m+\mathfrak{o})}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\tang.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)}{4((1+\alpha)m-\mathfrak{o})}$$

30

$R =$

$$R = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\, tang.\varepsilon' cos.l + cos.2l)}{4.(1+\alpha)m - 2\nu - o)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\, tang.\varepsilon' cos.^2 - cos.2l)}{4((1+\alpha)m + 2\nu + o)}$$

vnde pro obliquitate eclipticae oritur

$$l = 1 \ldots + \frac{P-\mathfrak{P}}{2\nu} cos.2q - \frac{Q+\Omega}{o} cos.\omega + \frac{R-\mathfrak{R}}{2\nu+o} cos.(2q-\omega)$$

pro celeritate rotationis seu angulo $EA\mathfrak{B} = \Phi$ vero

$$\Phi = \ldots\ldots \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\, cos.l^2}{2(1+\alpha)m}\, t - \frac{(P+\mathfrak{P})\, sin.2q}{2\nu\, tang.l} + \frac{(Q+\Omega)\, sin.\omega}{o\, tang.l} - \frac{(R+\mathfrak{R})\, sin.(2q+\omega)}{(2\nu+o)\, tang.l}$$

et pro longitudine $1 \text{*} \Upsilon$

$$x = \ldots + \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\, cos.l}{2(1+\alpha)m}\, t - \frac{(P+\mathfrak{P})\, sin.2q}{2\nu\, sin.l} + \frac{(Q+\Omega)\, sin.\omega}{o\, sin.l} - \frac{(R+\mathfrak{R})\, sin.(2q+\omega)}{(2\nu+o)\, sin.l}$$

ſicque a vi lunae motus diurnus primum impreſſus terrae augetur particula $\frac{3\alpha\lambda\nu\nu\, cos.l^2}{2(1+\alpha)m}$.

Euolutio numerica harum formularum.

XXXVIII. Primo cum l denotet diſtantiam polorum aequatoris et eclipticae, erit nunc quidem eius valor medius $= 23°, 29'$, quo in his formulis vti poterimus. Deinde ex tabulis aſtronomicis colligimus:

motum ſolis diurnum medium $\mu = 3548''$

motum lunae diurnum medium $\nu = 47435$

motum nodorum diurnum medium $o = 190\frac{1}{2}$

inclinationem orbitae lunae mediam $\varepsilon = 5°$

et

et pro motu diurno medio ipſius terrae circa axem ſumamus $(1+\alpha)m = 360^\circ = 1296000''$ quandoquidem in terminis minimis valores proxime veros adhibuiſſe ſufficit. Hinc pro formulis ex vi ſolis natis erit:

$\mathfrak{O} = -7'',2849\,\alpha \text{ſin.}\,2l$; $\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0010320\,\text{ſin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)$
0,8624235 7,0137954

$\frac{\mathfrak{Y}}{2\mu} = -0,0010210\,\text{ſin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)$
7,0090374.

Pro formulis autem ex vi lunae natis:

$\mathfrak{O} = -1302'',13\,\alpha\lambda\text{ſin.}\,l$; $\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,014809\,\alpha\lambda\text{ſin.}\,l(1+\text{cof.}\,l)$
3.1146541 8,1705403

$\frac{\mathfrak{Y}}{2\nu} = -0,012777\,\alpha\lambda\text{ſin.}\,l(1-\text{cof.}\,l)$
8,1064437

$\frac{\mathfrak{Q}}{\varrho} = -0,59792\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l+\text{cof.}\,2l)$
9,7766439

$\frac{\mathfrak{Q}}{\varrho} = +0,59811\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l-\text{cof.}\,2l)$
9,7767779

$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+\varrho} = +0,00129\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l+\text{cof.}\,2l)$
7,1116918

$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+\varrho} = -0,00112\,\alpha\lambda(\text{cof.}\,l-\text{cof.}\,2l)$
7,0478673.

XXXIX. Si porro loco l valorem $23^\circ,29'$ ſubſtituamus hi valores ita ſe habebunt

pro vi solis	pro vi lunae
$O = -5'',3249\alpha$	$O = -951'',80\alpha\lambda$
$0,7263152$	$2,9785458$
$\frac{P}{2\mu} = +0,0007886\alpha$	$\frac{P}{2\nu} = +0,011313\alpha\lambda$
$\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = -0,0000337\alpha$	$\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = -0,000422\alpha\lambda$
$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0008223\alpha$	$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,011735\alpha\lambda$
$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0007549\alpha$	$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,010891\alpha\lambda$

$$\frac{Q}{o} = -0,95643\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = +0,14043\alpha\lambda$$
$$\frac{Q-\mathfrak{Q}}{o} = -1,09686\alpha\lambda$$
$$\frac{Q+\mathfrak{Q}}{o} = -0,81600\alpha\lambda$$
$$\frac{R}{2\nu+o} = +0,00207\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = -0,00026\alpha\lambda$$
$$\frac{R-\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00233\alpha\lambda$$
$$\frac{R+\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00181\alpha\lambda.$$

XL. Quodsi iam longitudinem solis littera p designemus, vt a longitudine lunae q distinguatur, ternae nostrae formulae pro motu terrae diurno inventae ita se habebunt tempore t in diebus expresso:

$$i = 1 + k\cos.(\Phi + \alpha mt) + 0,0008223\alpha\cos.2p + 1,09686\alpha\lambda\cos.\omega$$
$$+ 0,011735\alpha\lambda\cos.2q + 0,00233\alpha\lambda\cos.(2q-\omega)$$

$$x = C$$

$$x = C - \frac{k\,\mathrm{sin.}(\Phi + \alpha m t)}{\mathrm{sin.}\, l} + \frac{5'',3249\,\alpha t}{\mathrm{sin.}\, l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\mathrm{sin.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\mathrm{sin.}\, l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\mathrm{sin.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\mathrm{sin.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\mathrm{sin.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,(2q+\omega)$$

$$\Phi = ft - \frac{k\,\mathrm{sin.}(\Phi + \alpha m t)}{\mathrm{tang.}\, l} + \frac{5'',1249\,\alpha t}{\mathrm{tang.}\, l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\mathrm{tang.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\mathrm{tang.}\, l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\mathrm{tang.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\mathrm{tang.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\mathrm{tang.}\, l}\,\mathrm{sin.}\,(2q+\omega).$$

XLI. Quodſi hic coefficientes ſinuum et coſinuum in minuta ſecunda conuertamus reperiemus:

$$l = I + k\,\mathrm{cos.}(\Phi + \alpha m t) + 170\,\alpha\,\mathrm{cos.}\,2p + 226230\,\alpha\lambda\,\mathrm{cos.}\,\omega$$
$$+ 2421\,\alpha\lambda\,\mathrm{cos.}\,2q + 480\,\alpha\lambda\,\mathrm{cos.}\,(2q+\omega)$$

$$x = C - \frac{k\,\mathrm{sin.}(\Phi + \alpha m t)}{\mathrm{sin.}\, l} + 13'',363\,\alpha t - 391''\,\alpha\,\mathrm{sin.}\,2p$$
$$+ 2388'',5\,\alpha\lambda t - 5637\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,2q$$
$$- 422383\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,\omega$$
$$- 937\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,(2q+\omega)$$

$$\Phi = ft - \frac{k\,\mathrm{sin.}(\Phi + \alpha m t)}{\mathrm{tang.}\, l} + 12'',256\,\alpha t - 358''\,\alpha\,\mathrm{sin.}\,2p$$
$$+ 2190,7\,\alpha\lambda t - 5170\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,2q$$
$$- 387400\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,\omega$$
$$- 859\,\alpha\lambda\,\mathrm{sin.}\,(2q+\omega)$$

vbi loco $\frac{b}{(1+\alpha)m}$ scripsi k. In statu autem, quo terra versatur haec constans k euanescit, quod nisi eueniret, motus quidam oscillatorius ipsi diurno foret admixtus, cuius oscillationes absoluerentur tot diebus, quoties fractio α in vnitate continetur.

De obliquitate eclipticae eiusque variatione.

XLII. Posito I pro obliquitate eclipticae media, ea erit maxima, si longitudines solis $=p$ et Lunae $=q$ vel sint 0 vel 6 signorum, simulque nodus ascendens in ipsum punctum aequinoctiale vernum incidat, vt sit $\omega=0$; tum enim erit maxima eclipticae obliquitas $=I+170\alpha+229131\alpha\lambda$ min. sec. Minima autem reperietur, si nodus descendens incidit in principium arietis vt sit $\omega=180°$, simul vero Sol et Luna in punctis solstitialibus versentur; tum autem erit minima obliquitas $=I-170\alpha-228171\alpha\lambda$ min. sec. sicque tota variatio, quatenus a viribus Solis et Lunae efficitur erit $340\alpha+457302\alpha\lambda$ min. sec. quae ex obseruationibus aestimatur quasi $18''$.

XLIII. Quo autem hinc veros valores quantitatum α et λ definire queamus perpendamus promotionem mediam primae stellae arietis, quae inter-

teruallo vnius diei fit per ſpatiolum $13\frac{1}{3}\alpha+2388\frac{1}{2}\alpha\lambda$ min. ſec. hincque interuallo vnius anni per $4870\alpha+872400\alpha\lambda$ min. ſec. quod ex obſeruationibus aeſtimatur $50\frac{1}{3}''$. Prior autem valor $18''$ ob paruitatem non tam certus videtur, vt nulla correctione egeat. Factis ergo aliquot hypotheſibus pro nutatione numeri λ indeque fractionis α valor ita prodit

ſi nutatio	$18''$	$18''\frac{1}{3}$	$18''.2$	$19''$
erit	$\lambda=\frac{1}{104}$;	$\frac{1}{97}$;	$\frac{1}{91}$;	$\frac{1}{85}$
et	$\alpha=\frac{1}{2053}$;	$\frac{1}{2735}$;	$\frac{1}{2888}$;	$\frac{1}{3000}$

vnde patet vt phaenomenis ſatisfiat, maſſam lunae vix maiori terrae parti quam $\frac{1}{85}$ aequari poſſe. Neque ergo ſententia *Neutoni* ſubſiſtere poteſt, qui lunae maſſam parti quadrageſimae terrae aequalem aeſtimauit; et ſententia Cel. *Dan. Bernoulli* multo propius ad veritatem accedere eſt cenſenda, qua lunae tantum pars terrae ſeptuageſima tribuitur. Ac ſi nutationem axis terrae non vltra $19''$ per obſeruationes ſtatuere licet, maſſa lunae adhuc eſt minor, neque partem octogeſimam quintam terrae ſuperare poteſt.

XLIV. Ponamus ergo $\alpha=\frac{1}{3000}$ et $\lambda=\frac{1}{85}$, hincque $\alpha\lambda=\frac{1}{255000}$ et variationes in obliquitate eclipticae ita a longitudine ſolis p, longitudine lunae q et longitudine nodi aſcendentis ω pendebunt, vt ſit

$$l=1+0{,}57\cos.2p+0{,}095\cos.2q+8{,}87\cos.\omega+0{,}019\cos.(2q+\omega)$$

coefficientibus in minutis secundis expressis. Cum igitur secunda et quarta aequatione decimam quidem minuti secundi partem conficiant, iis omissis erit

$$l = \mathfrak{l} + 0{,}57 \text{ cos. } 2p + 8{,}87 \text{ cos. } \omega$$

quarum aequationum prior cosinui duplae longitudinis solis est proportionalis vixque semiminutum secundum superat posterior vero cosinui longitudinis nodi ascendentis est proportionalis, et fere ad $9''$ ascendere potest, quod egregie cum obseruationibus consentire videtur.

De praecessione aequinoctiorum seu longitudine primae stellae arietis.

XLV. Hic primo consideranda est huius stellae longitudo media, quae ad quoduis tempus ex praecessione annua facile determinatur. Sit ergo $\mathfrak{x}$ longitudo media ad datum quoduis tempus, ac pro eius longitudine vera inuenienda, positis ad hoc tempus longitudine solis $= p$, lunae $= q$ et nodi ascendentis $= \omega$ erit eius longitudo vera:

$$x = \mathfrak{x} - 1{,}30 \text{ sin } 2p - 0{,}22 \text{ sin. } 2q - 16{,}56 \text{ sin. } \omega$$

omissa postrema aequatione, vtpote partem trigesimam minuti secundi non superante. Hinc patet si nodus ascendens fuerit in $\Upsilon\, 0°$, longitudinem mediam imminui $16\frac{1}{2}$ min. sec., sin autem sit in $\simeq 0°$, tantundem augeri, tum vero si sol versetur in $\mathfrak{V}\, 15°$, vel $\mathfrak{M}\, 15°$, eam minui $1\frac{1}{3}$ sec. tantumdem vero

vero augeri, si versetur in ♌ 15° vel ♒ 15°; correctio a loco lunae pendens negligi potest. Ex quo perspicitur longitudinem veram stellarum fixarum a media vsque ad 18″ discrepare posse.

De inaequalitate in ipso motu diurno terrae a viribus solis ac lunae producta.

XLVI. Haec inaequalitas ab angulo Φ pendet, quem videmus non exacte tempori esse proportionalem; cum sit reuera:

$$\Phi = 360^\circ t - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega - 0,03 \sin.(2q + \omega).$$

Est autem Φ angulus EAB, quo primus meridianus terrae AB a circulo coelesti AE, qui est colurus solstitiorum ab occidente in orientem recedit, quod etiam de quouis alio meridiano terrestri, et coluro aequinoctiorum est intelligendum. Ita si secundum motum aequabilem colurus aequinoctiorum, seu punctum aequinoctiale vernum iam per nostrum meridianum, occasum versus angulo f processisset eius vera elongatio a nostro meridiano esset $\Phi = f - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega$ omissa vltima inaequalitate vt insensibili.

XLVII. Quoniam culminatio puncti aequinoctialis verni in ephemeridibus quotidie assignari solet,

let, nunc quidem cognoſcimus illis temporis momentis punctum aequinoctiale vernum ſi ſumma harum aequationum ſit negatiua ad meridianum nondum appuliſſe, ſed ab eo etiamnunc eſſe remotum tot minutis ſecundis, quot aequationes illae praebent. Sin autem tota aequatio fiat poſitiua, indicio id eſt punctum aequinoctionale vernum iam per meridianum tranſiiſſe, totidemque minutis ſecundis ab eo occidentem verſus eſſe remotum. Illo igitur caſu ſerius culminabit temporis interuallo, quo per motum diurnum aequatio illa conficitur, hoc vero caſu, iam ante tantum temporis interuallum culminauit.

XLVIII. Manifeſtum autem eſt hanc motus diurni inaequalitatem tantum in punctis aequinoctialibus et ſolſtitialibus cerni, cum ea proxime ſit aequalis inaequalitati in praeceſſione aequinoctiorum; ita vt in ſtellis fixis nulla huiusmodi inaequalitas locum ſit habitura, ſed interualla temporum, quibus eadem ſtella fixa ad meridianum appellit, tuto pro aequalibus haberi queant. Reſpectu ergo ſtellarum fixarum motus vertiginis terrae perfecte eſt aequabilis, neque vllam perturbationem a viribus ſolis et lunae patitur, ſicque illa motus irregularitas vnice ab inaequabili aequinoctiorum praeceſſione proficiſci eſt cenſenda, neque ergo variatio illa in longitudine ſtellarum fixarum effecta vllam variationem in earum culminatione gignit; ex quo neceſſe

neceſſe eſt, vt punctorum aequinoctialium culminatio totam illam irregularitatem perſentiscat.

XLIX. Hi effectus a viribus ſolis ac lunae in motu terrae diurno producti probe ſunt diſtinguendi ab iis, quos a viribus planetarum in terram agentibus naſci olim demonſtraui, qui etiamſi quoque puncta aequinoctialia et obliquitatem eclipticae afficiant, tamen ex fonte prorſus diuerſo promanant, dum iis ipſum planum eclipticae immutatur, aequatore manente inuariato. Atque ex his binis cauſis coniunctis omnes irregularitates, quibus ſtellae fixae obnoxiae videntur, explicari oportet; quae phaenomena nunc quidem ab Aſtronomis eo maiori cura ſunt obſeruanda, cum ad ea perpetuo omnes illae minimae aberrationes in coelo, ad quas maxime ſunt attenti, referri debeant.

COMMENTATIO

DE VTILISSIMA AC COMMODISSIMA DIRECTIONE POTENTIARVM FRICTIONIBVS MECHANICIS ADHIBENDARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Quoties onera ſuper plano aſpero mouenda occurrunt, fieri id nequit, etiamſi planum perfecte fuerit horizontale, quin onera, pro ratione ponderis, reſiſtentiam manifeſtent, quae Mechanicis frictio vocatur: huiuscemodi reſiſtentiam ſuperare debent traharii iumentaue cum traham prouehunt: alius eſt indolis frictio in curribus, rhedis aliisue machinamentis rotalibus, quae multo minori opera protrahuntur: Cum vero baiuli in ripa incedentes nauem poſt ſe trahunt, hi quidem reſiſtentiam a naue experiuntur aut patiuntur, at haec reſiſtentia nihil commune habet cum frictione. Nullo interim habito diſcrimine, diſputatum fuit, ſub quanam directione potentiae motrices eſſent applicandae vt maximus inde fructus perciperetur; valde paradoxa videtur quaeſtio, an motrix potentia non ſit ſemper directe opponenda reſiſtentiae, ſunt qui de

de hoc dubitant axiomate; veram autem dubitandi, vel potius negandi, rationem plane intactam, si bene memini, reliquerunt: duobus dicam verbis quod res est; quoties resistentia inuariata manet dum agit potentia mouens, saluum manebit axioma; quandocunque autem resistentia ab actione potentiae variatur, idem fallere poterit axioma. Interim nemo dubitabit quin potentia mouens in ipso plano verticali per directionem motus transeunte locanda sit; quaeritur saltem an directio potentiae ad directionem motus inclinanda sit in praefato plano nec ne.

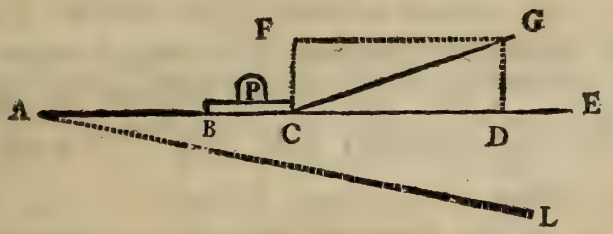
§. 2. Cum nuperrime hanc praefatam controversiam iterum a viro, cuius merita magni facio, viderem agitatam, eandemque ad normam, quam dixi, perpenderem, non poteram non protinus perspicere, mensuram superandae frictionis pendere ab ipsa directione potentiae onus protrahentis; etenim quando potentia trahens superiora versus dirigitur, tunc ipsum corpus simul protrahitur atque subleuatur; posterior autem actio frictionem diminuit: sic igitur aliquod oritur ab obliquitate potentiae dispendium simulque aliquod lucrum; scilicet potentia protrahens absoluta non tota vtiliter impenditur, sed viciſſim ipsa diminuitur resistentia. Iam itaque veram habemus dubitandi causam, num potentia directe num oblique oneri protrahendo sit applicanda; si obliquitas potentiae plus noceat quam diminutio resistentiae prodest, conducet onus directe protrahe-

re; ſin minus, praeferenda erit directio potentiae aliquomodo obliqua: haec cum ita ſint, tenuis calculus litem diiudicabit; nec iniucundum fuit intelligere praeſtare potentias obliquas adhibere quam directas, obliquitatem autem ſuos habere limites, quos vltra citraque nullum lucrum adhuc ſperari poſſit, ipſum vero lucrum alicubi eſſe maximum. Haec vt tanto planiora fiant paucula quaedam de frictionibus praemonebo.

§. 3. Corpora ſuper plano quieſcentia non aliter dici poſſunt frictionem habere quam *virtualiter* ſtatim vero ac mouentur ſubito totam ſuam frictionem manifeſtant ſiue lentiori ſiue velociori motu ferantur, nec enim quicquam velocitates ad frictionem ſiue augendam ſiue diminuendam conferre experimentis innotuit. Idem corpus ſimiliter poſitum alii atque alii plano ſuper incumbens aliam atque aliam frictionem motus opponit, ita quoque idem planum diuerſis corporibus ſuppoſitum diuerſas frictiones producit, etiamſi corpora nec figura, nec ſitu, nec pondere ſint diuerſa. Si porro eidem ſuperficiei planum contingenti modo maius modo minus imponatur pondus erit quantitas frictionis ſemper ponderi poportionalis, perinde quoque eſt ſiue partes ſuperficiei vniformiter ſiue inaequaliter ad planum apprimantur, modo ſumma appreſſionum eadem maneat; ſingula autem corporis puncta motu inter ſe parallelo moueri hic ſubintelligendum eſt:

hinc

hinc ſequitur frictionem diminui a potentia quae appreſſionem corporis contra planum ſuppoſitum diminuit et eſſe diminutionem frictionis diminutioni appreſſionis proportionalem. Sequitur etiam frictionem ſimilis ſuperficiei, cui idem pondus inſiſtit, eandem eſſe, ſiue maior ſiue minor ſit ſuperficies planum contingens. His praemonitis rem ipſam aggredior primo autem agam de frictione oneris ſuper plano horizontali promouendi atque inquiram, ſub quanam directione potentia oneri ſit applicanda, vt minima potentia ad motum requiratur.



§. 4. Sit iam planum horizontale AE, cui incumbit ſuper baſi BC pondus P: Putetur puncto C potentia applicata, quae pondus P trahat in directione CE; talem potentiam deinceps vocabo, *directam*, quae eſt aequalis integrae frictioni, ponderi P ſuper baſi BC, debitae, quae cum ſit ipſi ponderi proportionalis indicabo potentiam *directam* per $\frac{P}{n}$; pendet autem numerus n a natura ſuperficierum quibus baſis corporis et planum ſuppoſitum ſe contingunt ita vt communiter intra 2 et 4 conſiſtat.

His ita definitis ponatur nunc, potentiam aliam applicari sub directione CG sitque angulus inclinationis $GCD = z$ ipsaque potentia corpus protrahens $= \pi$; erit iam potentia obliqua π ita determinanda vt cum potentia directa $\frac{P}{n}$ comparari possit: hunc in finem repraesentabimus potentiam π linea CG eamque resoluemus in verticalem CF atque horizontalem CD, quarum prior, ad protractionem plane inutilis, tota impenditur in sublevandum onus atque diminuendam appressionem eius contra planum suppositum, dum posterior, appressionem nihil mutans, tota impenditur in protractionem. Est autem potentia $CF = \pi \sin. z$; hinc appressio corporis ad planum $= P - \pi \sin. z$ atque adeo frictio $= \frac{P - \pi \sin. z}{n}$, quae frictio facienda est aequalis potentiae $CD = \pi \cos. z$, vnde $\frac{P - \pi \sin. z}{n} = \pi \cos. z$ siue $\pi = \frac{P}{n \cos. z + \sin. z}$.

§. 5. Ex praemissa formula, potentiam CG exprimente, facile intelligitur, si primo angulus z nullus sit posteaque paulatim increscat, fore vt ista potentia sensim decrescat ad certum vsque gradum deindeque iterum augescat: igitur directio erit, qua potentia minima requiritur ad onus promouendum; haec autem directio determinabitur, si denominator $n \cos. z + \sin. z$ quantum fieri potest, maximus accipiatur adeoque differentiale ipsius ponatur $= 0$: sic erit $-n\,dz \sin. z + dz \cos. z = 0$ vel $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \frac{1}{n}$ siue $\text{tang.}\, z = \frac{1}{n}$.

Hinc

Hinc etiam $\text{fin.} z = \frac{1}{\sqrt{nn+1}}$ atque $\text{cof.} z = \frac{n}{\sqrt{nn+1}}$ et π, cum eſt minima, $= \frac{P}{\sqrt{nn+1}}$, vnde ſequitur eſſe potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{nn+1}$ ad n.

Intelligimus iam non parum ſubleuari iumenta aut baiulos in protrahendis trahis, cum potentiam praefata lege ſurſum dirigunt; tanto maius autem fore emolumentum, quanto maior ſit frictio ſiue quanto minor aſſumatur litera n. Haec ſolo intuitu paruulae ſubiunctae tabellae apparebunt, vbi pondus ipſum protrahendum indicatur per 1000, intenſitas autem frictionis decreſcit ab $\frac{1}{2}$ vsque $\frac{1}{10}$.

Intenſitas frictionis ſiue $\frac{1}{n}$	Potentia directa ſiue $\frac{P}{n}$	Inclinatio Potentiae ſiue angulus z	Potentia protrahens ſiue π
0,5	500	26°. 34′	447
0,4	400	21. 48	371
0,3	300	16. 42	288
0,2	200	11. 19	196
0,1	100	5. 43	99$\frac{1}{2}$

§. 6. Quum trahae ſuper via ſilicata ſicca trahuntur, puto eſſe frictionem propemodum aequalem dimidio ponderi ſiue $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$; igitur theoria noſtra docet, funes ad angulum 26 graduum, 34 min. eſſe dirigendos, hancque regulam aurigas noſtros non male obſeruare vidi: ſic diuturnus rerum

rum vſus apud plebem non raro quidem praeuenit docilem eruditorum ſolertiam, verum inuenta aut obſeruata ſolus nunquam perficit.

At ſi via niue calcata fuerit obtecta, multo fiet minor frictionis intenſitas multoque minus funes ductarii, quibus equi trahae alligantur, erunt inclinandi nec, meo quidem iudicio, vltra duodecim gradus: imo ſi vel omnia recte inſtituantur, parum iuuabit lucellum, vtpote quod cum ipſa frictione decreſcit et quidem propemodum in ratione frictionum quadrata.

§. 7. Quod ſi nunc hancce noſtram theoriam ad machinamenta rotalia, veluti rhedas, currus etc. applicemus, facile intelligimus, nihil aut parum admodum emolumenti ab obliquitate potentiarum ſperari poſſe, praeſertim ſi axes bene fuerint axungia obliniti: ita enim frictiones ſuper axe, non vltra trientem appreſſionum aſſurgent et ab actione rotarum inſigniter porro diminuuntur; ita vt, rebus omnibus bene perpenſis, integram reſiſtentiam non vltra vigeſimam totius ponderis partem communiter aſſurgere credam: ſic foret $\frac{1}{n} = \frac{1}{20} = 0,05$ ipſaque obliquitas debita tres gradus non attingeret nec potentia ipſa vltra vnam octingenteſimam potentiae directae partem diminueretur, cuiusmodi lucellum nemo curabit: tota res paucis expedietur verbis; *vtiliter adhibetur obliquitas potentiae quando reſiſten-*

ſiſtentia directa notabilem ponderis promouendi partem efficit ipſaque reſiſtentia a diminutione vel ſubleuatione ponderis notabiliter diminuitur, haec regula valebit quaecunque ſit reſiſtentiae ſpecies aut quomodocunque oriatur; modo itaque detur relatio inter imminutum pondus oneris horizontaliter promouendi eiusque reſiſtentiam directam imminutam, determinari poterit obliquitas ſub qua potentia vtiliſſime adhibetur. Sic igitur theoria ad alias quoque reſiſtentiae ſpecies adhiberi poterit, veluti ad protrahenda corpora aquis inſidentia.

In his corporibus potentia ſurſum inclinata duplicem habebit effectum; primus erit vt corporis natantis pars ſubmerſa imminuatur atque ſic minorem reſiſtentiam ab aquis patiatur, alter vt poſitio naturalis corporis immutetur, a qua ſitus immutatione reſiſtentia aquarum modo diminui modo augeri poteſt pro configuratione corporis; hic inuariata ſupponitur motus velocitas. Si foret corpus cylindricum aquis innatans in eoque conſtanter ſupponatur axis verticalis, pro tali corpore data velocitate protrahendo eaedem valerent regulae quas dedimus pro frictione corporis ſuper plano horizontali moti ſuperanda. At ſi de nauibus ab hominibus vel equis, in ripa progredientibus, protrahendis quaeſtio ſit, deuoluemur ad caſus, quibus potentia directa fere nulla eſt, ſi cum pondere totius nauis comparetur, ſic vt potentia naui ſit tantum non

horizontaliter applicanda atque plane negligi debeat parum lucelli quod ab obliquitate sperari possit. Male igitur scriptores nullaque ratione innixi huiuscemodi resistentias cum frictionibus immediatis perinde habuerunt, ac si vbique potentiae sub eodem obliquitatis angulo essent applicandae.

§. 8. Quae dixi de directione potentiae in frictiones super plano horizontali superandas adhibendae, egregie confirmantur, si tota res hoc alio modo concipiatur, fingatur nempe catena extensa et vbique in planum suppositum horizontale vniformiter grauitans: tum vero extremitati eius anteriori potentia applicetur, qua catena oblique sursum et antrorsum in directione ipsius catenae protrahatur: sit rursus potentia ista $=\pi$, angulus obliquitatis eius $=z$, pondus catenae $=P$, longitudo eius $=l$, potentia directa in totam catenam protrahendam requisita $\frac{P}{n}$. Nunc autem patet fore vt pars catenae eleuetur atque ab omni frictione liberetur, dum pars reliqua etiammum humo incumbens frictionem suam retinet; igitur si potentia obliqua π resoluatur in verticalem et horizontalem, tunc verticalis tota impendetur in eleuationem partis eleuatae, horizontalis vero in protractionem partis humo incumbentis; sit pars catenae eleuatae $=x$, pars altera humo incumbens $=l-x$, fiet pondus partis eleuatae $=\frac{x}{l}P$ alteriusque partis $=\frac{l-x}{l}P$, erit autem huius posterioris partis frictio $=\frac{l-x}{nl}P$; hinc sequi-

sequitur fore potentiam verticalem, qua pars catenae eleuatur $= \frac{x}{l} P$ et potentiam horizontalem, qua catena protrahitur $= \frac{l-x}{nl} P$; igitur erit potentia absoluta $\pi = P\sqrt{(\frac{xx}{ll} + \frac{ll-2lx+xx}{nnll})}$, quae cum debet esse minima, facienda erit longitudo $x = \frac{l}{nn+1}$, ergo potentia verticalis extremitati catenae applicata siue $\frac{x}{l} P$ iam erit $= \frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae catenae dicata siue $\frac{(l-x)P}{nl} = \frac{P}{n} - \frac{P}{n^3+n} = \frac{nP}{nn+1}$; hinc potentia absoluta siue $\pi = P\sqrt{(\frac{1}{(nn+1)^2} + \frac{n^2}{(nn+1)^2})} = P\sqrt{(\frac{1}{nn+1})}$; atque haec quantitas prorsus eadem est cum ea, quam §. 5. alia methodo inuenimus. Est porro potentia horizontalis siue $\frac{nP}{nn+1}$ ad potentiam verticalem siue $\frac{P}{nn+1}$ sicuti sinus totus ad tangentem anguli quaesiti z, vnde tang. $z = \frac{1}{n}$, quod idem pariter §. 5. inuenimus.

§. 9. Huiuscemodi quaestiunculae aliae haud paucae, quae omnes inter se consentiunt, afferri possent; superaddam vnicam; sit scala ex duobus vectibus parallelis et aequilongis constans eique onus super impositum; alterum scalae extremum humo superincumbat horizontali, alterum a iumento vel baiulo gestetur sitque sic scala onusta protrahenda; quaeritur vbinam centrum grauitatis istius systematis locandum sit vt minima potentia absoluta requiratur. Solutio huius quaestionis plane eadem est, quae quaestionis praecedentis, si eaedem accipiantur denominationes, quarum analogismum quisque me

non explicante, perſpiciet, modo nunc per x intelligatur diſtantia inter centrum grauitatis et extremitatem ſcalae poſteriorem atque per $l-x$ diſtantia inter centrum grauitatis atque extremitatem anteriorem ſic vt inuertatur ordo, cuius ratio per ſe patet. Hoc modo fiet iterum $x = \frac{l}{n\,n+1}$; potentia verticalis extremitati anteriori ſcalae applicata $= \frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae ſcalae onuſtae dicata $= \frac{nP}{nn+1}$; potentia abſoluta $\pi = \frac{P}{\sqrt{n\,n+1}}$; quae omnia vtut diuerſimode ad mechanicam practicam accommodata, egregie, inter ſe conſpirant, ita vt quaecunque fuerit frictionis intenſitas indicata per $\frac{1}{n}$, eadem vbique oriatur potentia abſoluta, cum eſt minima, quae §. 5. definita fuit.

Fuerit v. gr. $n = 2$, erit catena ita oblique trahenda vt quinta eius pars de humo eleuetur et reliquae quatuor quintae partes eidem porro incumbant. In ſcala autem ita erit pondus ſuper imponendum vt centrum grauitatis totius ſyſtematis quinta parte totius longitudinis ab extremitate poſteriori diſtet, ab altera extremitate quatuor quintis partibus.

Si maior fuerit valor litterae n, id eſt, ſi minor ponatur frictionis intenſitas, minor etiam catenae portio eleuanda magisque centrum grauitatis ſcalae onerandae erit ad extremitatem poſteriorem appropinquandum.

§. 10.

§. 10. Videamus nunc quoque, quomodo res inſtituenda ſit in via vniformiter accliui: Hunc in finem accipiatur, in figura paragrapho quarta appoſita, linea AL pro horizontali, ſic vt AE denotet viam accliuem ſitque angulus accliuitatis ſiue angulus EAL = A; lineae autem FC et GD non vt verticales ſed vt perpendiculares ad lineam AE conſiderentur. Nunc, praeter frictionem, corpus ſuo pondere inſuper reſiſtit et liquet fore potentiam directam, ad protrahendum corpus requiſitam = P ſin. A $+\frac{P\ cos.\ A}{n}$. Quod ſi vero potentia π obliqua ſurſum trahat ſub directione CG rurſusque angulus GCD dicatur z, erit nunc potentia

$$\pi = \frac{n\ ſin.\ A + cos.\ A}{ſin.\ z + n\ cos.\ z}\ P.$$

Quoniam in hac expreſſione numerator conſtans eſt, denominator autem variabilis idem qui in fine paragraphi quartae, ſequitur potentiam π ſub eadem conditione minimam fieri, erit igitur rurſus, ſicuti in paragrapho quinta $\frac{ſin.\ z}{cos.\ z} = \frac{1}{n}$ ſiue tang $z = \frac{1}{n}$.

ipſaque potentia minima, poſt ſubſtitutionem praefati valoris z congruasque adhibitas expreſſiones fiet $= \frac{n\ ſin.\ A + cos.\ A}{\sqrt{(n\,n+1)}}\ P$. Indicat haec expreſſio, eſſe rurſus potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n, quod idem §. 5. inuenimus.

§. 11. Notabilis mihi videtur praefata anguli z, minimae potentiae reſpondentis, conſtantia

pro quacunque acclíuitate aut etiam decliuitate viae vel plani ſuppoſiti; conſtanter enim tangens iſtius anguli eſt $= \frac{1}{n}$, ſed et alia inſuper eſt eiusdem anguli proprietas, quae, quamuis notiſſima ſit, hic praeprimis notari meretur. Nempe omne planum, cui corpus ſuper imponitur, ad certum et definitum angulum inclinari poteſt, ante quam ipſum corpus proprio ſuo pondere frictionem ſuperet ac ſuper plano deuoluatur ſiue deorſum repat; hicque ipſe angulus eſt, qui in theoria noſtra vbique et conſtanter indicatur. Etenim, poſito iterum hoc angulo $= z$, pondere $= P$ et frictione horizontali $= \frac{P}{n}$, erit potentia, corpus deorſum trahens $= P \text{ ſin. } z$ et frictio $= \frac{P}{n} \text{ coſ. } z$, vnde rurſus tang. $z = \frac{1}{n}$.

Huiuscemodi proprietates haud obſcure indicant, ineſſe aliquid in argumento noſtro quod ſit ipſi rei naturae accommodum atque eſſentialiter inſitum.

Caeterum patet, ſi via ſit decliuis, fore tunc terminum ſin. A, negatiue ſumendum atque, ſi decliuitas tanta ſit vt corpus ſua ſponte deſcendere incipiat, fore $\pi = 0$, imo potentia iſta erit negatiue accipienda, ſi tang. A ſimul maior ſit quam $\frac{1}{n}$, At huius loci non eſt his disquiſitionibus abſtractis, quae nunquam ad praxin applicari poſſunt, immorari.

§. 12.

§. 12. Diminutiones potentiarum, quas pertractauimus, sunt plane diuersae indolis, a diminutionibus potentiarum quae ab vsu vectis alteriusue machinae simplicis mutuantur. In his enim via, sub *ipsa directione potentiae*, perficienda tantum crescit quantum ipsa potentia decrescit et propterea labor absolutus idem censeri potest, nisi quatenus specialis siue hominum siue animalium laborantium constitutio aliqualem rei diuersitatem iniiciet. In nostro autem argumento tantum abest, vt pro diminuta potentia maior via *in directione potentiae* perficienda sit, quin ipsa quoque via haec simul diminuatur atque adeo nouum superueniat lucrum: est enim motus absolutio ad motum secundum *directionem potentiae*, cui soli potentia applicatur, vt sinus totus ad cosinum obliquitatis et in hac quoque ratione laborem, in protrahendo onere insumtum, iterum diminui aliqua cum ratione affirmare licet, si modo intra certos limites subsistamus. Optandum autem foret vt pro quouis labore, cuiuscunque sit generis, vera defatigationis mensura innotesceret tum de hominibus tum de diuersis animalibus; haec notitia a baiulis, cursoribus peditibus aliisque operariis tum etiam ab aurigis equitibus, stabulariis caeterisque huius ordinis hominibus melius quam ab aliis acquiretur: velim autem vt vbique de penso diurno sermo sit vt sic singula comparari possint cum eo quod iumenta baiuliue perficiunt, cum operam suam totam vnice in protrahen-

trahendum onus locant; iſti enim labori quotidie ferendo quid valeant ſic ſatis notum eſt.

Haec dum explorata habeantur, tutiſſime hac regula vtemur, laborem quemcunque aeſtimandum eſſe ex potentia adhibita et ex motu ad directionem potentiae relato, modo ſimul defatigationis, quae ſoli inceſſui libero debetur, ratio habeatur.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE AEQVILIBRIO ET MOTV CORPORVM FLEXVRIS ELASTICIS IVNCTORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Corpora hic rigida conſidero, quorum autem duo pluraue ita inter ſe ſint coniuncta, vt ſeparationi quidem reſiſtant, verumtamen in ſingulis iuncturis inflexionem ſeu motum gyratorium circa quempiam axem admittant. Iuncturas autem ita comparatas aſſumo, vt iſta inflexio non libere ſuccedat, ſed vi inflectenti eo magis reluctetur, quo maior inflexio produci debeat. Datur ſcilicet in huiusmodi corporibus ſtatus naturalis, in quo ſine actione cuiusquam vis externae ſe quaſi ſponte conſeruent; quo magis autem de hoc ſtatu per inflexionem deturbari debeant, vt eo maiori vi ſit opus ad eiusmodi effectum producendum. Denique vero his flexuris eiusmodi vim inſitam tribuo, vt poſtquam corpora de ſitu naturali fuerint depulſa, ceſſante vi inflectente, ea ſponte ſe in ſtatum natura-

lem reſtituant, in quo quippe natura elaſticitatis conſiſtit.

2. Ad hanc igitur indolem ſunt referenda omnis generis corpora elaſtica, veluti laminae elaſticae, quae incuruatae vi pollent ſeſe in ſtatum naturalem reſtituendi. Hoc tantum intercedit diſcrimen, quod in huiusmodi corporibus nullum detur punctum, circa quod inflexio fieri nequeat ita vt ea tanquam ex infinitis elementis, ope flexurarum elaſticarum coniuncta ſpectari oporteat. Hic autem quo latius inueſtigationes noſtrae pateant, corpora ex finito partium numero conflata contemplabor, quae partes ſingulae nullius figurae mutationis ſint capaces, ſed in ipſis tantum iuncturis circa ſe inuicem elaſticitatis reſiſtentia ſuperata inflecti patiantur.

3. Quo autem clarius omnia principia, ex quibus huiusmodi corporum determinatio motus eſt petenda, perſpiciatur, inueſtigationes a caſu ſimpliciſſimo, quo duo tantum corpora huiusmodi flexura elaſtica ſunt coniuncta exordiri conueniet, ſic enim omnibus circumſtantiis probe perpenſis multo tutius ac felicius ad maiorem corporum hoc modo inter ſe iunctorum numerum progredi licebit. Ante omnia igitur hic in ipſa iunctura axis ille conſiderandus occurrit circa quem vtrumque corpus moueri poteſt ita vt altero fixo alterum circa iſtum axem de ſitu naturali detorqueri queat, quatenus vis inflectens elaſticitati ſuperandae par eſt. Deinde vero vtrumque

que corpus seorsim est spectandum, quae cum sint rigida, mechanica cognitio ad motum definiendum requisita cum centro inertiae tum vero momentis inertiae continetur.

4. Sit igitur recta Mm axis flexurae, qua ambo corpora sunt coniuncta et dum ea in statu naturali versantur, sit alterius corporis centrum inertiae in A, alterius vero in B, quae quidem in figura ita exhibentur quasi cum axe Mm essent in eodem plano, verum vtique fieri posset vt plana MAm et MBm certum quendam angulum inter se constituerent, quemadmodum etiam rectae normales Aa et Bb ab vtroque centro inertiae ad axem ductae vel in vnum vel diuersa puncta incidere possunt, quae circumstantia si ad motum spectemus, probe est obseruanda. Hinc ergo in quouis statu violento inclinatio planorum MAm et MBm, cum naturali siue sit nulla siue aliqua, comparari debet quoniam a differentia quantitas vis elasticae, quae tum ad restitutionem exeritur, pendet. Tab. III. Fig. 1.

5. Ad vim elasticam autem mente saltem concipiendam, statuatur axis flexurae plano tabulae in L normalis, et sit ALb status naturalis, ita vt tum ambo centra inertiae in planis quae rectis LA et Lb normaliter insistunt, reperiantur. Nunc autem consideretur status quicunque violentus ALB, quo alterius corporis centrum inertiae in planum rectae LB normaliter insistens sit detrusum, ac sta- Fig. 2.

tus deturbatio ex angulo BLb erit aestimanda, cum tendat ad hunc angulum extinguendum; atque in calculo vis elastica sinui huius anguli proportionalis statui solet, cuius ratio ita exhiberi potest. Vi elasticae reuera insitae substituatur mente filum elasticum Bb, vi praeditum se in ratione longitudinis Bb contrahendi; ponatur $LB = Lb = k$ angulus $BLb = \omega$, vt sit $Bb = 2b \sin.\frac{1}{2}\omega$, ideoque ipsa vis $= E \sin.\frac{1}{2}\omega$ quae cum punctum B in directione Bb sollicitet, erit eius momentum ratione axis $L = E \sin.\frac{1}{2}\omega . LB \sin. LBb = Eb \sin.\frac{1}{2}\omega \cos.\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2} E b \sin.\omega$; vnde patet momentum vis elasticae, quod hic est spectandum, non sine ratione sinui anguli inflexionis BLb proportionale statui.

6. Si extremitates A et B filo AB constringantur, euidens est hoc modo corpora in statu violento retineri posse, vbi imprimis tensionem fili ad hoc requisitam notari conuenit. Sit igitur T ista fili tensio restitutionem in statum naturalem coercens, cuius momentum ad inflexionem augendam cum sit $= T.LB.\sin.ABL = T.AL.\sin.BAL$, ob $AB : \sin.ALB = AL : \sin.ABL$, erit id $= \frac{T.LA.LB}{AB} \sin.ALB$, momento elasticitatis, quod sit $= E \sin.\omega$ aequale ponendum vnde positis $LA = a$, $LB = b$, angulo naturali $ALb = \lambda$ vt sit $ALB = \lambda - \omega$, et $AB = \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos.(\lambda - \omega))}$ erit tensio $T = \frac{E \sin.\omega \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos.(\lambda - \omega))}}{ab \sin.(\lambda - \omega)}$. Quodsi ergo in statu naturali partes LA et Lb in directum iaceant, vt sit $\lambda = 180°$ fit $T = \frac{E.AB}{ab}$.

7. Hic

7. Hic casus per se quidem perspicuus eo magis est memorabilis quod ingens paradoxon involuere videtur. Si enim duae virgae rigidae AL, LB in L ita elatere sint iunctae, vt sponte in directum sint extensae, eaeque constrictione fili AB in statu inflexo ALB detineantur, mirum videbitur, quomodo tensio fili quantitati $\frac{E.AB}{LA.LB}$ hoc est ipsi fili longitudini AB proportionalis esse queat, quandoquidem hoc modo ad inflexionem minorem maior fili tensio, ad maiorem autem minor requiritur. Scilicet minuta fili tensione, virgae subito in statum naturalem resilient cum tamen tensio minor maiorem inflexionem sustinere posset. Contra autem aucta fili tensione, inflexio adeo augebitur, cum tamen maior inflexio minorem tensionem exigat. Tab. III. Fig. 3.

8. Quo hoc paradoxon dilucidemus, virgam AL vt fixam spectemus, vt altera BL cum a certa vi secundum BA quae sit $=D$, tum ab elatere Bb sollicitata circa punctum seu axem L fixum moueatur. Cum igitur positis $LA=a$ $LB=b$, $BLb=\omega$, vt sit $AB=\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}$, fit vis BA momentum $=\frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}}$, elateris autem momentum contrarium $=Eb\sin.\omega$, si virgae BL momentum inertiae respectu axis L statuamus $=Bcc$, erit ex motus principiis $\frac{Bccddw}{2gdt^2}$ $=\frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}}-Eb\sin.\omega$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, siquidem tempus

pus t in minutis ſecundis exprimere velimus. Multiplicemus per $d\omega$ et integrando obtinebimus

$$\frac{B\,c\,c\,d\omega^2}{4\,g\,dt^2} = C + E\,b\cos.\omega - D\sqrt{(aa+bb+2\,ab\cos.\omega)}$$

ſumamus motum a quiete incepiſſe, cum erat $\omega = \alpha$, vt conſtans C rite determinetur, ac fiet

$$\frac{B\,c\,c\,d\omega^2}{4\,g\,dt^2} = E\,b(\cos.\omega - \cos.\alpha) + D\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\alpha)} - D\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}.$$

9. Nunc igitur oſtendendum eſt, ſi fuerit vis $D = \frac{E\sqrt{(aa+bb+2\,ab\cos.\alpha)}}{a}$ tum virgam LB in ſtatu initiali, vbi erat angulus $BLb = \alpha$ perpetuo quieſcere, ſin autem vis $BA = D$ fuerit hac quantitate maior, tum virgam LB angulo BLb continuo creſcente verſus LA rotari, contrarium vero euenire, ſi vis illa D fuerit minor, hocque caſu virgam LB ad ſitum Lb acceſſuram eſſe. Primum quidem inde patet quod non ſolum ipſa quantitas, cui quadratum celeritatis angularis $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ aequatur, caſu quo $\omega = \alpha$ euaneſcit ſed etiam eius differentiale, ideoque et acceleratio, ita vt virga LB tum perpetuo in ſitu initiali ſit permanſura. Pro reliquis caſibus ſit breuitatis gratia $\sqrt{(aa+bb+2\,ab\cos.\alpha)} = f$ et $\sqrt{(aa+bb+2\,ab\cos.\omega)} = z$, eritque $\frac{B\,c\,c\,d\omega^2}{4\,g\,dt^2} = \frac{E(zz-ff)}{2a} - D(z-f) = (z-f)\left(\frac{E(z+f)}{2a} - D\right)$. Ponatur iam $D = \frac{nEf}{a}$, vt ſit n modo maius modo minus vnitate fietque $\frac{B\,a\,c^2\,d\omega^2}{2\,E\,g\,dt^2} = (z-f)(z+f-2nf)$; et celeritas angularis erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2\,E\,g}{B\,a\,c\,c}(z-f)(z+f-2nf)}$.

10. Quod-

10. Quodsi iam sit $n > 1$, ita vt vis BA elaterem superet, primo quidem angulus ω augebitur, et distantia $AB = z$ diminuetur, vnde pro motu secuturo erit $\frac{d\omega}{dt} = V\frac{2Eg}{Bacc}(f-z)((2n-1)f-z)$, ex quo euidens est ob $2n-1 > 1$, dum angulus BLb crescit, et z minuitur celeritatem non solum nusquam cessare, sed continuo augeri, donec virga LB prorsus in directionem LA reducatur. Sin autem sit $n < 1$, statim distantia $AB = z$ increscit, vt fiat $z > f$, et $\frac{d\omega}{dt} = V\frac{2Eg}{Bacc}(z-f)(z-(2n-1)f)$, vbi ob $2n-1 < 1$, euidens est crescente z etiam celeritatem angularem continuo augeri, donec virga in situm naturalem Lb restituatur, fiatque $z = a+b$. Tum vero hac celeritate, motus angularis in plagam contrariam vertetur, siquidem iunctura id permittat qui motus priori omnino erit similis.

11. Tempus autem ipsum huius motus nonnisi per quadraturas satis perplexas definiri potest, quae difficultas adeo vix minuitur, etiamsi elasticitas prorsus euanescat, et virga LB circa axem L libere statuatur mobilis, a vi constante D iugiter secundum directionem BA sollicitata. Posito enim $E = o$, habebitur $\frac{Bccd\omega^2}{4Dgdt^2} = f-z$, vnde colligitur

$$dt\,V\frac{4Dg}{Bcc} = \frac{-2z\,dz}{\sqrt{(f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

existente $ff = aa+bb+2ab\cos.\alpha$, ideoque $f < a+b$, quae formula integranda certe maxime est complicata, quod in tali casu tam facile ad praxin reuo-

cando, mirum videtur. Neque elaſticitate admiſſa calculus multo fit intricatior cum poſito $D = \frac{nEf}{a}$ tum habeatur:

$$dt\sqrt{\tfrac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)(2n-1)f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

quae quidem aequatio ſi $b=a$ ſeu $LB=LA$ in hanc ſimpliciorem formam abit

$$dt\sqrt{\tfrac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(2a+z)(2a-z)}}.$$

12. Vnicus caſus occurrit, qui faciliorem integrationem admittit; cum ſcilicet ſit $f<2a$ ob $ff=2aa(1+\text{cof.}\alpha)$; numerus n ita accipiatur vt fiat $(2n-1)f=2a$, ſeu $2n-1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cof.}\alpha)}}=\frac{1}{\text{cof.}\frac{1}{2}\alpha}$ et cum ſit $dt\sqrt{\tfrac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2dz}{(2a-z)\sqrt{(f-z)(2a+z)}}$ integrale reperitur:

$$t\sqrt{\tfrac{2Eg}{Bacc}} = \frac{1}{\sqrt{a(2a-f)}}\left(\text{Ang. cof. } \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)}\right)$$

quae formula euaneſcit ſumto $z=f$ pro motus initio. In minutis ſecundis ergo habetur:

$$t = \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Eg(2a-f)}}\,\text{Ang. cof.}\,\frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)} = \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(2n-1)Egf}}\,\text{Ang. cof.}\,\frac{(n-2)(2n-1)f+(3n-2)z}{n((2n-1)f-z)}$$

vnde ſequitur tempus quo virga LB in ſitum LA compellitur fore $= \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(n-1)Egf}}\,\text{Ang. cof.}\,\frac{n-2}{n}$ minutis ſecundis. Ita ſi initio motus fuiſſet $\alpha=90°$, ideoque $2n-1=\sqrt{2}$ ſeu $n=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ erit hoc tempus totum $=\frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Egf}(\sqrt{2}-1)}\,\text{Ang. cof.}\,\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}$, qui angulus proxi-

proxime continet 131°, $3\frac{57}{58}'$ et in partibus radii 2, 287436.

13. Si virgam LA, quam hic vt fixam ſpectauimus, etiam mobilem faciamus, vt ambae ſimul ſuper plano tabulae, ad quod quippe axis inflexionis ſumitur perpendicularis, moueantur, nullum eſt dubium quin problema multo ſit difficilius, et profundiorem Mechanicae cognitionem poſtulet. Multo porro difficilius fiet problema, ſi hae binae virgae in vacuo vtcunque proiiciantur, vt axis inflexionis non amplius ſitum ſibi parallelum conſeruet, eaeque inſuper extrinſecus a viribus quibuscunque ſollicitentur. Quodſi praeterea corpus ex pluribus conſtet partibus, flexura elaſtica inter ſe coniunctis, neque adeo axes inflexionis in ſingulis flexuris fuerint inter ſe paralleli: neſcio an quis ſolutionem ſaltem tentare auderet. Equidem hic tantummodo eiusmodi plurium partium compagem ſum conſideraturus, vbi omnes axes inflexionis in ſingulis iuncturis inter ſe ſint paralleli, atque motus ita ſit comparatus, vt in eodem plano abſoluatur, ad quod illi axes ſint perpendiculares, et in quo ſimul ſingularum partium centra inertiae ſint ſita, etiamſi methodus, qua ſum vſurus, multo latius pateat.

14. Principium autem primarium, cui omnium huiusmodi motuum determinatio innititur, ex Statica ſeu ea ſcientia, quae circa aequilibrium virium eſt occupata, peti oportet. Niſi enim conſtet, a

quibus viribus corpus quodpiam, cuiuscunque indolis fuerit, in aequilibrio contineatur, determinatio motus, ab aliis quibuscunque viribus variati frustra suscipitur. Euolutio autem accuratior huius principii eo magis est necessaria, quod ipsa motus determinatio, vtcunque is fuerit intricatus, semper leui adhibita consideratione ad statum aequilibrii reuocari potest, dum vires ad motus effectionem requisitae viribus quibus corpus actu impellitur aequiualere, ideoque contrarie applicatae cum his in aequilibrio consistere debent, quod adeo etiam in motu fluidorum locum habet. Quocirca inuestigationes a statu aequilibrii incipiam.

Problema 1.

15. *Si corpus ex quotcunque partibus compositum, quae flexuris elasticis inter se sint coniunctae, a viribus quibuscunque fuerit sollicitatum, definire conditiones, quibus hae vires se mutuo in aequilibrio coerceant.*

Solutio.

Primum omnium obseruandum est cunctas vires perinde in aequilibrio esse debere, ac si corpus prorsus esset rigidum; si enim singulae flexurae subito rigescerent, inde virium aequilibrium neutiquam turbaretur; quocirca primo quidem in eas conditiones est inquirendum, sub quibus vires corpus

pus ſollicitantes ſe inuicem deſtruerent, ſi totum corpus tanquam rigidum ſpectetur. Hunc in finem ſingulae vires corpus ſollicitantes ita euoluantur, vt quaelibet puncto corporis Z applicata ſecundum ternas directiones fixas Zp, Zq, et Zr, quae ternis axibus inter ſe normalibus IA, IB et IC ſint parallelae reſoluantur. Sit igitur vis $Zp=p$, vis $Zq=q$, vis $Zr=r$, et ponantur ternae coordinatae ſitum puncti Z definientes et iisdem axibus parallelae $IX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$, ac primo quidem conſtat, ſummas omnium harum ternarum virium ſeorſim nihilo aequales eſſe debere, vnde hae tres conditiones colliguntur, vt ſit: Tab. III. Fig. 4.

$$1^\circ.\ \int p=0;\quad 2^\circ.\ \int q=0;\quad 3^\circ.\ \int r=0$$

quibus obtinetur, vt corporis centrum inertiae in aequilibrio conſeruetur.

Verum hae tres conditiones nondum ſufficiunt, etiamſi corpus totum foret rigidum, oportet enim inſuper, vt corpori circa nullum plane axem motus imprimatur; ex quo momenta omnium harum virium reſpectu axis cuiuscunque ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt. At trium virium p, q, r momentum reſpectu axis IA in plagam BC eſt $=ry-qz$; reſpectu vero axis IB in plagam CA eſt $=pz-rx$; et reſpectu axis IC, in plagam AB eſt $=qx-py$, vnde tres ſequentes conditiones prioribus ſunt adiiciendae:

$$4^\circ.\ \int(ry-qz)=0;\ 5^\circ.\ \int(pz-rx)=0;\ 6^\circ.\ \int(qx-py)=0.$$

Facile autem patet, dummodo hae ſex conditiones locum habeant, momenta virium reſpectu omnium plane axium, vtcunque accipiantur, pariter in nihilum abire.

Nunc ſex iſtae conditiones ſufficerent, ſi totum corpus eſſet perfecte rigidum, ſin autem conſtet ex partibus inuicem flexuris iunctis, neceſſe inſuper eſt, vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusque flexurae, in aequilibrio conſiſtant. Sit igitur in N eiusmodi flexura, cuius axis inflexionis ſit recta *tu* vtcunque ad ternos axes inclinata, et ex ratione iuncturae et quantitate inflexionis dabitur elaſticitatis momentum, quo reſtitutio in ſtatum naturalem circa axem *tu* intenditur. Sit E*u* hoc elaſticitatis momentum, atque ad aequilibrium requiritur vt virium ſollicitantium momenta reſpectu eiusdem axis *tu* ſumta, ſint vtrinque momento elaſticitatis E*u* aequalia. Cum ſcilicet omnia virium momenta reſpectu axis *tu* ſumta ſe mutuo deſtruant, totum corpus per flexuram *t*N*u* in duas partes diſtributum eſt conſiderandum, quarum altera cis altera trans flexuram porrigitur; atque momenta virium alteri parti applicatarum reſpectu axis *tu* quorum ſumma ſit V*s*, momento elaſticitatis E*u* ita aequalia ſunt ponenda, vt reſtitutioni in ſtatum naturalem reluctentur; tum autem ſponte ſumma momentorum ex altera parte ſumtorum, quorum ſumma eſt $= -V s$, etiam momento elaſticitatis E*u* erit

erit aequalis pariterque reſtitutioni aduerſabitur. Hinc quaelibet flexura peculiarem ſuppeditat aequationem, quae omnes cum ſex ante exhibitis, conditiones aequilibrii quaeſitas complectuntur.

Coroll. 1.

16. Si partium iunctura ita eſt comparata, vt inflexioni prorſus non reſiſtat, qui eſt caſus corporum perfecte flexibilium, tum pro ſingulis flexuris vis elaſtica E*u* euaneſcit, et ex vtraque parte virium momenta reſpectu axis inflexionis nihilo aequalia ſunt ponenda.

Coroll. 2.

17. Quo haec clariora reddantur, ſint duae virgae aequales AC et BC in C ita iunctae, vt inflexae vi quacunque ſe in directum extendere conentur: quibus in A et B applicatae ſint vires aequales A*a*, B*b* parallelae et ad vtramque virgam aeque inclinatae, in C vero applicata ſit vis duplo maior C*c* illis item parallela, quae tres vires proinde erunt in aequilibrio ſi ambae virgae vt vnum corpus rigidum ſpectentur. Vt autem ob flexuram in C aequilibrium non turbetur, primum virga BC vt fixa ſpectetur, et vis A*a* momentum exeret ad inflexionem virgae CA augendam, quod ergo vi elaſticae flexurae aequale eſſe debet. Simili modo ſi virga AC fixa concipiatur, ex vi B*b* naſce- Tab. III. Fig. 5.

naſcetur momentum priori aequale et contrarium quod tamen pariter inflexionem augere conabitur, ideoque vi elaſticae flexurae aequabitur. Ex quo patet quomodo virium vtrinque agentium momenta ſe mutuo deſtruant ſeorſim vero cum vi elaſtica flexurae in aequilibrio conſiſtant.

Coroll. 3.

18. Vbicunque ergo datur flexura, ibi corpus neceſſario in duas partes dirimitur, quarum altera ſi fixa concipiatur alteri motus circa axem flexurae imprimi queat. Quae partium diſtinctio pro qualibet flexura quo facilius percipiatur, reliquae flexurae omnes tanquam rigeſcerent, ſunt conſiderandae. Pro his autem binis partibus virium ſollicitantium momenta probe a ſe inuicem diſtingui oportet.

Scholion.

19. Ex hoc principio manifeſto fluunt, quae iam olim de aequilibrio corporum tam flexibilium quam elaſticorum ſum commentatus; dum a viribus quibuscunque ſollicitantur. Ibi autem omnes flexuras tanquam in eodem plano exiſtentes aſſumſeram, cui ſimul omnes axes inflexionis eſſent perpendiculares. Nunc igitur idem principium ad complexum ampliſſimum extuli, vt ad omnia flexurae genera latiſſime pateret, quo quidem ſcientia aequilibrii maxime promota videtur. Verumtamen ipſa huius

huius principii applicatio saepenumero ingentes adhuc difficultates inuoluit, dum virium sollicitantium momenta respectu axis cuiuscunque oblique siti non sine summa molestia definiuntur, et secundum praecepta vulgaria ad calculum reuocantur. Difficultas scilicet tum potissimum offenditur, quando axis flexurae *tu* ratione axium IA, IB et IC, secundum quos singulae vires sollicitantes resoluuntur, situm tenet vtcunque obliquum; tum enim nonnisi calculo perquam prolixo et taedioso, eius, respectu virium Zp, Zq et Zr momenta colliguntur, cum tamen negotium satis facile succederet, si axis *tu* vni principalium IA, IB et IC foret parallelus, similique modo institui posset, quo earundem virium momenta respectu ipsorum axium IA, IB, IC in solutione sunt computata. Egregium igitur subsidium scientiae aequilibrii allatum est censendum sequente propositione, qua ostensurus sum, quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium inuentis, facile definiri possit earundem virium momentum respectu alius cuiusque axis obliqui per idem punctum ducti:

Problema 2.

20. *Si dentur virium quarumcunque momenta respectu ternorum axium* IA, IB, IC *inter se normalium in puncto* I, *inuenire earundem virium momentum respectu axis cuiuscunque obliqui* IO *per idem punctum* I *traiecti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Tota haec inueſtigatio commodiſſime ad trigonometriam ſphaericam reduci videtur. Centro ergo I radio $=r$ ſphaera deſcripta intelligatur, cuius ſuperficies ab illis ternis axibus traiiciatur in punctis A, B, C, ita vt arcus AB, BC, CA ſint quadrantes, in puncto O autem tranſeat axis obliquus IO, ad quod ducantur arcus circulorum maximorum AO, BO, CO. His poſitis ſint virium ſollicitantium momenta reſpectu

axis IA$=$Lr; in plagam BC

axis IB$=$Mr; in plagam CA

axis IC$=$Nr; in plagam AB.

Iam quaecunque ſint iſtae vires, earum loco hic eiusmodi vires determinatae ſubſtituantur, quae eadem momenta gignant, iisque propterea ſint aequivalentes. Quare in puncto B applicata concipiatur vis BL$=$L, cuius directio arcum BC in B tangat, quae cum ſit normalis in radium BI axi IA perpendicularem, momentum dabit reſpectu axis IA$=$Lr in plagam BC tendens, et quia haec vis cum reliquis axibus IB et IC in eodem plano iacet, eorum reſpectu nulla praebebit momenta. Simili modo in C applicata concipiatur vis CM$=$M ſecundum tangentem arcus CA cuius momentum reſpectu axis IB erit $=$Mr in plagam CA tendens, reſpectu reliquorum vero axium nullum producit

ducit momentum. Denique etiam in A concipiatur vis AN=N ſecundum directionem AB, vnde naſcitur momentum reſpectu axis IC=Nr in plagam AB. Cum igitur hae tres vires BL=L; CM=M et AN=N ipſa momenta propoſita reſpectu ternorum axium IA, IB et IC exhibeant, eas loco virium, quaecunque fuerint, vnde iſta momenta ſunt nata, ſubſtituere licebit, ita vt nunc tota quaeſtio huc redeat, vt harum trium virium momenta reſpectu axis obliqui IO definiantur. Pro ſitu igitur axis IO ponantur anguli

$$AIO=\lambda,\ BIO=\mu \text{ et } CIO=\nu$$

qui a ſe inuicem ita pendent vt ſit $\text{cof.}\lambda^2+\text{cof.}\mu^2+\text{cof.}\nu^2=1$ et cum ratio trium virium ſit eadem, vis BL=L ad arcum BO inclinata angulo OBL reſoluatur in duas inter ſe normales et in ſuperficie ſphaerae ſitas, quarum altera in BO cadat, quae erit =L cof. OBL, altera vero huic normalis =L ſin. OBL, quarum illa reſpectu axis IO nullum praebet momentum quia eius directio cum hoc axe in eodem plano exiſtit, haec vero cum ſit ad planum IBO ideoque etiam ad rectam BS ex B in IO normaliter ductam perpendicularis dabit reſpectu axis IO momentum =L. ſin. OBL. BS in plagam BC. Eſt vero BS=r ſin. BIO=r ſin. BO, ſicque iſtud momentum fit =Lr ſin. BO. ſin. OBL. Producatur arcus AO in P, vt ſit AP quadrans et in arcum BC normalis; atque in triangulo ſphaerico

rectangulo BOP erit $\sin. OP = \sin BO . \sin. OBL$ hincque momentum illud $= Lr \sin OP = Lr \cos. AO = Lr \cos. \lambda$. Simili modo ex vi $CM = M$ respectu axis IO colligetur momentum $= Mr \cos. \mu$, in plagam CA, et ex vi $AN = N$ momentum $= Nr \cos. \nu$ in plagam AB. Quae plagae cum ratione motus circa axem IO generandi conueniant, ex viribus sollicitantibus, quarum momenta Lr, Mr, Nr respectu axium IA, IB, IC sunt cognita, concluditur fore momentum respectu axis obliqui IO =

$$Lr \cos. \lambda + Mr \cos. \mu + Nr \cos. \nu$$

in plagam ABC, quod ergo ex momentis datis facili negotio obtinetur.

Coroll. 1.

21. Si axis IO in aliquem principalium veluti IA incidat momentum ipsi Lr fiet aequale, quod inde est manifestum, quia arcus $AO = \lambda$ euanescit, et bini reliqui $BO = \mu$ et $CO = \nu$ euadunt quadrantes.

Coroll. 2.

22. Fieri potest vt momentum respectu axis IO euanescat, idque infinitis modis. Angulo enim $AIO = \lambda$ pro lubitu assumto, reliquos μ et ν ita assumere licet vt fiat $L \cos. \lambda + M \cos. \mu + N \cos. \nu = 0$ manente $\cos. \lambda^2 + \cos. \mu^2 + \cos. \nu^2 = 1$. Cum enim inde fit $\cos. \nu = \frac{-L \cos. \lambda - M \cos. \mu}{N}$ fit $NN \sin. \lambda^2 = (MM + NN) \cos. \mu^2 + 2LM \cos. \lambda \cos. \mu + LL \cos. \lambda^2$

hinc-

hincque $\text{cof.}\,\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm \sqrt{(NN(MM+NN)\sin.\lambda^2 - LLNN\cos.\lambda^2)}}{MM+NN}$

vel $\text{cof.}\,\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm N\sqrt{((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}}{MM+NN}$

quod fieri poteſt dum ſit $\sin.\lambda > \frac{L}{\sqrt{(LL+MM+NN)}}$, eritque tum $\text{cof.}\,\nu = \frac{-LN\cos.\lambda \mp M\sqrt{((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}}{MM+NN}$

et anguli μ et ν prodeunt reales.

Coroll. 3.

23. Caſus deinde imprimis notatu dignus occurrit, quo virium momentum reſpectu axis IO fit omnium maximum; euenit hoc ſi hic axis ita capiatur vt ſit

$\text{cof.}\,\lambda = \frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$; $\text{cof.}\,\mu = \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$; $\text{cof.}\,\nu = \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$

tum enim eius reſpectu erit momentum $= r\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}$.

Coroll. 4.

24. Huius ergo problematis ope momentum virium corpus ſollicitantium reſpectu cuiusque flexurae cuius axis ſitum tenet vtcunque obliquum definire, ideoque ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema 3.

25. *Si corpus ex partibus quotcunque, quae flexuris elaſticis ſint coniunctae, compoſitum a viribus* Tab. III. Fig. 7.

quibuscunque ſollicitetur, earum momentum reſpectu vniuscuiusque flexurae N, *cuius axis* tNu *ſitum tenet vtcunque obliquum inueſtigare.*

Solutio.

Locus flexurae N ternis coordinatis inter ſe normalibus definiatur quae ſint $1L=l$, $LM=m$, et $MN=n$ et in N tres concipiantur axes Nl, Nm Nn iſtis coordinatis paralleli, ad quos axis flexurae tu ita inclinetur, vt ſint anguli $lNu=\lambda$, $mNu=\mu$, $nNu=\nu$ ideoque $\text{cof.}\lambda^2+\text{cof.}\mu^2+\text{cof.}\nu^2=1$, reliquae vero flexurae rigeſcere concipiantur. Ita corpus in hac flexura in duas partes diſpeſcitur, quarum vtraque circa axem flexurae, motum recipere poteſt altera manente immota. Virium ergo quae alteri tantum parti ſunt applicatae, momentum reſpectu axis tu indagari oportet. Huius partis ſit Z punctum quodcunque coordinatis $IX=x$, $XY=y$, $YZ=z$ definitum, cui vires ſint applicatae quaecunque, quae ad ternas directiones Zp, Zq, Zr reducantur, ſitque vis $Zp=p$, vis $Zq=q$, vis $Zr=r$. Iam primo harum virium momenta colligantur reſpectu axium fictorum Nl, Nm, Nn, ac manifeſtum eſt fore earum momenta

reſpectu axis $Nl=q(n-z)-r(m-y)$ in plagam mn

reſpectu axis $Nm=r(l-x)-p(n-z)$ in plagam nl

reſpectu axis $Nn=p(m-y)-q(l-x)$ in plagam lm.

Quibus

Quibus inuentis ex problemate praecedente earundem virium reſpectu axis flexurae tu momentum concluditur fore in plagam lmn:

$$q(n-z)\cos.\lambda - r(m-y)\cos.\lambda + r(l-x)\cos.\mu - p(n-z)\cos.\mu + p(m-y)\cos.\nu - q(l-x)\cos.\nu.$$

Omnia ergo haec momenta per totam corporis partem colligendo ob quantitates l, m, n et angulos λ, μ, ν conſtantes impetramus totum momentum quaeſitum:

$$(m\cos.\nu - n\cos.\mu)\int p + (n\cos.\lambda - l\cos.\nu)\int q + (l\cos.\mu - m\cos.\lambda)\int r + \cos.\lambda\int(ry - qz) + \cos.\mu\int(pz - rx) + \cos.\nu\int(qx - py).$$

Coroll. 1.

26. In ſtatu ergo aequilibrii hoc momentum vi elaſticae qua flexura in N eſt praedita, aequale poni oportet, ſiquidem vis elaſtica hanc corporis partem, ex qua momentum eſt collectum in plagam contrariam nml flectere conatur.

Coroll. 2.

27. Cum igitur quaelibet flexura huiusmodi aequationem ſuppeditet, omnes hae aequationes illis ſex, quas ſupra indicauimus adiunctae ſtatum aequilibrii corporis determinabunt.

Scho-

Scholion.

28. En ergo vera principia, ex quibus ſtatus aequilibrii corporum flexuris elaſticis praeditorum, dum a viribus quibuscunque ſollicitantur, definiri debet. Quae cum latiſſime pateant, omnia ea quae adhuc de aequilibrio corporum flexibilium et elaſticorum ſunt inueſtigata, in ſe complectantur. In his autem inueſtigationibus omnium flexurarum axes inter ſe paralleli ſunt aſſumti, quo calculi euolutio magis plana et facilis redderetur; ſin autem iſti axes inter ſe non fuerint paralleli, calculus non ſolum maiorem moleſtiam inuoluit, ſed etiam ſummopere difficile eſt pro omnibus inflexionibus, quae huiusmodi corporibus induci poſſunt, ſingularum partium ſitum ad calculum reuocare, vt principia hic ſtabilita in vſum vocari queant. Quae difficultas quo clarius perſpiciatur, caſum ſatis ſimplicem euoluam, quo corpus ex tribus tantum conſtat partibus quarum iuncturae axes habeant inter ſe normales, et quae ſtatu naturali in directum extendantur.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 8.

29. *Si tres virgae* AB, BC, CD *ita ſint iunctae, vt in ſtatu naturali in directum porrigantur, iuncturae autem* B *axis* bβ *ad planum tabulae ſit normalis, iunctura* C *vero axis* cγ *in ipſum planum cadat et ad* BC *ſit normalis; inueſtigare vires extremitatibus*

tatibus A *et* D *applicandas, quae has virgas in ſtatu quocunque inflexo ſeruare valeant.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 9.

Poſitis $AB=a$, $BC=b$, et $CD=c$, ſint hae virgae per inflexionem redactae in ſtatum ABCD, qui ita repraeſentetur, vt virgae AB et BC in plano tabulae iaceant, et BC rectae AG ſit parallela, ita vt flexurae B axis Bb ad idem planum ſit perpendicularis, flexurae C vero axis Cc in hoc plano ad BC ideoque etiam ad axem AG ſit normalis, circa quem tertia virga CD ſurſum ſit flexa, ex cuius termino D in planum demittatur perpendiculum DH, indeque ad AG normalis HG. Sit iam angulus inflexionis in iunctura $B=\zeta$, et elaſticitatis momentum $=Ee\,\text{ſin.}\,\zeta$, inflexionis autem in iunctura $C=\eta$ et elaſticitatis momentum $=Ff\,\text{ſin.}\,\eta$; eritque ob BC ipſi AG parallelam angulus $BAG=\zeta$, hinc $AE=a\,\text{coſ.}\,\zeta$, et $BE=a\,\text{ſin.}\,\zeta=CF=HG$, tum vero $EF=BC=b$. Porro habebitur $CH=c\,\text{coſ.}\,\eta$ et $DH=c\,\text{ſin.}\,\eta$. Iam vires ad hunc ſtatum conſeruandum requiſitae ſint in A ternae $AP=P$, $AQ=Q$, et $AR=R$ in D vero ſimiliter ternae $Dp=p$, $Dq=q$, et $Dr=r$: vnde ſi corpus ſpectetur vt rigidum primo habemus:

1°. $P+p=0$; 2°. $Q+q=0$; 3°. $R+r=0$.

Deinde ob $AG=a\,\text{coſ.}\,\zeta+b+c\,\text{coſ.}\,\eta$; $GH=a\,\text{ſin.}\,\zeta$, et $DH=c\,\text{ſin.}\,\eta$ erit quoque ex problemate primo:

$4°\ ar\sin.\zeta - cq\sin.\eta = 0$; $5°.\ cp\sin.\eta - (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)r = 0$

$6°.\ (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)q - ap\sin.\zeta = 0$

quia pro viribus in A coordinatae x, y, z euaneſcunt, vnde hae vires ita debent eſſe comparatae vt ſit

$p = (a\cos.\zeta + b + c\cos.\eta)s$; $q = as\sin.\zeta$ et $r = cs\sin.\eta$

et $P = -p$; $Q = -q$; et $R = -r$.

Nunc flexura in B conſideretur, et pars BA a viribus ſibi applicatis de ſtatu naturali detorquetur momento $= P.BE - Q.AE$, quod elaſticitati $Ee\sin.\zeta$ aequale poſitum dat

$$-ap\sin.\zeta + aq\cos.\zeta = Ee\sin.\zeta$$

ſeu $-(ab + ac\cos.\eta)s = Ee$; hincque $s = \frac{-Ee}{a(b + c\cos.\eta)}$.

Denique pro flexura C conſideretur pars CD, cuius vires praebent momentum de ſtatu naturali detorquens $= r.CH - p.DH$ momento elaſticitatis $Ff.\sin.\eta$ aequandum, vnde prodit

$$-c(a\cos.\zeta + b)s = Ff \text{ ſeu } s = \frac{-Pf}{c(a\cos.\zeta + b)}.$$

Ex quo patet inter ambas inflexiones certam relationem intercedere debere, vt a duabus tantum viribus in terminis A et D applicatis aequilibrium ſeruari poſſit: oportet ſcilicet ſit $Eec(a\cos.\zeta + b) = Ffa(b + c\cos.\eta)$; ac tum vires ante aſſignatae huic ſtatui inflexo conſeruando erunt pares.

Coroll.

Coroll. 1.

30. Quia tres vires in A applicatae cum tribus in D applicatis in aequilibrio consistere debent, vna vis illis aequiualens vni his aequiualenti aequalis et contraria esse debet; facile autem intelligitur ambas has vires in rectam AD extremitates iungentem cadere debere.

Coroll. 2.

31. Hoc etiam cum formulis inuentis egregie conuenit, si enim extremitates A et D filo constrictae concipiantur cuius tensio sit $=T$, posita recta $AD=k$, habebimus vires assumtas $P=\frac{a\cos.\zeta+b+c\cos.\eta}{k}T$; $Q=\frac{a\sin.\zeta}{k}T$, et $R=\frac{c\sin.\eta}{k}T$

ideoque $s=\frac{-T}{k}$.

Coroll. 3.

32. Hinc ergo interuallum $AD=k$ cum tensione T in computum ducendo erit primo $a(b+c\cos.\eta)=\frac{Eek}{T}$ et $c(a\cos.\zeta+b)=\frac{Ffk}{T}$: deinde vero est

$$kk=aa+bb+cc+2ab\cos.\zeta+2bc\cos.\eta+2ac\cos.\zeta\cos.\eta.$$

Cum ergo sit $\cos.\zeta=\frac{Ffk}{Tac}-\frac{b}{a}$, et $\cos.\eta=\frac{Eek}{Tac}-\frac{b}{c}$, facta hac substitutione prodit:

$$kk=aa-bb+cc+\frac{2EFefkk}{TTac}$$

vnde tenſio ad hanc inflexionem continendam fit

$$T = \frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$$

quae ergo per longitudinem fili AD et elaſticitates vtriusque iunctiurae determinatur.

Coroll. 4.

33. Ex data ergo longitudine fili ſeu intervallo $AD=k$ cum vtraque elaſticitate non ſolum tenſio T ſed etiam inflexio in vtraque iunctura definitur, dummodo eueniat, vt anguli ζ et η prodeant reales; quod fieri nequit niſi eorum coſinus ſint vnitate minores.

Scholion.

34. Solutio autem hic data maxima incommoda atque adeo contradictionem inuoluere videtur. Cum enim nullum ſit dubium, quin pro qualibet longitudine fili ſeu interuallo AD certa tenſio T requiratur ad virgas in ſtatu inflexo continendas tamen ſi pro T valor inuentus ſubſtituatur, omnino euenire poteſt, vt alterutrius angulorum ζ et η coſinus prodeat vnitate maior, ideoque inflexio impoſſibilis. Conſideremus tantum caſum quo altera elaſticitas puta Ee fit infinita, quod eodem redit, ac ſi iunctura in E rigeſceret, nullamque plane inflexionem admitteret. Hic ergo caſus vnicam flexuram in F habens conuenire deberet cum eo, qui ſupra §. 6. eſt euolutus, et pro cuius qualibet inflexi-

flexione tenſio fili T eſt aſſignata. Verum ſi in forma hic inuenta ponatur $Ee = \infty$, tenſio T prodit quoque infinita, hincque $\text{cof.}\zeta = -\frac{b}{a}$ et $\text{cof.}\eta = \infty$, quod manifeſto eſt abſurdum, praeterquam quod etiam angulus ζ fieret imaginarius ſi $b > a$. Hic certe aperta contradictio cernitur quae non ſolum huic caſui, quo altera iunctura rigeſcit eſt propria, ſed etiam vtraque flexura admiſſa ſaepenumero locum habere debet. Nullum tamen hic calculi vitium deprehenditur, ex quo maximi erit momenti in cauſam huius diſcrepantiae a veritate diligentius inquirere.

Solutio difficultatis.

35. Analyſin autem vniuerſam accuratius contemplanti mox patebit ſolutionem inuentam non eſſe completam; ſed in calculo quasdam ſolutiones, quae certis caſibus ſolae locum habere poſſunt, per diuiſionem aequationum eſſe ſublatas. Scilicet cum ſit $kk = aa + bb + cc + 2ab\,\text{cof.}\zeta + 2bc\,\text{cof.}\eta + 2ac\,\text{cof.}\zeta\,\text{cof.}\eta$ ob $s = \frac{T}{k}$, binae reliquae aequationes reuera ita prodierunt expreſſae:

$$Ta(b + c\,\text{cof.}\eta)\,\text{ſin.}\zeta = Eek\,\text{ſin.}\zeta \text{ et } Tc(a\,\text{cof.}\zeta + b)\,\text{ſin.}\eta = Ffk\,\text{ſin.}\eta$$

ita vt illa etiam praebeat $\text{ſin.}\zeta = 0$ haec vero $\text{ſin.}\eta = 0$, quae quidem ambae ſolutiones ſimul conſiſtere nequeunt, niſi ſit $k = a + b + c$ hoc eſt in ſtatu naturali. Verum quoties diſtantia $AD = k$

minor eſt quam $a+b+c$, toties euenire poteſt, vt ſit vel $\zeta=0$ vel $\eta=0$, hoc eſt vt altera flexura nullam vim patiatur. Quodſi nimirum ſit $\zeta=0$, et virgae AB et BC maneant in directum extenſae; altera aequatio praebet $Tc(a+b)=Ffk$, ideoque ſit tenſio $T=\frac{Ffk}{c(a+b)}$; angulus autem η ex prima aequatione $kk=(a+b)^2+cc+2c(a+b)\text{cof.}\,\eta$ definitur. Simili modo ſi $\eta=0$, quo caſu in F nulla inflexio oritur, fiet $T=\frac{Eek}{a(b+c)}$ et $kk=(b+c)^2+aa+2a(b+c)\text{cof.}\,\zeta$, vnde angulus ζ cognoſcitur. Sicque ſemper pro quolibet interuallo $AD=k$ duae ſolutiones locum habent, quarum altera inflexione in E caret, altera in F, atque nunc demum intelligere licet, cur aequilibrium plane non detur, quod duplici inflexione gaudeat. Duplex nempe inflexio locum habere nequit, niſi ſub conditionibus in ſolutione contentis, quae huc redeunt, vt cum ſit $\text{cof.}\,\zeta<1$ et $\text{cof.}\,\eta<1$, fiat $Eek<Ta(b+c)$ et $Ffk<Tc(a+b)$; Quia vero tum eſt vti inuenimus $T=\frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$, hae conditiones dant $\frac{Ee}{Ff}<\frac{2a(b+c)^2}{c(kk+bb-aa-cc)}$ et $\frac{Ee}{Ff}>\frac{a(kk+bb-aa-cc)}{2c(a+b)^2}$, quorum quidem limitum ille manifeſto maior eſt hoc, cum ex comparatione inſtituta ſequatur

$$4ac(a+b)^2(b+c)^2>ac(kk+bb-aa-cc)^2 \text{ ſeu}$$

$$2(a+b)(b+c)>kk+bb-aa-cc \text{ hincque}$$

$$(a+b+c)^2>kk \text{ vti rei natura poſtulat.}$$

Niſi

Nisi ergo pro sumto interuallo $AD = k$ ratio elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ intra illos limites contineatur, tensione fili AD duplex inflexio produci nequit, vt aequilibrium oriatur.

Coroll. 1.

36. Hae ergo conditiones, ratione elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ vt data spectata, huc redeunt vt sit

1°. $kk < aa + cc - bb + \frac{2a(b+c)^2}{c} \cdot \frac{Ff}{Ee}$ et

2°. $kk < aa + cc - bb + \frac{2c(a+b)^2}{a} \cdot \frac{Ee}{Ff}$

quarum quantitatum minor si adhuc maior fuerit quam $(a+b+c)^2$, pro quouis interuallo $AD = k$, duplex inflexio in aequilibrium ingredi potest, sin autem ea minor sit quam $(a+b+c)^2$, tantum in maiore fili contractione tale aequilibrium obtineri potest.

Coroll. 2.

37. Quodsi tres virgae sint longitudine aequales, seu $b = c = a$ conditiones illae dant

1°. $kk < aa(1 + \frac{8Ff}{Ee})$; 2°. $kk < aa(1 + \frac{8Ee}{Ff})$.

Quare si ambae elasticitates sint pares, vtraque dat $k < 3a$ et pro omni fili contractione tale aequilibrium dabitur, vnde fit tensio $T = \frac{Eek\sqrt{2}}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ ob $Ff = Ee$, et inflexiones $\cos.\zeta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$ et $\cos.\eta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$, vt sit $\eta = \zeta$ seu $\cos.\frac{1}{2}\zeta = \cos.\frac{1}{2}\eta = \sqrt[4]{\frac{kk-aa}{8aa}}$, et $T = \frac{Eek}{aa(1+\cos.\zeta)}$.

Coroll.

Coroll. 3.

38. Quodsi autem eodem casu $b=c=a$, ambae elasticitates sint inaequales puta $Ee=2Ff$, seu $\frac{Ee}{Ff}=2$, debet esse

1°. $kk<aa(1+4)$ et 2°. $kk<aa(1+16)$

vnde tale aequilibrium non datur nisi sit $k<a\sqrt{5}$. Tum autem erit tensio $T=\frac{2Ffk}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ et inflexio vtraque

$$\cos.\zeta=\frac{\sqrt{(kk-aa)}}{2a}-1 \text{ et } \cos.\eta=\frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a}-1.$$

Vnde si $k=a\sqrt{5}$, inflexio in F etiamnunc est nulla et $\zeta=90^\circ$ ac $T=\frac{Ff\sqrt{5}}{a}$ filo autem magis adstricto vt fiat $k=2a$, tum prodit

$\cos.\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ et $\cos.\eta=\sqrt{3}-1$, atque $T=\frac{4Ff}{a\sqrt{3}}$.

Coroll. 4.

39. Considerabimus etiam casum, quo virgae sunt inaequales sitque $a=c$ et $b=2a$, eritque

1°. $kk<aa(-2+\frac{18.Ff}{Ee})$ et $kk<aa(-2+\frac{18.Ee}{Ff})$.

Quare si fuerit vel $\frac{Ff}{Ee}<\frac{1}{9}$ vel $\frac{Ee}{Ff}<\frac{1}{9}$ nullo plane modo huiusmodi aequilibrium obtineri potest.

Scholion 1.

40. Evolutio huius casus vsu non carebit, cum inde pateat saepenumero pluribus modis aequilibrium existere posse. Quod cum eueniat in corpo-

corporibus gemina flexura praeditis, id multo magis contingere poterit, vbi adhuc plures flexurae admittuntur, quarum axes inter se non sunt paralleli; haecque circumstantia in doctrina aequilibrii sine dubio maximi est momenti. Etsi autem haec praecepta tantum ad aequilibrium pertinere videntur, tamen etiam ad motum definiendum adhiberi possunt, dummodo iis sequens principium ex natura motus petitum adiungatur.

Ex quotcunque partibus corpus fuerit compositum, vnicuique parti generalissime tribuatur motus quicunque, et inuestigentur vires ad eius variationem producendam requisitae: tum istae vires in contrarium vertantur, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debent, ex quo praecepta pro aequilibrio definiendo tradita certum aequationum numerum suppeditabunt. Deinde vero motus vnicuique parti tributos ita temperari oportet, vt non solum singulae partes maneant contiguae, sed etiam axes iuncturarum debitum situm conseruent. Quae conditiones cum illis aequationibus coniunctae verum motum determinabunt.

Scholion 2.

41. Tametsi autem hac regula totum negotium conficitur, tamen in eius applicatione saepe insignes adhuc difficultates obstant, quo minus calculus expediri queat quod potissimum euenit, quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli,

nec motus, quaſi in eodem plano fieret, conſiderari poteſt. Tum enim cuique parti motum quemcunque tribuendo, praeter motum progreſſiuum centri grauitatis in calculum induci debet motus gyratorius circa axem quemcunque per id centrum ductum, eumque adeo variabilem; cuiusmodi autem vires ad huiusmodi motum requirantur, nonniſi pluribus formulis non parum complicatis declarari poteſt. Deinde etiam in tali motu generaliſſime conſiderato non facile definitur, quomodo ſitus axium vtriusque iuncturae, quibus haec pars cum contiguis cohaeret, varietur, quod certe non ſine taedioſo calculo fieri poteſt. Ne igitur his tantis difficultatibus hic impediar, quas forte aliquando ſuperare licebit, inueſtigationes meas ad eum tantum caſum adſtringam, quo omnium iuncturarum axes inter ſe ſunt paralleli, totusque motus ad idem planum reuocari patitur, quippe a quo caſu ſemper eſt exordiendum, antequam difficiliores aggredi conueniat.

Problema 5.

42. *Si corpus quodcunque in eodem plano moueatur motu quomodocunque variato, inuenire vires ad motus variationem requiſitas, earumque momentum reſpectu aliuscuiusque axis ad idem planum perpendicularis.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 10. Exhibeat tabula id planum, in quo motus fieri concipitur ſitque M maſſa corporis, cuius centrum

trum inertiae iam verſetur in M puncto coordinatis orthogonalibus $IQ=x$ et $QM=y$ determinato; tum vero ſit Mmm momentum inertiae corporis reſpectu axis per ipſum centrum M tranſeuntis et ad planum normalis. Per punctum M ducatur recta EF ad iuncturas, quibus forte hoc corpus cum aliis cohaeret; etiamſi enim fieri poſſet, vt conſtitutis his iuncturis in E et F, recta EF non ſit tranſitura per corporis centrum inertiae, tamen ab hac irregularitate mentem abſtrahamus, quippe cuius ratio facillime in calculum induceretur. Ductis porro per M rectis Mm, $M\mu$ coordinatis x et y parallelis, vocetur angulus $FMm=\mu$. Cum iam quantitates x, y, et μ labente tempore, quod indicetur littera t varientur, quatenus haec variatio non eſt vniformis viribus opus eſt ad hanc motus mutationem in corpore efficiendam. Ac primo quidem pro motu centri inertiae requiruntur vires altera in directione $Mm=\frac{Mddx}{dt^2}$, altera in directione $M\mu=\frac{Mddy}{dt^2}$, ſumto temporis elemento dt conſtante; hic quidem eius quadratum dt^2 ſine coefficiente induco, quia notaſſe ſufficit, ſi tempora in minutis ſecundis exprimere velimus, loco dt^2 ſcribi oportere $2gdt^2$ denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, ſiquidem maſſae et vires ſollicitantes ad pondera reuocentur. Porro autem pro motu gyratorio corporis circa M requiritur virium momentum $=\frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$, in plagam Xx, Yy tendens, quo angulus $FM\mu$ magis

aperiatur. Huius ergo momenti loco, si vtrinque capiantur interualla aequalia $MX = MY = m$, iis normaliter subſtitui poſſunt vires aequales et contrariae $Xx = Yy = \frac{M m d d \mu}{2 d t^2}$, quippe quae ſolum motum gyratorium afficiunt, dum in ſe ſpectatae ſe mutuo deſtruunt.

His viribus inuentis, quae ad motus variationem requiruntur videamus quantum momentum praebeant reſpectu puncti cuiusque V ſeu potius axis ad planum motus normalis ibi conſtituti, qui cum ſit axi gyrationis in M conſiderato parallelus, a viribus Xx et Yy in eum exeretur par momentum $= \frac{M m m d d \mu}{d t^2}$ in eandem plagam $T\theta$ tendens. Tum vero ſi pro hoc puncto V ſtatuamus coordinatas $IT = T$ et $TV = V$; a vi $Mm = \frac{M d d x}{d t^2}$ orietur in eandem plagam $T\theta$ momentum $= \frac{M d d x}{d t^2}(V - y)$, a vi autem $M\mu = \frac{M d d y}{d t^2}$ momentum in plagam contrariam $Tt = \frac{M d d y}{d t^2}(T - x)$. Hinc ergo vniuerſum momentum reſpectu axis V in plagam $T\theta$ erit $= \frac{M m m d d \mu}{d t^2} + \frac{M d d x}{d t^2}(V - y) - \frac{M d d y}{d t^2}(T - x) = \frac{M}{d t^2}(m m d d \mu + x d d y - y d d x + V d d x - T d d y)$.

Coroll. 1.

43. Notari hic in genere meretur, quod virium momentum reſpectu axis M inuentum idem maneat pro omnibus aliis axibus illi parallelis; quod eatenus tantum locum habet, quatenus vires illae

Xx

Xx et Yy ſunt aequales, et in contrarium directae. Quemadmodum enim earum momentum reſpectu axis M eſt $= Xx.MX + Yy.MY = Xx.XY$, ita etiam reſpectu axis F momentum in eandem plagam eſt $Xx.FX - Yy.FY = Xx.XY$, quod idem de omnibus aliis valet.

Coroll. 2.

44. Hactenus nulla ratio eſt habita punctorum E et F, vbi hoc corpus forte cum aliis ope flexurae eſt coniunctum; ita hic EF eſt recta quaecunque per M ducta, vt angulus $FMm = \mu$ in computum duci queat, quo quippe ratio motus gyratorii definitur.

Coroll. 3.

45. Quodſi ergo iuncturae E et F cum centro inertiae M non in directum iaceant, alterum tantum angulum FMm in computum expoſitum introduxiſſe ſufficit, quandoquidem alter EMl ab eo, angulo quodam conſtante differt, ita vt ſi ille fuerit $FMm = \mu$, hic futurus ſit $EMl = \mu \pm$ Conſt. et vtriusque differentiale quod in hunc calculum ingreditur, ſit idem.

Problema 6.

46. Si corpus ex tribus partibus AB, BC, CD in B et C flexura elaſtica iunctis compoſitum Tab. IV. Fig. 11.

ſuper plano vtcunque proiectum moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Vtriusque flexurae in B et C axis ſit ad planum tabulae perpendicularis vt ratio motus exigit; ſumta in plano directrice IR, in eam tum ex iuncturis B et C, tum ex vniuscuiusque partis centro inertiae L, M, N demittantur perpendicula, ac ponantur coordinatae:

$IP=x$; $PL=y$; $IQ=x'$; $QM=y'$; $IR=x''$; $RN=y''$

ſit porro maſſa partis $AB=L$, partis $BC=M$, partis $CD=N$ et momenta inertiae cuiusque partis reſpectu ſui centri inertiae pro parte $AB=Ll$, parte $BC=Mmm$, parte $CD=Nnn$.

Vocentur etiam anguli $BLl=\lambda$, $CMm=\mu$, $DNn=\nu$ vbi quidem aſſumo rectam BC per ipſum centrum inertiae M partis BC tranſire, et ponantur intervalla:

$AL=a$, $LB=\alpha$, $BM=b$, $MC=\beta$, $CN=c$, $ND=\gamma$

eritque:

$x'=x+\alpha\cos.\lambda+b\cos.\mu$; $x''=x'+\beta\cos.\mu+c\cos.\nu$

$y'=y+\alpha\sin.\lambda+b\sin.\mu$; $y''=y'+\beta\sin.\mu+c\sin.\nu$.

His poſitis cuiusque partis motus progreſſiuus poſtulat vires vt vidimus ſequentes:

$$L\,l = \frac{L\,dx}{dt^2};\quad M\,m = \frac{M\,dx'}{dt^2};\quad N\,n = \frac{N\,dx''}{dt^2}$$
$$L\,\lambda = \frac{L\,dy}{dt^2};\quad M\,\mu = \frac{M\,dy'}{dt^2};\quad N\,\nu = \frac{N\,dy''}{dt^2}.$$

Quoniam igitur corpus a nullis viribus extrinsecus sollicitari assumitur, primo nanciscimur has duas aequationes

1°. $L\,dd x + M\,dd x' + N\,dd x'' = 0$; seu $Lx + Mx' + Nx'' = At + \mathfrak{A}$

2°. $L\,dd y + M\,dd y' + N\,dd y'' = 0$; seu $Ly + My' + Ny'' = Bt + \mathfrak{B}$.

Porro necesse est vt virium requisitarum omnium momenta respectu axis cuiusque, ideoque etiam pro axe I euanescant vbi $T = 0$ et $V = 0$; vnde sequitur haec tertia aequatio:

3°. $L\,ll\,dd\lambda + M\,mm\,dd\mu + N\,nn\,dd\nu$
$+ L(x\,dd y - y\,dd x) + M(x'\,dd y' - y'\,dd x') + N(x''\,dd y'' - y''\,dd x'') = 0.$

Praeterea ad flexuram vtramque est respiciendum; cum igitur in B sit inflexio facta per angulum $= \mu - \lambda$ in C vero per angulum $\nu - \mu$, siquidem in statu naturali puncta A, B, C, D in directum iaceant, ponatur momentum elasticitatis in $B = E\,e\,\text{sin.}(\mu - \lambda)$ et in $C = F\,f\,\text{sin.}(\nu - \mu)$.

Hinc pro flexura B ex altera totius corporis parte AB nascitur virium requisitarum momentum, ob $T = x + \alpha\,\text{cos.}\lambda$ et $V = y + \alpha\,\text{sin.}\lambda$ ita expressum

$$\frac{L\,ll\,dd\lambda}{dt^2}$$

$\frac{Lll\,d\,d\lambda}{dt^2} + \frac{L\,d\,d\,x}{dt^2}.\,\alpha\,\text{sin.}\,\lambda - \frac{L\,d\,d\,y}{dt^2}.\,\alpha\,\text{cos.}\,\lambda$, in plagam tQ tendens quod negatiue ſumtum cum vi elaſtica iunctur ae quae in eandem plagam tendit in aequilibrio eſſe debet, ex quo obtinetur haec aequatio:

$$4^{\circ}.\ \frac{Lll\,d\,d\lambda}{dt^2} + \frac{L\alpha(d\,d\,x\,\text{sin.}\,\lambda - d\,d\,y\,\text{cos.}\,\lambda)}{dt^2} = E\,e\,\text{sin.}\,(\mu-\lambda).$$

Pro iunctura in C vero conſiderandis viribus ex partibus AB et BC ortis naſcitur momentum in plagam cR tendens:

$$\frac{Lll\,d\,d\lambda}{dt^2} + \frac{L\,d\,d\,x}{dt^2}\,(Cc-y) - \frac{L\,d\,d\,y}{dt^2}\,P\,c$$
$$\frac{M\,m\,m\,d\,d\,\mu}{dt^2} + \frac{M\,d\,d\,x'}{dt^2}.\,Cm - \frac{M\,d\,d\,y'}{dt^2}\,Q\,c$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$5^{\circ}.\ \frac{Lll\,d\,d\lambda}{dt^2} + \frac{L\,d\,d\,x}{dt^2}(\alpha\,\text{sin.}\,\lambda + (b+\mathfrak{C})\,\text{sin.}\,\mu) - \frac{L\,d\,d\,y}{dt^2}(\alpha\,\text{cos.}\,\lambda + (b+\mathfrak{C})\,\text{cos.}\,\mu)$$
$$+ \frac{M\,m\,m\,d\,d\,\mu}{dt^2} + \frac{M\,d\,d\,x'}{dt^2}\,\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\mu - \frac{M\,d\,d\,y'}{dt^2}.\,\mathfrak{C}\,\text{cos.}\,\mu = F\,f\,\text{sin.}\,(\nu-\mu).$$

Ex his ergo quinque aequationibus ad quoduis tempus t definiri oportet has quinque quantitates x, y, λ, μ, ν, cum reliquae coordinatae x', y', x'', y'' ex his iam determinentur.

Coroll. 1.

42. Tertia aequatio per ſe integrabilis praebet hoc integrale:

$$L\,lld\lambda + M\,mmd\mu + N\,nndv + L(x\,dy - y\,dx) + M(x'dy' - y'dx') + N(x''dy'' - y''dx'') = C\,dt$$

prima autem et ſecunda geminam integrationem admiſerunt vbi notandum eſt, ſi totius corporis centrum

trum inertiae quieſcat, conſtantes A, B, et 𝔄, 𝔅 euaneſcere.

Coroll. 2.

48. Si aequatio quinta a tertia auferatur, remanebit:

$$\begin{aligned} &N n n d d \nu + L d d y (x + \alpha \cos.\lambda + (b+\mathfrak{E})\cos.\mu) + M d d y' (x' + \mathfrak{E}\cos.\mu) \\ &\quad - L d d x (y + \alpha \sin.\lambda + (b+\mathfrak{E})\sin.\mu) - M d d x' (y' + \mathfrak{E}\sin.\mu) \\ &\quad + N x'' d d y'' - N y'' d d x'' \\ &\qquad = - F f d t^2 \sin.(\nu - \mu) \end{aligned}$$

vbi ſi loco x, y, x'', y'' valores ſupra dati ſubſtituantur prodit

$$\begin{aligned} &N n n d d \nu + (L d d y + M d d y' + N d d y'')(x + \mathfrak{E}\cos.\mu) + N c d d y' \cos.\nu \\ &\quad - (L d d x + M d d x' + N d d x'')(y + \mathfrak{E}\sin.\mu) - N c d d x' \sin.\nu \\ &\qquad = - F f d t^2 \sin.(\nu - \mu) \end{aligned}$$

quae ob aequat. n. 1 et 2 contrahitur in hanc

$$N n n d d \nu - N c (d d x'' \sin.\nu - d d y'' \cos.\nu) = - F f d t^2 \sin.(\nu - \mu)$$

quae eadem prodiiſſet ſtatim, ſi elaſticitatem flexurae in C cum momento virium ad alteram partem CD pertinentium comparauiſſem.

Coroll. 3.

49. Subtrahamus quartam aequationem a quinta, et fiet:

$$\begin{aligned} &M m m d d \mu + L d d x (b+\mathfrak{E})\sin.\mu + M d d x' . \mathfrak{E}\sin.\mu \\ &\quad - L d d y (b+\mathfrak{E})\cos.\mu - M d d y' . \mathfrak{E}\cos.\mu \\ &\quad = + F f d t^2 \sin.(\nu - \mu) - E e d t^2 \sin.(\mu - \lambda) \end{aligned}$$

ſubſtituantur hic iſti valores:

$Mddx' = -Lddx - Nddx''$ et $Mddy' = -Lddy - Nddy''$

ac reſultabit

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \text{ ſin.}\mu - ddy \text{ coſ.}\mu) = +Ffdt^2 \text{ ſin.}(\nu - \mu) - N\mathfrak{G}(ddx'' \text{ ſin.}\mu - ddy'' \text{ coſ.}\mu) - Eedt^2 \text{ ſin.}(\mu - \lambda).$$

Coroll. 4.

50. Praeter aequationes ergo iam integratas, vel potius loco aequationum n°. 3. 4 et 5 has euolui conueniet:

$$Lllddλ + L\alpha(ddx \text{ ſin.}\lambda - ddy \text{ coſ.}\lambda) = Eedt^2 \text{ ſin.}(\mu - \lambda)$$

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \text{ ſin.}\mu - ddy \text{ coſ.}\mu) = +Ffdt^2 \text{ ſin.}(\nu - \mu) - N\mathfrak{G}(ddλ'' \text{ ſin.}\mu - ddy'' \text{ coſ.}\mu) = -Eedt^2 \text{ ſin.}(\mu - \lambda)$$

$$Nnnddν - Nc(ddx'' \text{ ſin.}\nu - ddy' \text{ coſ.}\nu) = -Ffdt^2 \text{ ſin.}(\nu - \mu)$$

ex quarum contemplatione inſignem analogiam colligere licet.

Scholion.

51. Quodſi ſcilicet ponamus:

$\frac{Lddx}{dt^2} = p$; $\frac{Lddy}{dt^2} = q$; $\frac{Nddx''}{dt^2} = -p'$; $\frac{Nddy''}{dt^2} = -q'$ hincque

$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \text{ et } \frac{Mddy'}{dt^2} = q' - q$$

tres poſtremae aequationes has induunt formas:

$$\frac{Llddλ}{dt^2} + \alpha(p \text{ ſin.}\lambda - q \text{ coſ.}\lambda) = Ee \text{ ſin.}(\mu - \lambda)$$

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$$

$$\frac{Mmmddμ}{dt^2} + b(p\,\text{sin.}\,\mu - q\,\text{cos.}\,\mu) = +Ff\,\text{sin.}\,(\nu-\mu)$$
$$+\mathfrak{G}(p'\,\text{sin.}\,\mu - q'\,\text{cos.}\,\mu) \quad -Ee\,\text{sin.}\,(\mu-\lambda)$$
$$\frac{Nnnddν}{dt^2} + c(p'\,\text{sin.}\,\nu - q'\,\text{cos.}\,\nu) = -Ff\,\text{sin.}\,(\nu-\mu).$$

Ac si in prioribus aequationibus hos valores assumtos substituamus, sequentes obtinebimus determinationes:

$$p = \frac{-L(M+N)\alpha\,ddd.\,\text{cos.}\,\lambda - L((M+N)b+N\mathfrak{G})d\,dd.\,\text{cos.}\,\mu - LNc\,ddd.\,\text{cos.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$q = \frac{-L(M+N)\alpha\,ddd.\,\text{sin.}\,\lambda - L((M+N)b+N\mathfrak{G})d\,dd.\,\text{sin.}\,\mu - LNc\,ddd.\,\text{sin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$p' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,\text{cos.}\,\lambda - N(Lb+(L+M)\mathfrak{G})d\,dd.\,\text{cos.}\,\mu - N(L+M)c\,ddd.\,\text{cos.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$q' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,\text{sin.}\,\lambda - N(Lb+(L+M)\mathfrak{G})d\,dd.\,\text{sin.}\,\mu - N(L+M)c\,ddd.\,\text{sin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

qui valores si ibi substituantur, ternae tantum erunt variabiles λ, μ, ν quas ad datum tempus t definiri oportet, ad quod tres illae aequationes sufficiunt. Attendenti autem facile patebit quantitates p et q vires designare quibus partes AB et BC in iunctura B praeter elasticitatem cohaerent, seu quae eas a se inuicem diuellere conantur.

Alia Solutio eiusdem Problematis.

52. Statim igitur vires, quibus partes in se mutuo agunt praeter iuncturae cuiusque elasticitatem, in calculum introducere licet, vnde hoc commodi assequimur, vt motum cuiusque partis seorsim definire queamus neque amplius opus sit, prin-

cipium aequilibrii in ſubſidium vocari. Factis ergo iisdem denominationibus, quibus ante ſumus vſi, perpendendum eſt, binas partes contiguas ob nexum certis viribus in ſe mutuo agere, quibus efficitur ne a ſe inuicem diuellantur. In iunctura igitur B ſumamus partem AB ob nexum cum parte ſequente BC ſollicitari binis viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ ſecundum directionem coordinatarum, atque ab iisdem viribus pars BC in plagas contrarias afficietur. Simili modo iunctura C exerat in partem BC vires $C\gamma' = p'$ et $C\gamma = q'$, quae ergo contrario modo agent in partem CD.

53. Iam ſingularum partium motum ſeorſim euoluamus, et cum pars prima AB ſollicitetur viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ praeter vim elaſticitatis in iunctura B, quae motum progreſſiuum non afficit. Quare pro motu progreſſiuo huius partis habebimus:

$$\frac{L\,dd\,x}{dt^2} = p \quad \text{et} \quad \frac{L\,dd\,y}{dt^2} = q$$

vbi notandum eſt, ſi haec pars AB inſuper extrinſecus a viribus quibuscunque ſollicitaretur, earum rationem etiam in motus huius determinationem introduci oportere. Quod vero ad motum gyratorium huius partis AB circa ſuum centrum inertiae L attinet, quo angulum $BLl = \lambda$ augeri ſumimus, euidens eſt virium p et q momentum ad hunc motum accelerandum eſſe $= \alpha q \cos.\lambda - \alpha p \sin.\lambda$. Elaſticitatis autem in B momentum $Ee \sin.(\mu - \lambda)$ ſolum motum

motum gyratorium afficit, huiusque quidem partis accelerando; dum eo sequentis BC motus gyratorius retardabitur, ex quo pro acceleratione motus gyratorii partis AB obtinemus $\frac{Llld\lambda'}{dt^2} = \alpha(q \cos.\lambda - p \sin.\lambda) + Ee \sin.(\mu - \lambda)$.

54. Secunda iam pars BC sollicitatur in B a viribus $Bb' = -p$, $B\mathfrak{C} = -q$, in C vero a viribus $Cc' = p'$, $C\gamma = q'$ vnde pro motus progressiui acceleratione colligimus:

$$\frac{M\,d\,dx'}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{M\,d\,dy'}{dt^2} = q' - q.$$

Ex iisdem vero viribus nascitur momentum pro motu gyratorio circa centrum inertiae M acceleran-do $= \mathfrak{C}q' \cos.\mu - \mathfrak{C}p' \sin.\mu + bq \cos.\mu - bp \sin.\mu$; praeterea vero etiam a momento elasticitatis in C, quod est $Ff \sin.(\nu - \mu)$ acceleratur, a praecedente autem in B retardatur, vnde colligitur haec aequatio

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} = (\mathfrak{C}q' + bq)\cos.\mu - (\mathfrak{C}p' + bp)\sin.\mu + Ff \sin.(\nu - \mu) - Ee \sin.(\mu - \lambda).$$

55. Tertia pars, quia est vltima, tantum in C sollicitatur a viribus $Cc' = -p'$ et $C\gamma = -q'$, tum vero etiam a momento elasticitatis in $C = Ff \sin.(\nu - \mu)$, quo motus tantum gyratorius retardatur. Pro motu ergo progressiuo habebimus:

$$\frac{N\,d\,dx''}{dt^2} = -p' \quad \text{et} \quad \frac{N\,d\,dy''}{dt^2} = -q''$$

at quia ex his viribus nascitur momentum ad motum gyratorium circa N accelerandum $= cq' \cos.\nu - cp' \sin.\nu$ ista elicitur aequatio

$$\frac{Nnnddv}{dt} = c(q' \cos.\nu - p' \sin.\nu) - Ff \sin.(\nu - \mu).$$

56. Hae formulae egregie conueniunt cum ante inuentis, ex quo haec methodus soluendi eo maiore attentione videtur digna, quod non solum negotium multo commodius conficit, sed etiam ita est comparata, vt nisi ante eius consensum cum praecedente perspexissemus, vix audacter asseuerare essemus ausi, ab elasticitate iuncturarum motum centri inertiae singularum partium prorsus non affici. Aequationibus autem ex his quasi nouis principiis erutis adiungi conuenit hasce

$$x' - x = \alpha \cos.\lambda + b \cos.\mu; \quad x'' - x' = \mathfrak{C} \cos.\mu + c \cos.\nu$$
$$y' - y = \alpha \sin.\lambda + b \sin.\mu; \quad y'' - y' = \mathfrak{C} \sin.\mu + c \sin.\nu.$$

Hincque simul perspicitur, si plures tribus partes inter se per flexuras elasticas essent coniunctae, atque adeo etiam singulae inter mouendum a viribus quibuscunque sollicitarentur, quomodo motus determinatio ad formulas analyticas perduci debeat.

Euolu-

Euolutio analytica formularum inuentarum.

57. Cum ſit ex hoc lemmate:

$$\text{ſin. } \Phi\, dd.\ \text{cof. } \omega - \text{cof. } \Phi\, dd.\ \text{ſin. } \omega = -dd\omega \text{ cof. } (\omega - \Phi) + d\omega^2 \text{ ſin. } (\omega - \Phi)$$

ſi ad contrahendas formulas ſupra §. 51. inuentas ponamus:

$$\frac{L(M+N)}{L+M+N} = P;\quad \frac{LN}{L+M+N} = Q \text{ et } \frac{N(L+M)}{L+M+N} = R$$

aequationes illae motum continentes has induunt formas:

I. $$L\lambda dd\lambda + P\alpha add\lambda + (Pb+Q\mathfrak{b})\alpha dd\mu \text{cof.}(\mu-\lambda) - (Pb+Q\mathfrak{b})\alpha d\mu^2 \text{ſin.}(\mu-\lambda) + Q\alpha c dd\nu \text{cof.}(\nu-\lambda) - Q\alpha c d\nu^2 \text{ſin.}(\nu-\lambda) = E e d t^2 \text{ſin}\,(\mu-\lambda)$$

II. $$M\mu dd\mu + (Pbb+2Qb\mathfrak{b}+R\mathfrak{b}\mathfrak{b})dd\mu + (Pb+Q\mathfrak{b})\alpha dd\lambda \text{cof.}(\mu-\lambda) + (Pb+Q\mathfrak{b})\alpha d\lambda^2 \text{ſin.}(\mu-\lambda) + (Qb+R\mathfrak{b})cdd\nu \text{cof.}(\nu-\mu) - (Qb+R\mathfrak{b})cd\nu^2 \text{ſin.}(\nu-\mu) = F f d t^2 \text{ſin.}(\nu-\mu) - E e d t^2 \text{ſin.}(\mu-\lambda)$$

III. $$N\nu dd\nu + Rcdd\nu + Q\alpha c dd\lambda \text{cof.}(\nu-\lambda) + Q\alpha c d\lambda^2 \text{ſin.}(\nu-\lambda) + (Qb+R\mathfrak{b})cdd\mu \text{cof.}(\nu-\mu) + (Qb+R\mathfrak{b})cd\mu^2 \text{ſin}\,(\nu-\mu) = -F f d t^2 \text{ſin.}(\nu-\mu)$$

quae

quae primum additae integrationem admittunt:

$$(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda+(Mmm+Pbb+2Qb\mathfrak{B}+R\mathfrak{B}\mathfrak{B})d\mu+(Nnn+Rcc)d\nu$$
$$+(Pb+Q\mathfrak{B})\alpha(d\lambda+d\mu)\text{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c(d\lambda+d\nu)\text{cof.}(\nu-\lambda)$$
$$+(Qb+R\mathfrak{B})c(d\mu+d\nu)\text{cof.}(\nu-\mu)=Cdt.$$

Tum ſi prima per $d\lambda$ ſecunda per $d\mu$ et tertia per $d\nu$ multiplicetur ſumma itidem fit integrabilis datque:

$$\tfrac{1}{3}(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda^2+\tfrac{1}{2}(Mmm+Pbb+2Qb\mathfrak{B}+R\mathfrak{B}\mathfrak{B})d\mu^2+\tfrac{1}{2}(Nnn+Rcc)d\nu^2$$
$$+(Pb+Q\mathfrak{B})\alpha d\lambda d\mu\text{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c d\lambda d\nu\text{cof.}(\nu-\lambda)+(Qb+R\mathfrak{B})cd\mu d\nu\text{cof.}(\nu-\mu)$$
$$=Eedt^2\text{cof.}(\mu-\lambda)+Ffdt^2\text{cof.}(\nu-\mu)+Ddt^2.$$

SECTIO

SECTIO PRIMA
DE
STATV AEQVILIBRII FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.
DE
NATVRA ET VARIETATE FLVIDORVM.

Phaenomenon 1.

1.

Si fluidum a vi quacunque preſſum in aequilibrio verſetur, tum preſſio per totam fluidi maſſam ita aequaliter diffunditur, vt omnes eius particulae parem vim ſuſtineant.

Illuſtratio.

Sermo hic eſt de fluido in aequilibrio exiſtente quod propterea omni motu deſtitu tur, non obſtante vi, qua id premi aſſumimus: vel ſi primo actionis initio, motus quidam in fluido fuerit exortus, eo demum ceſſante hic ſtatus fluidi conſideratur, ita vt fluidum iam et preſſionem ſuſtineat, et in aequilibrio verſetur. Quod quo clarius percipiatur, ſit fluidum vaſi A B C D E F incluſum, in quo ope emboli *p* O tubo A B*b* inſertae data vi prematur, cuius directio in O ad ſuperficiem fluidi perpendicularis eſt intelligenda. Nunc igitur quando affirmamus hanc preſſionem per totam fluidi maſſam diffundi, id primo, reſpectu parietum vaſis ita eſt interpretandum, vt ſi vſpiam eſſet foramen embolo O aequale et operculo C D claudendum, id parem vim eſſet ſuſtentaturum, ideoque aequali vi apprimendum, ne a fluido depellatur, cuius quippe vis operculum vrgens *n q* ipſi vi prementi *p* O eſt aequalis. Si aliud ſimile operculum *c d* maius minusue concipiatur quam baſis emboli O vis id ſecundum directionem *m r* vrgens in eadem ratione maior erit minorue quam vis emboli. Vbique ergo vaſis parietes intus a fluido pelluntur talibus viribus, quae ſi ſpatiola, in quae agunt, baſi emboli O ſint aequalia, ſingulae ipſi vi embolum trudenti erunt aequales: deinde vero obſeruandum eſt ſingulas has vires in ſuperficiem, quam vrgent, eſſe perpendiculares, quod quidem ex notione preſſionis

Tab. V. Fig. 1.

per

per ſe eſt manifeſtum. Denique haec preſſio non ſolum in latera vaſis intus agit, ſed etiam per vniuerſam fluidi maſſam aeque viget, in medio namque fluidi ſi concipiamus molem quamcunque fgh haec a fluido ambiente vndequaque pari vi comprimetur, eamque idcirco ſuſtinere debet, ne in ſpatium anguſtius compellatur, vbi quidem pariter liquet, has vires perpetuo in ſpatia, quibus applicantur eſſe normales. Hic autem perinde ſe res habet, ſiue moles fgh ſit corpus peregrinum, ſine ipſius fluidi vas implentis pars.

Coroll. 1.

2. Si ergo emboli baſis O dicatur $=ff$ et vis embolum vrgens $=p$, tum ſumto in vaſis lateribus ſpatiolo CD$=ff$ id extrorſum pelletur vi $nq=p$, ſin autem aliud ſumatur ſpatiolum $cd=gg$, id ſuſtinebit vim $nr=\frac{gg}{ff}p$ cum ſit haec vis ad illam p vti gg ad ff.

Coroll. 2.

3. Cum virium menſura commodiſſime a ponderibus petatur, ſi loco vis p ſubſtituamus pondus columnae, baſin $=ff$ et altitudinem $=a$ habentis, quae quidem ex nota materia conſtare eſt concipienda, tum ſoliditas aff praebebit menſuram vis p hincque pro alio quocunque ſpatiolo gg vis id vrgens erit $=agg$.

Coroll. 3.

4. Hic ergo modus vim prementem p exhibendi hoc insigne praestat commodum, vt sola illius columnae altitudo a sufficiat omnibus pressionibus, per totam fluidi massam cognoscendis: quodlibet enim spatiolum vim sustinet aequalem ponderi columnae, cuius basis ipsi isti spatiolo aequatur altitudo vero perpetuo est $=a$.

Scholion 1.

5. Hic manifesto assumsimus fluidum a nulla alia vi sollicitari praeter eam qua embolus vrgetur: a grauitate igitur aliisque similibus viribus, quae immediate in singulas fluidi particulas agere solent, hic mentem omnino abstrahi oportet. Fluidum ergo vasi inclusum grauitatis expers concipi debet, et sub hac tantum conditione phaenomenum est accipiendum: si enim fluidum grauitate esset praeditum, partes inferiores praeter pressionem emboli etiam a pondere superiorum deprimerentur, indeque eueniret, vt vasis latera circa fundum maiori vi premerentur, quam in summitate. Quemadmodum autem a grauitate aliisque similibus viribus pressionum aequalitas hic stabilita perturbetur, deinceps tam pro statu aequilibrii quam motus inuestigabimus, hoc loco tantum notasse iuuabit maximum discrimen inter vires externas seu extrinsecus in fluidum agentes, cuiusmodi est haec vis embolo applicata

cata, et inter vires grauitati similes, quae quasi intus singulas fluidi particulas sollicitant esse constituendum.

Scholion 2.

6. Mirum omnino videri debet, quod ab vnica vi, eaque quantumuis parua quasi innumerabiles nouae vires quantumuis magnae generari queant. Statim enim ac fluidum in spatiolo O ab embolo premitur, tota simul vasis cauitas interna, quantumuis ea fuerit ampla in singulis elementis a paribus viribus vrgetur, si scilicet elementa basi emboli O aequalia capiantur, ex quo amplitudinem vasis augendo haec multiplicatio in infinitum expandi potest. Deinde etiam eaedem vires subsistere possunt, etiamsi vis embolum premens in infinitum diminuatur, dummodo emboli basis in eadem ratione imminuatur: quem enim effectum producit vis p in spatiolum ff agens, eundem plane effectum producit vis $\frac{1}{1000}p$ spatiolo $\frac{1}{1000}ff$ applicata. Quod etsi summopere est mirandum, tamen neutiquam vt absurdum legibusque naturae contrarium spectari debet, neque enim staticae praecepta ideo in dubium vocari solent, quod vires minimae ope machinarum in immensum augeri posse ostenduntur. Cum legibus autem naturae hoc paradoxon ita conciliare licet, vt dicamus ab his viribus etiam in immensum multiplicatis nullam actionem produci: quandoquidem fluidum in aequilibrio statuitur. Sub-

lato autem aequilibrio simul atque motus exoritur, ab his tot tantisque viribus non maior effectus producitur, quam qui sit illi vi principali embolum sollicitanti consentaneus.

Scholion 3.

7. Quoniam vidimus a sola vi embolum O premente tot vires quasi per vniuersam fluidi massam excitari, eaque duplicata etiam has fieri duplo maiores hinc tuto concludi posse videtur, si eidem vasi duo huiusmodi emboli accommodentur, quorum vterque vi eadem prematur, etiam omnes pressiones in fluido duplicari debere, haec certe conclusio ei canoni inniti videtur, quod causa geminata etiam effectus duplicetur. Nihilo tamen minus haec argumentatio prorsus est fallax: neque duo illi emboli quicquam amplius praestabunt quam vnicus, quod etiam tenendum est, si multo plures eodem modo adhiberentur, quod ingens paradoxon facile diluetur, si circumstantias phaenomeni probe perpendamus. Cum enim vis np in basin nff non maiorem producit pressionem, quam vis p in basin ff agens, euidens est a duabus pluribusue aequalibus viribus, quarum singulae embolos aeque amplos trudant, eandem plane in fluido pressionem oriri debere atque ab vnica: hocque ergo casu falsum est a causa duplicata effectum duplicatum produci. Hoc autem clarius inde intelligitur, quod operculum CD foramen embolo O aequale tegens tanta vi appri-

apprimi debeat, quanta vi embolum agit, ſi igitur loco operculi ſimilis embolus adhibeatur, ei quoque aequalis vis applicari debet, eum tantum in finem, vt aequilibrium conſeruetur: neque ergo inde noua preſſio in fluido generari poterit: ſin autem hic alter embolus maiori minoriue vi impellatur, aequilibrium plane tollitur atque effectus inde oriundi determinatio non ad hunc locum pertinet.

Concluſio.

8. Ex hoc phaenomeno colligimus naturam fluidorum aptiſſime in ea proprietate collocari, quod quaelibet preſſio iis applicata per totam eorum maſſam ita diffundatur vt omnes eorum partes eandem ſentiant preſſionem, quatenus ſcilicet fluidum in aequilibrio perſiſtit.

Explicatio.

9. Natura fluidi in eiusmodi proprietate conſtitui debet, quae non ſolum omnibus fluidis ſit communis, ſed etiam vt omnis materia in quam eadem proprietas competit, recte pro fluido habeatur. Aequabilis autem cuiusque preſſionis diffuſio per omnes fluidi partes vtique eiusmodi eſt proprietas, quae non ſolum in omnibus fluidis agnoſcitur, ſed etiam omnes materiae ſtatim ac proprietate hac fuerint praeditae, merito ad genus fluidorum referuntur; tum vero etiam nulla materia hac proprietate

deſti-

deſtituta pro fluida haberi poteſt. Neceſſario autem haec proprietas omnia fluidorum attributa inuoluit, quae vulgo tam in particularum ſumma paruitate, quam cohaeſionis defectu conſtitui ſolent, vt facillime ſibi mutuo cedere et inter ſe agitari queant, niſi enim particulae eſſent minimae et diſſolutae, perſpicuum eſt noſtram proprietatem nullo modo locum habere poſſe. Praecipuum autem momentum in hoc conſiſtit, quod ex hac proprietate omnia tam aequilibrii, quam motus fluidorum principia planiſſime deriuari poſſunt, ita vt quaecunque materia hac proprietate fuerit praedita, ea neceſſario tam in aequilibrio, quam motu leges iſtis principiis innixas ſequi debeat. Cum igitur huic ſoli proprietati vniuerſa aequilibrii motusque fluidorum doctrina feliciſſimo ſucceſſu ſuperſtruatur, dubium plane eſt nullum quin vera fluidorum natura et eſſentia in ea proprietate conſtitui debeat.

Scholion 1.

10. Primum autem ſtatim hac proprietate corpora fluida maxime diſtinguuntur a corporibus ſolidis: quacunque enim vi corpus ſolidum tabulae apprimitur, eandem praeciſe vim tabula ſuſtinet idque in eadem directione, neque inde in corpore vlla vis latera verſus naſcitur. Scilicet ſi in vaſe ante conſiderato A B C D E F, corpus ſolidum contineretur, vel ſi fluidum in eo contentum per congelationem in ſolidum transmutaretur, tum id ab embo-

Tab. V. Fig. 1.

embolo O preſſum fundum tantum oppoſitum E *d* pari vi vrgeret, multo minus adeo ſurſum circa A et B vas impelleret, quemadmodum a fluido fieri obſeruauimus. Tum vero etiam haec proprietas fluidum diſtinguit ab aceruo minimorum corpuſculorum ſolidorum: veluti ſi idem vas arena eſſet repletum tum quidem a preſſione emboli O non ſolum fundum, ſed etiam latera vaſis quampiam vim ſentirent, vt foramine pertuſo arena erumperet, verum tamen hae vires neutiquam inter ſe forent aequales, vti fit in fluido, ſed fundum embolo oppoſitum ſemper maiorem vim ſuſtineret quam latera. Quin etiam vis in latera exerta maxime foret inaequalis, dum a diſpoſitione ſingulorum granulorum, prouti alia ab aliis impelluntur pendet, quemadmodum ex principiis ſtaticis colligere licet: vix autem arena ſuperne circa A et B, ſi ibi foramen fieret, eſſet eruptura.

Scholion 2.

11. Hinc igitur ſequi videtur materiam fluidam neutiquam pro congerie plurimorum corpuſculorum ſolidorum minimorum qualem aceruus arenae exhibet haberi poſſe: quoniam talis congeries nequaquam ea proprietate, in qua fluidorum naturam conſtituimus, foret praedita: neque etiam perfecta lubricitas his particulis ſolidis adiecta negotium conficere poteſt. Si ſortaſſe ipſis inſuper motus inteſtinus tribueretur, qualis a calore oriri concipitur,

etiamsi in sensus non incurrat, phaenomeno proposito satisfieret, cum per experimenta subtilissimus marmoris puluis in vase igni expositus naturam fluidi mentiatur: interim tamen merito adhuc dubitamus, an in tali materia pressiones quaquauersus aequaliter diffundantur? Hinc igitur in physica, quaestio, vtrum vltimae fluidorum particulae pro solidis haberi queant nec ne? minime adhuc confecta est censenda, neque minus dubium etiamnum videtur an vltimae solidorum particulae recte pro solidis habeantur? quoniam enim plurima corpora solida ope caloris fluida reddi possunt; si soliditas minimarum particularum fluiditati aduersaretur, ea etiam in huiusmodi solidis, admitti non posset.

Haud magis etiam liquet, quid de materiis semi-fluidis sit sentiendum, cuiusmodi sunt mel, exangia, aliaque olea crassiora, in quibus non tam particulae solidae implexae, quam nimia cohaesio fluiditati obsistere videtur. Ita etiam cera, quae in frigore est corpus satis durum, calori exposita mox butyri consistentiam adipiscitur, tum instar mellis fit corpus semi fluidum, aucto vero calore tandem ita perfecte fit fluidum, vt minimos corporum poros penetrare valeat, veluti ex iectionibus anatomicis constat: hoc ergo casu omnes gradus a maxima duritie ad perfectam fluiditatem distinguere licet, qui ita continuo nexu inter se cohaerent, vt difficile sit limites assignare, vbi soliditas definit et fluidi-

fluiditas incipit. Dum autem aqua congelascens in glaciem conuertitur, haec transmutatio quasi puncto temporis efficitur.

Scholion 2.

12. Non hic locus est super eiusmodi quaestionibus disputandi, neque etiam earum enodatio ad praesens institutum vllam vtilitatem esset allatura. Hic nimirum sufficit ostendisse dari eiusmodi materias, quibus fluidorum definitio hic data conveniat: verum etiamsi tales materiae, quae pro perfecte fluidis haberi queant, in mundo non existerent, nihilo tamen minus scientia cuius fundamenta hic stabilire constitui subsisteret, summumque adeo vsum esset habitura: perinde ac quae a mechanicis de corporibus vel perfecte duris, vel perfecte elasticis traduntur, summa vtilitate non destituuntur, etiamsi existentia huiusmodi corporum in dubium sit relinquenda. In leges itaque tam aequilibrii quam motus eiusmodi corporum sum inquisiturus, in quae definitio fluiditatis hic data competat, parum sollicitus, vtrum in mundo talia corpora existant nec ne? Interim tamen nullum est dubium, quin aquae natura tam prope ad hanc definitionem accedat, vt nulla aberratio ab hac theoria sit metuenda, quod pariter de aliis materiis aeque liquidis est tenendum. Aer autem multo magis hac fluiditatis proprietate est praeditus; atque in aethere ne minimus quidem perfectae fluiditatis defectus admittendus videtur:

haec autem diuerſa fluida ob alias rationes maxime a ſe inuicem diſcrepant, quod diſcrimen pariter ex phaenomenis accuratius inueſtigari conuenit.

Phaenomenon 2.

13. Alia fluida ita comparata deprehenduntur, vt quantumuis magna vi premantur, idem ſemper volumen retineant: alia vero huius ſunt indolis, vt quo maiori vi premantur, in eo minus ſpatium redigantur, antequam ad aequilibrium perveniant: in vtroque autem genere proprietas fluiditatis ante memorata aeque locum habet.

Illuſtratio.

Prior indoles, qua fluidum perpetuo idem volumen conſeruat quantacunque vi prematur, in aqua aliisque ſimilibus fluidis obſeruatur: poſterior vero aëri potiſſimum eſt propria, qui aucta vi premente continuo in ſpatium anguſtius comprimi ſe patitur. Quodſi nimirum A B C D E F aquam contineat, eaque ope emboli A O B prematur, quantumuis ſiue magna vi ſiue parua embolus adigatur, aqua ſemper idem volumen in vaſe occupabit, neque embolus etiamſi in infinitum aucta vi premente quicquam vlterius in tubo protrudi poteſt; verum vas ipſum potius diffringetur. Ponamus autem iam aqua effuſa, in vaſe nihil praeter aërem contineri, eumque iam a data vi embolum vrgente

Tab. V. Fig. 2.

in

in ſtatum aequilibrii eſſe redactum, vt nunc in vaſe ſpatium vsque ad *o* vbi emboli baſis cernitur, occupet; in hocque ſtatu per totam maſſam eadem illa preſſio reperiatur, qua embolus vrgetur, vti natura fluiditatis poſtulat. Hoc poſito ſi vis in embolum agens augeatur, is ſimul profundius in vas adigetur, donec in aequilibrium peruenerit et quo magis vis illa intendatur, in eo minus ſpatium aër comprimetur. Contra vero minuta vi premente, ea non amplius aërem in hoc ſtatu retinere valebit, ſed retropelletur aëre ſe in maius ſpatium expandente, donec in eum ſtatum perueniat, vbi haec minor vis aequilibrium fuiſſet productura. Hocque diſcrimen inter aquam et aërem maxime notari meretur.

Coroll. 1.

14. Aqua igitur perpetuo eandem conſeruat denſitatem ſiue a maiore vi comprimatur ſiue a minore, ſiue etiam prorſus a nulla: vnde de aqua praedicari poteſt, quod cuiuis preſſioni eadem denſitas reſpondeat.

Coroll. 2.

15. Aëris autem ratio longe aliter eſt comparata, cum vis maior eum in minus ſpatium adigendo, ipſi tanto maiorem denſitatem inducat. Ad quamuis ergo vim prementem certus denſitatis gradus eſt affectus, et viciſſim quaeuis denſitas certam vim comprimentem ſupponit.

Coroll. 3.

16. Si igitur vis premens certae cuidam basi innixa ponatur $=p$ et denſitas fluidi $=q$, cum ſcilicet in aequilibrium fuerit redactum: tum pro aqua q eſt quantitas conſtans neutiquam a vi p pendens: pro aëre vero q eſt certa quaedam functio ipſius p, ita vt data altera, altera ſimul determinetur.

Scholion 1.

17. Non obſtante hac inſigni differentia, tam aër quam aqua ad genus corporum fluidorum aeque refertur, propterea quod natura fluiditatis ſupra ſtabilita vtrique conuenit, in modo autem tractandi hinc maximum discrimen naſcitur, ſiquidem in motus inueſtigatione potiſſimum ratio denſitatis a qua inertia pendit eſt habenda. Aqua igitur eiusmodi eſt fluidum, cuius denſitas perpetuo manet inuariata, quomodocunque a viribus vrgeatur, quippe a quibus in minus ſpatium coarctari omnino nequit, ita vt ab actione virium eius denſitas nullam mutationem patiatur, ex quo aqua fluidum vocari ſolet nullius compreſſionis capax. Aëri autem contra denſitas, quae ſuae naturae ſit propria, tribui nequit, quoniam prout a maioribus vel minoribus viribus vrgetur, maxime diuerſos denſitatis gradus recipere poteſt. Hinc aër dicitur fluidum compreſſionis capax, et quoniam ceſſante vi comprimente ſponte ſe iterum relaxat, et in maius ſpatium expan-

pandens denſitatem imminuit, vis elaſtica ei tribuitur. Omnino enim quanta vi opus eſt ad aërem in datum denſitatis gradum redigendum, tanta praeciſe vi pollet ſe iterum expandendi, quemadmodum aequalitas inter actionem et reactionem poſtulat. Ex quo patet hanc vim elaſticam aëris perpetuo vi comprimenti eſſe aequalem, neque differre a viribus inde per totam maſſam diffuſis, quibus tam parietes vaſis, cui aër eſt incluſus, quam omnes partes inter ſe vrgentur. Quamobrem elaſticitas aëri tributa ab illa vi preſſionis per primum phaenomenon ſtabilita non eſt diſtinguenda, quae cum etiam aquae ſit communis, aliud diſcrimen hic non eſt admittendum, niſi quod aqua conſtanti praedita ſit denſitate, aër autem variabili, quae in omni ſtatu a vi premente determinetur.

Scholion 2.

18. Experimentis autem euinci ſolet, denſitatem aëris proxime eſſe vi comprimenti proportionalem, facile autem intelligitur hanc proportionalitatem non vltra certos limites locum habere poſſe. Si enim denſitas ſemper eſſet vi comprimenti exacte proportionalis, inde ſequeretur euaneſcente hac vi etiam denſitatem euaneſcere debere, ita vt minima aëris portio a nulla vi compreſſa, ſe in ſpatium infinitum eſſet expanſura, quod merito abſurdum videtur. Contra autem non minus abſurdum foret, vi comprimente in infinitum aucta, etiam denſitatem

tem fieri infinite magnam, ſicque aëris maſſam quantumuis magnam in ſpatium euaneſcens compelli poſſe. Quae ambo incommoda vt euitentur ſtatuendum eſt pro aëre tam dari denſitatem minimam eamque finitam, quam ceſſante vi comprimente recipiat: quam etiam maximam pariter finitam, ad quam non niſi vi infinita redigi poſſit. Repraeſentet ſcilicet recta AB minimam denſitatem, AC vero maximam denſitatem aëris, quarum illi vis comprimens nulla, huic vero infinita reſpondeat, atque manifeſtum eſt, ſi denſitas quaecunque media AP aëri inducatur a vi comprimente per applicatam PM repraeſentata, quatenus ſcilicet datae baſi innititur, tum puncta M, reperiri in eiusmodi linea curua BMV, quae in B axem AC tangat, neque vltra verſus A porrigatur, tum vero ab axe continuo recedat, et rectam CD in C axi normalem habeat pro aſymtota neque etiam vltra eam continuetur. Huiusmodi lineae curuae innumerabiles excogitari poſſunt, veluti ſi poſita denſitate minima $AB=b$ et maxima $AC=c$ vocetur denſitas quaecunque $AP=x$ et preſſio ei conueniens $PM=y$ iſta aequatio $yy=nn\frac{(x-b)^3}{c-x}$ ſeu $y=n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{c-x}}$ his conditionibus ſatisfacit, ſi enim $x=b$ fit $y=0$ ſi $x=c$ fit $y=\infty$ et vltra hos terminos valor ipſius y prodit imaginarius.

Tab. V. Fig. 3.

Scho-

Scholion 3.

19. Ista formula analytica rem nobis aperit maximi momenti, cum ea non solum aëris indolem nobis illustret, sed etiam simul aquae naturam, quamtumuis ea diuersa videatur in se complectatur. Si enim minimam densitatem $AB = b$ et maximam $AC = c$ inter se aequales fieri ponamus, habebimus hanc aequationem $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{b-x}}$ quae necessario inuoluit conditionem $x = b$ ita vt densitas tum perpetuo maneat eadem, quaecunque fuerit pressio y. Ita aqua et aër hoc tantum a se inuicem discrepare sunt censendi, quod in aëre maxima et minima densitas, cuius est capax, plurimum a se inuicem distent, in aqua autem inter se conueniant. Quare si aliae concipiantur materiae aëri similes, quarum densitates maximae et minimae continuo propius ad se inuicem accedant, ita vt interuallum BC continuo minus sit accipiendum, hoc modo continuo propius ad naturam aquae accedetur, quippe quae hinc reuera resultabit interuallo BC penitus euanescente. Plurimum autem intererit hanc circumstantiam probe obseruasse qua tam aëris quam aquae natura eidem formulae analyticae subiiciuntur, ita vt haec duo fluida non vniuersa natura sed tantum gradu a se inuicem discrepare sit iudicandum. Quae ergo in genere de fluido quocunque cuius densitas maxima et minima quocunque interuallo discrepant, tradentur, ea aeque ad aërem atque ad aquam accommodari poterunt.

Concluſio.

26. Praecipua ergo fluidorum varietas in eo diſcrimine eſt conſtituenda, quod inter denſitatem minimam et maximam cuius quodque fluidum capax eſt, intercedit; tum vero etiam in ea lege, qua a quauis preſſione fluido certa denſitas inducitur.

Explicatio.

21. Quae hic de denſitate afferuntur, de fluidis tantum homogeneis ſunt intelligenda, quae per totum ſpatium, quod implere concipiuntur, eadem denſitate ſint praedita; ſi enim fluidum ex diuerſis materiis conſtaret, de cuiusque partis denſitate iudicium ſeorſim eſſet ferendum. Dum autem materia homogenea conſideratur, eius denſitas ex tota maſſa per volumen, quod occupat, diuiſa aeſtimari debet, ita vt manente maſſa eadem, denſitas volumini reciproce proportionalis ſit cenſenda. Hinc minima cuiuspiam fluidi denſitas ex eo volumine colligi debet, in quod certa eius maſſa, dum a nullis viribus vrgetur, ſe expandit, maſſam ſcilicet per hoc volumen diuidendo, maxima vero denſitas ſimili modo ex eo volumine, in quod eadem maſſa a vi infinita coarctatur. Quare aqua eiusmodi fluidum eſt dicendum, cuius maxima et minima denſitas ſint inter ſe aequales, ita vt eius denſitas a nullis viribus vllam mutationem patiatur. In aëre autem hae duae denſitates maxime diſcrepant minima enim

certe

certe plus quam millies minor eſt cenſenda ea quam ſentimus, dum aër a pondere atmoſphaerae comprimitur, maxima autem denſitas, ad quam viribus non niſi infinitis redigi poſſet, ſi auri denſitati aequalem aeſtimemus, quaſi quindecies millies ſtatum naturalem ſuperaret; ſicque maxima denſitas aëris foret ad minimam vt 15000000 ad 1. ex quo immenſum diſcrimen inter aquam et aërem colligere licet.

Scholion 1.

22. Per ſe manifeſtum eſt, quomodo in tanto interuallo inter binas denſitates extremas, omnibus preſſionibus ab euaneſcente, ad infinitam vsque, cuique ſua definita denſitas conuenire poſſit, cum id ex formula §. 18. exempli loco allata clariſſime perſpiciatur. Verum quomodo eadem formula ad naturam aquae ſit accommodanda, ita vt pro omnibus preſſionibus eadem prodeat denſitas, non tam perſpicue intelligitur, quia poſito $c = b$ formulae $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{b-x}}$ valor vel imaginarius vel nullus eſſe videtur. Ad hoc dubium autem diluendum ſtatuamus differentiam minimam inter denſitatem minimam b et maximam c ſitque exempli gratia $b = 1000000$ et $c = 1000010$; dum pro omnibus denſitatibus vires reſpondentes n ita ſe habebunt, ſcilicet cum denſitati x conueniat preſſio $y = n$

$(x - 1000000)\sqrt{\frac{x-1000000}{1000010-x}}$ sequens tabella nodum soluet sumto $n = 100$

densitas x	pressio y
1000000	0
1000001	$33\frac{1}{3}$
1000002	100
1000003	196
1000004	326
1000005	500
1000006	735
1000007	1069
1000008	1600
1000009	2700
1000010	∞

Quia enim hinc patet quomodo pressiones diuersissimae densitates proxime aequales producere possunt, facile intelligitur discrimen in densitate prorsus euanescere posse.

Scholion 2.

23. Non semper vi actuali, qualem supra embolo applicatam sumus contemplati, opus est ad aërem aliaue similia fluida in dato statu pressionis conseruando. Si enim ponamus aërem in vase A B C D E F ope vis embolo O applicatae in statum aequilibrii esse redactum, vt iam vbique quaqua-versus eandem vim exerceat, embolum subito vasi agglutinari concipiamus, vt iam perinde sit siue solli-

ſollicitetur nec ne? ac remota vi illa manifeſtum eſt aërem vaſi incluſum in eodem ſtatu perſeuerare, atque easdem preſſiones in latera vaſis exercere, ex quo iam clariſſime intelligitur, has preſſiones vnice denſitati aëris in vaſe incluſi eſſe tribuendas, ita vt quatenus aër ad certum denſitatis gradum fuerit redactus, eatenus etiam quaquauerſus easdem vires exerceat, quibus opus eſt ad iſtam denſitatem aëri inducendam. Ad aquam quidem idem ratiocinium haud transferri poſſe videtur, ſi enim dum aqua in eodem vaſe ab embolo vim quamcunque ſuſtinet, embolus ſubito cum vaſe coaleſcat, aqua etiam ſimul nullam amplius preſſionem ſentire videtur. Verum quia ſtatim ac aquae minimam compreſſionem concedamus, hoc quoque phaenomenon exhiberi debet, dubium nullum eſſe poteſt, quin etiam in vera aqua locum habere debeat, ſed ob aliam rationem effectus mox euaneſcere debet, quantaecunque enim fierent vires quas latera vaſis durante preſſione emboli ſuſtinerent, ſi embolo conglutinato concipiamus latera vaſis his viribus vel minimum cedere, quod reuera fieri tuto aſſumere licet, tum aqua ſimul omnes has vires amittet. Hanc igitur veram cauſam eſſe intelligi oportet, cur embolo vaſi affixo aqua ſubito nullas amplius vires preſſionis exerceat.

Phaenomenon 3.

24. Omnis generis fluida a calore in maius ſpatium expandi, a frigore autem in minus ſpatium

contrahi experientia declarat, quatenus quidem ob vires ſollicitantes hoc fieri licet.

Illuſtratio.

Quae fluida aquae ſunt ſimilia quorum denſitas a nullis viribus comprimentibus alteratur, ea tamen aucto calore in maius ſpatium ita expanduntur, vt nulla vis hunc effectum coercere valeat, minuto autem calore effectus contrarius producitur denſitas ergo a calore minuitur a frigore augetur. In fluidis autem aëri ſimilibus hoc phaenomenon ita ſe habet, vt aucto calore ea tantum in maius ſpatium ſe expandere conentur, ac tum demum ſe actu expandunt, quando vires comprimentes hunc effectum non impediunt. Cum igitur ante viderimus, in aëre quemuis denſitatis gradum cum certa preſſione eſſe coniunctum, id eatenus tantum eſt intelligendum, quatenus aër in eodem caloris ſtatu verſatur, caloris enim mutatione haec regula vehementer perturbatur. Aucto namque calore dum denſitas manet eadem, preſſio augetur: dum autem preſſio manet eadem, denſitas minuitur, contrarium vero euenit calore imminuto, ita vt tum denſitate manente eadem preſſio debilitetur, preſſione autem eadem manente denſitas augeatur. Apprime haec conueniunt cum iis quae in phyſicis tradi ſolent, ſi modo loco preſſionis elaſticitatem ſubſtituamus, quoniam enim ſub notione preſſionis elaſticitas commodiſſime comprehenditur, ideas hic eo minus multiplica-

plicare nolo, vt eadem principia tam ad aquam quam aërem accommodari queant.

Coroll. 1.

25. Etsi ergo denſitas aquae omni virium comprimentium actioni reſiſtit, tamen non pro conſtanti eſt habenda, quia cum calore aliquantillum variatur, ita vt pro quouis caloris gradu peculiaris denſitas aquae ſit tribuenda.

Coroll. 2.

26. In aëre autem iam non amplius preſſio a ſola denſitate pendet, ſed inſuper caloris ratio habenda eſt, quo aucto eadem denſitas maiorem preſſionem poſtulat, minuto vero minorem. Preſſione autem ſeu elaſticitate eadem manente, calor auctus aërem in maius ſpatium diſtendens, eius denſitatem diminuit.

Coroll. 3.

27. Si ergo aër non ſemper vel vbique eodem calore eſt praeditus, preſſio qua pollet, tanquam functio ſpectari debet tam denſitatis quam caloris, ideoque tanquam functio duarum quantitatum variabilium, qua vtraque creſcente augeatur, vtraque vero decreſcente minuatur.

Scho-

Scholion 1.

28. Quod ſi ergo denſitatem littera q calo rem vero littera r deſignemus, preſſio autem littera p repraeſentetur, qua vel vis in datam baſin agens indicetur, vel potius altitudo columnae certae cuiusdam materiae conſtantis, cuius pondus aequatur, vi prementi quaecunque fuerit baſis quandoquidem hoc modo quantitas baſeos ex calculo extruditur. His igitur poſitis quantitas p vt functio binarum q et r eſt ſpectanda, de cuius natura hoc tantum nouimus quod creſcente vtraque q et r etiam p augeatur. Quomodocunque autem quantitas p ab iſtis binis q et r pendeat, ea per applicatam cuiusdam ſuperficiei ſequenti modo repraeſentari poterit. Sumta enim ſuper recta A D portione $AR = r$ et in plano tabulae ordinata illi normali $RQ = q$ ex Q eidem plano perpendicularis erigatur $QP = p$ haec in certa quadam ſuperficie terminabitur, cuius natura ſi eſſet perſpecta, pro quouis alio calore Ar aliaque denſitate $r\,q$ applicata, ibi ad hanc ſuperficiem erecta $q\,p$ preſſionem veram eſſet exhibitura. Pro quouis autem calore $AR = r$ in recta ad eam normali tam denſitatem minimam R M quam aër tum a nullis viribus preſſus induit, quam maximam R N quae ipſi a viribus adeo infinitis inducitur notari conuenit, quoniam applicata $QP = p$ in M euaneſcit in N vero fit infinita, quod ſi ſimili modo in m et n eueniat, ſuperficies in punctis M et m planum tangens inde verſus N et n progrediendo conti-

Tab. V. Fig. 4.

continuo eleuabitur, vt in ipſis punctis N et n ad altitudinem infinitam exſurgat: vltra hos terminos autem nusquam porrigetur. In axe A D ſine dubio quoque huiusmodi duo termini dantur, quorum alter minimo, alter vero maximo calori reſpondet, quem quidem aër recipere poteſt: ſicque tota ſuperficies ſpatio cuidam finito in plano tabulae imminebit.

Scholion 2.

29. Quemadmodum autem ſupra relationem inter denſitatem q et preſſionem p dedimus quae non adeo a veritate abhorrere videtur, ita nunc etiam calorem introducendo ſimili formula rem illuſtrare poterimus ponendo:

$$p = n(qr - \mathrm{A})\sqrt{\frac{qr - \mathrm{A}}{\mathrm{B} - qr}}$$

exiſtente B quantitate conſtante maiore quam A. Hinc enim pro quolibet calore r ſi denſitas fuerit $q = \frac{\mathrm{A}}{r}$ preſſio p euaneſcit, eritque adeo haec denſitas minima iſti gradui caloris conueniens, pro denſitate autem $q = \frac{\mathrm{B}}{r}$ preſſio fiet infinita, haecque propterea denſitas maxima eiusdem caloris: tum vero etiam haec formula declarat, quando denſitas fuerit calori reciproce proportionalis, vt qr aequetur quantitati conſtanti mediae inter limites A et B preſſionem p fore eandem, veluti experientia poſtulare videtur. Quod ſi ergo haec formula phaenomenis aëris ſatisfaciat, hic imprimis notandum eſt

eam quoque ad aquam egregie pertinere, dummodo quantitas constans B ipsi A aequalis statuatur, tum enim perpetuo sit oportet $qr = A$ seu densitas calori reciproce proportionalis, et simul omni pressioni locus conceditur. Ex consideratione vero etiam generali § praec. natura aquae obtinetur, si pro quovis gradu caloris termini densitatis M et N euanescant, tum enim tota superficies fiet cylindrica plano tabulae normaliter insistens, quo indicatur cuique calori determinatam densitatem respondere, cui omnes pressiones ab euanescente vsque ad infinitam aeque conueniunt.

Scholion 3.

30. Pro praxi autem, nisi densitas aëris sit vel nimis magna vel nimis parua, quoniam tum manente calore pressio proxime vt densitas est, manente densitate autem, calori proportionalis aestimari potest, quandoquidem certior ratio calorem metiendi adhuc latet, poni conueniet $p = nqr$ ita vt pressio rationem sequatur compositam densitatis et caloris. Verum vt haec formula etiam ad aquam accommodari possit, generalius poni potest:

$$p = A + m(nqr - A)$$

vnde fit $p = nqr$ si sumatur $m = 1$, qui valor itaque naturae aëris conuenire censendus est. Pro aqua autem hunc numerum m infinitum capi oportet, indeque perspicuum est, nisi pressio p sit infinita, neces-

neceſſario eſſe debere $nqr = A$ ita vt pro quouis caloris gradu aqua certam condenſationem recipiat: tum vero ob $m = \infty$ et $nqr - A = 0$ valor ipſius p prorſus manet indeterminatus, neque vlla preſſio valebit eam aquae denſitatem, quae ipſi pro caloris gradu conuenit, vel minimum immutare. Quamcunque autem legem ſequi libuerit, id ſatis iam eſt perſpicuum, naturam aquae non adeo a natura aëris diſcrepare, vt non commodiſſime eidem generi ſubiici queant: quod quidem in ſequenti tractatione eſt maximi momenti, vt quaecunque in genere tam circa aequilibrium, quam motum inueſtigauimus, deinceps aeque ad aërem atque ad aquam transferri queant. Nihil igitur hic intereſt, ſiue dentur fluida mediae cuiusdam naturae inter aquam et aërem, quae a viribus vrgentibus quodammodo condenſari ſe patiantur ſiue minus? ac Theoria a praxi remota ſemper aeque ſubſiſtere cenſenda eſt. Id tantum tenendum eſt in ſequentibus perpetuo fluida perfecta conſiderari per quae omnes preſſiones quaquauerſus aequaliter diffunduntur.

CAPVT II.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM REMOTA GRAVITATE ALIISQVE SIMILIBVS VIRIBVS.

Lemma.

31. Si corpus cuiuscunque figurae per totam ſuperficiem vndique normaliter ſollicitetur a viribus aequalibus, quatenus in aequalia ſuperficiei elementa agunt, tum omnes hae vires coniunctim ſe mutuo deſtruent.

Demonſtratio.

Tab. V. Fig. 5. Referatur tota ſuperficies ad ternas coordinatas inter ſe normales, quae pro puncto ſuperficiei quocunque p ſint $AM=x$ $MP=y$ et $Pp=z$, ſumtisque elementis $MN=PQ=dx$ et $PR=QS=dy$, vt in plano pro baſi aſſumto AMP habeatur rectangulum elementare $PQRS=dxdy$ cui in ſuperficie corporis emineat elementum $pqrs$, in quod normaliter ducta ſit recta pO baſi in O occurrens. Hoc igitur elementum $pqrs$ per hypotheſin ſecundum directionem pO ſollicitatur a vi areae huius ipſius elementi proportionali quae ergo vis commodiſſime

diſſime exhibetur pondere columnae cuiusdam materialis normaliter iſti elemento inſiſtentis, et cuius altitudo vbique ſit eadem $=p$. Cum iam recta pO normalis ſit ad ſuperficiem erit elementum pq rs ad areolam PQRS$=dxdy$ vt recta pO ad P$p=z$ hincque $pqrs=\frac{pO}{z}dxdy$ ex quo pondus illius columnae aeſtimandum eſt $=p\frac{pO}{z}dxdy$ qua vi elementum $pqrs$ in directione pO vrgetur. Nunc igitur hanc vim ſecundum directiones ternarum coordinatarum reſoluamus, ac pro directione pP quidem vis tota multiplicari debet per $\frac{Pp}{pO}$ vnde vis ſecundum directionem pP ſollicitans prodit $=pdxdy$ vnde cum coordinatas inter ſe permutare liceat, vis qua idem elementum ſecundum directionem AM vrgetur, erit $=pdydz$ et ſecundum directionem MP$=pdxdz$. Cum harum trium virium ſimilis ſit ratio ſufficit vnam conſideraſſe, quae ſit vis $pdxdy$ qua elementum $pqrs$ in directione pP ſollicitatur: vbi obſeruetur, cum corpus vndique ſit terminatum, rectas pP, qQ, Rr, Ss productas denuo ſuperficiem alicubi traiicere eiusque elementum abſcindere debere, quod cum pari vi vrgeatur ſecundum eandem directionem Pp ſed contrariam, hae vires ſibi aequales et contrariae ſe mutuo deſtruent. Simili modo pro viribus $pdydz$ et $pdxdz$ quibus elementum $pqrs$ ſecundum directiones AM et MP vrgetur, dabuntur alia ſuperficiei elementa, quae vires his aequales et directe contrarias ſuſtinent: quod cum in

omnibus elementis eueniat, perſpicuum eſt omnes omnino vires iunctim conſideratas ſe mutuo perfecte deſtruere, et in aequilibrio continere.

Coroll. 1.

32. Duo hic caſus occurrunt, prout vires iſtae aequales vel extrinſecus ſuperficiem introrſum vrgendo agunt, vel intrinſecus ſuperficiem extrorſum diſtendendo, vtroque autem caſu omnes vires iunctim ſumtae in aequilibrio verſantur.

Coroll. 2.

33. Neque ergo ab huiusmodi viribus corpus ad motum cietur ſiue id ſit ſolidum ſiue fluidum, dummodo iis ſuſtinendis par ſit, ſcilicet ſi vires introrſum vrgeant, corpus in minus volumen coarctare, ſin autem extrorſum pellant, in maius diſtendere conantur. Quare dum corpus huic actioni ſufficienter reſiſtat nullus plane effectus ab huiusmodi viribus producetur.

Coroll. 3.

34. Si igitur corpus per totam ſuperficiem ab huiusmodi viribus aequalibus normaliter vrgeatur, ſiue extrorſum ſiue introrſum, nulla vi externa opus eſt, qua id in ſtatu ſuo contineatur, ſed ſponte in quiete perſeuerabit.

Theo-

Theorema.

35. Dum preſſio qua fluidum extrinſecus vrgetur, per totam eius maſſam aequaliter diffunditur, tam omnes fluidi partes, quam vas in quo continetur, in aequilibrio conſiſtunt.

Demonſtratio.

Quoniam per naturam fluiditatis preſſio fluidum vrgens aequaliter per totam eius maſſam diffunditur, latera vaſis in quo continetur vbique eiusmodi vires aequales ſuſtinent quales in lemmate praemiſſo ſumus contemplati, ita vt quoduis elementum ſuſtineat vim ipſi proportionalem, quae commodiſſime per altitudinem certae columnae indicatur, quippe cuius pondus eam vim exhibere cenſendum eſt. Quare cum latera vaſis ab his viribus normaliter extrorſum vrgeantur, ea ſe mutuo deſtruent, et vaſi ab illis nulla mutatio inducetur, dummodo diſtenſioni ſufficienter reſiſtat. Deinde cum etiam ſingulae fluidi particulae a paribus viribus quaquauerſus comprimantur, in aequilibrio pariter erunt conſtitutae, dummodo vlteriori compreſſioni reſiſtant, quod euenit ſi ſingulae partes eam habeant denſitatem eumque caloris gradum, cui eadem preſſio conueniat. At ſi fluidum aquae ſit ſimile, ne hac quidem conditione eſt opus, cum in omni ſtatu etiam maximas vires ſuſtinere valeat.

Coroll.

Coroll. 1.

36. Corpus ergo etiam huic fluido immerſum, quia vndique a ſimilibus viribus comprimitur, erit in aequilibrio, neque ad vllum motum ab his preſſionibus concitabitur. Perindeque hic eſt, ſiue hoc corpus fuerit denſius ſiue rarius quam fluidum.

Coroll. 2.

37. Dum fluidum in vaſe contentum ope emboli vrgetur, et preſſio eadem per totum fluidum diffunditur, vires a fluido ipſo exercitae ſe in aequilibrio ſuſtinent: vas autem a vi embolum vrgente perinde ac corpus ſolidum ſollicitatur, et cum fluido incluſo promoueretur, niſi vi contraria ſuſtentaretur.

Scholion 1.

38. Cum de ipſo vaſe, in quo fluidum continetur, quaeſtio eſt, eae vires quas a fluido incluſo patitur, probe ſunt diſtinguendae ab iis viribus, quae extrinſecus ope emboli in fluidum agunt. Ponamus ope emboli p O fluidum in vaſe ABCDEF contentum vrgeri, et iam in aequilibrio verſari, omnes ergo fluidi partes tam inter ſe quam in latera vaſis agent viribus aequalibus, quas vt vidimus certa altitudine $= p$ repraeſentare licet, ac per lemma patet ſingulas fluidi partes vtpote quaquaverſus aequaliter preſſas in aequilibrio contineri, neque

Tab. V. Fig. 2.

que in iis vllum motum inteſtinum generari. Quatenus porro latera vaſis ab iisdem viribus extrorſum pelluntur, quoniam hae vires ſe mutuo deſtruunt, catenus etiam ipſum vas in aequilibrio ſeruatur. Verum praeter has vires, vas etiam ſuſtinet vim qua embolus vrgetur, idque perinde ac ſi cum fluido vnum corpus ſolidum conſtitueret; ne igitur ab hac vi ad motum concitetur, vi contraria et aequali opus eſt, vt totum vas cum fluido in quiete retineatur. Sin autem embolus vaſi affigatur, et iam vis externa tollatur, fluidum quidem in eodem ſtatu perſeuerabit, ſed vas nullam vim extrinſecus ſuſtinens per ſe in aequilibrio erit conſtitutum.

Scholion 2.

39. Quoniam in hoc capite fluida neque gravitati neque aliis ſimilibus viribus ſubiecta aſſumimus, quae actione ſua corpora quaſi penetrant, ſed tantum vires extrinſecus in fluida agentes contemplamus, veluti embolorum ope, quarum actio in certam tantum ſuperficiei partem exeritur, haec duo virium genera ſollicite a ſe inuicem diſtinguere conuenit, quarum illas grauitati ſimiles vires, internas appellare licet, quoniam ſaltem ſingulis particulis inſitae videntur, etiamſi earum cauſa extrinſecus ſit quaerenda: hae autem vires embolorum ope vrgentes merito externas vocamus. Hoc igitur capite in ſtatum aequilibrii fluidorum inquirimus, quando a nullis viribus internis ſollicitantur; vbi inprimis

notandum eſt, remotis his viribus internis, idcirco preſſiones internas, quae a viribus externis per totam fluidi maſſam diffunduntur, minime tolli, ideoque cum viribus internis minime confundi oportere. Quam confuſionem feliciſſime euitabimus, ſi vti inſtituimus, iſtas preſſiones in calculo per altitudines exhibemus, dum vires internas veras grauitati ſimiles more in mechanica recepto exprimimus. Quaecunque ſcilicet preſſio in fluido reperiatur, qua omnes partes tam ſe mutuo vrgent, quam in latera vaſis agunt, ea conueniente ſime certa quadam altitudine $= p$ indicatur, vbi quidem certa quaedam materia vniformis grauis aſſumitur ex qua ſi formetur columna cylindrica illius altitudinis aequalis p, cuius baſis ſit aequalis ipſi ſuperficiei preſſionem ſuſtinenti, tum huius columnae pondus preſſionem ſit relaturum. Huius materiae, ex qua iſtas columnas formamus, denſitatem vnitate conſtanter denotabimus, ita vt earum ſolid tas ſimul pondus preſſionem referens ſit exhibitura, dum cuiusque alius materiae pondus ex volumine in denſitatem multiplicato aeſtimatur. Quando enim etiam grauitatem a fluido excludimus, tamen nihil impedit, quo minus in preſſione definienda grauitatem in ſubſidium vocemus.

Scholion 3.

40. Quodſi fluidum etiam a nullis viribus externis vrgetur, ita vt eius partes nullam plane pres-

preſſionem in ſe mutuo exerceant, tum huiusmodi fluidi maſſa quaecunque, quomodocunque eius partes inter ſe fuerint diſpoſitae, ſemper erit in aequilibrio, neque opus eſt, ad fluidum in quiete continendum, vt id vaſi cuipiam ſit incluſum. Hoc ergo caſu preſſio atque adeo altitudo preſſionem metiens vbique erit nulla, etiamſi enim aliquod vas fluidum ambiret, eius tamen latera nullam ab eo vim ſuſtentarent, perinde foret, ac ſi vas plane abeſſet, hocque valet, ſiue fluidum fuerit homogeneum ſiue heterogeneum ſiue compreſſionis capax ſiue ſecus. Si fluidum inſtar aquae nullam compreſſionem patiatur, ſingulae partes naturalem ſuam habebunt denſitatem, quae ſcilicet cuique pro ratione caloris conuenit: ſin autem fluidum veluti aër compreſſionis ſit capax, tum quia nullae vires comprimentes adſunt, quaelibet pars ſe ad minimam ſuam denſitatem componet, quae cum etiam a calore pendere poſſit, ſimul huius ratio eſt habenda, ita vt hoc aequilibrii caſu in ſingulis partibus denſitas ſit minima, ſeu volumen, in quod ſe pro gradu caloris expandere poſſunt, maximum: quare quo hoc fieri poſſit, vaſis fluidum continentis ideam plane remouemus. At ſi fluidum a viribus externis vrgeri ſumamus, id neceſſario vaſe incluſum concipi debet, cuius latera eius preſſionem ſuſtineant et diffuſionem coerceant: hunc ergo caſum prout fluidum compreſſionis vel ſit capax vel ſecus, accuratius euoluamus.

Problema 1.

41. Si fluidum nullius compreſſionis capax in vaſe a vi quacunque ope emboli vrgeatur, definire preſſionem, per totam fluidi maſſam diffuſam, ſeu altitudinem, qua haec preſſio repraeſentatur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 1. Sit baſis emboli O, qua fluidum normaliter premitur $=ff$ vis autem embolum trudens aequetur ponderi P, quandoquidem omnes vires diſtinctiſſime per pondera exhibentur. Introducetur iam materia quaedam homogenea, cuius denſitas ſit cognita, et vnitate expreſſa, huius quaeratur maſſa, quae grauitati expoſita idem eſſet habitura pondus P huic autem maſſae tribuatur figura columnae cylindricae ſeu prismaticae, cuius baſis ſit $=ff$, atque altitudo ponatur $=p$, ita vt volumen columnae prodeat $=ffp$ ob denſitatem $=1$ ſimul pro maſſa ideoque et pondere habendum, quod ergo illius ponderis P loco adhibeatur. Quoniam igitur quantacunque fuerit emboli baſis ff, fluidi preſſio ſemper eſt eadem, modo altitudo illa p fuerit eadem, haec ipſa altitudo p conuenientiſſime pro menſura preſſionis aſſumitur? eaque cognita quantitas preſſionis facillime cognoſcitur. Ac primo quidem ſi quaeratur quanta vi latera vaſis vbique premantur, ea in elementa minima diuiſa concipi conuenit, quoniam preſſio in ſingula normaliter agit; ſi enim maior portio

portio conſideraretur a pluribus diſcrepans, diuerſitas directionis hanc determinationem turbaret. Sit igitur in vaſis cauitate interna $c\,d$ eiusmodi ſpatiolum, quod pro plano haberi queat, eiusque areola $= k\,k$: atque preſſio, quam id ſuſtinet, aequabitur ei ponderi, quod eſſet habitura maſſa illius materiae homogeneae denſitate $= 1$ praeditae, cuius volumen foret $= k\,k\,p$; tantaque vi iſtud ſpatiolum $c\,d$ ſecundum directionem $m\,r$ in id normalem premetur. Hinc ergo omnes vires, quas vaſis parietes a fluido ſuſtinent, clariſſime agnoſcuntur. Pares autem vires etiam omnes fluidi partes $f\,g\,h$ a circumfluo vndiquaque ſuſtinent, neque tamen de ſtatu ſuo naturali deturbantur quia nullius compreſſionis ſunt capaces, atque vires ipſae vt vidimus ſe mutuo in aequilibrio tenent. Quin etiam corpus ſolidum huic fluido immerſum easdem vires eſſet experturum, ac propterea etiam in quiete perſeueraturum. Tum vero aequilibrium aeque locum habebit, ſiue fluidum fuerit homogeneum ſiue heterogeneum, ſingulae enim partes ſuam quaeque conſeruabunt denſitatem naturalem, quae cuique cum ratione indolis tum caloris eſt propria.

Coroll. 1.

42. Quodſi ergo in eodem vaſe diuerſa fluida veluti aqua, ſpiritus vini, et mercurius, vtcunque fuerint permixta, omnes partes non obſtante preſſione emboli in perfecto erunt aequilibrio, neque

vlla adeſt cauſa, quae ſingula in vnum locum congregare nitatur.

Coroll. 2.

43. Talia ergo diuerſa fluida eam mixtionis rationem, quae ipſis ſemel fuerit inducta perpetuo conſeruabunt, neque in lateribus vaſis vllum diſcrimen reperietur, quippe quae ſiue a ſpiritu, ſiue ab aqua, ſiue a mercurio tangantur, paribus viribus ſollicitabuntur.

Coroll. 3.

44. Quin etiam ſi in vaſe tantum aqua contineatur, eaque vero in aliis locis alio caloris gradu fuerit praedita, quaeuis portio denſitatem ſuo caloris gradui propriam habebit: neque ob preſſiones internas vlla mutatio in permixtione exorietur. Si enim per communicationem mutuam mox omnis aqua ad eundem calorem reducitur, id ob aliam contingit rationem phyſicam ad quam hic non attendimus.

Scholion.

45. Quando experientia oſtendit in tali diuerſorum fluidorum permixtione denſiora fundum petere, rariora vero ſurſum pelli hoc manifeſto a grauitate proficiſcitur, quae in denſioribus maior eſt, in rarioribus minor. Hic autem omnes cogitationes a grauitate aliisque ſimilibus viribus internis abſtrahimus,

himus, vnde etiam illi effectui nullus locus conceditur. Plurimum autem intereſt noſſe, remota gravitate omnem variorum fluidorum permixtionem aeque ſubſiſtere poſſe, neque etiam preſſiones externas vllam mutationem efficere valere: ne eos effectus, quos grauitate admiſſa euenire videmus alii cuipiam cauſae adſcribamus. Simili modo corporum huiusmodi fluidis immerſorum ratio eſt comparata, quae ſiue ſint denſiora ſiue rariora fluida in eodem perpetuo loco perſeuerant, neque a viribus vndique aequaliter prementibus vllam impulſionem ad motum recipiunt. Id tantum euenire poteſt, vt ſi tale corpus fuerit lagena vitrea caua, ac preſſiones eius robur ſuperent, ea diffringatur ſicque eius particulae ad motum introrſum concitentur, iſte vero effectus neutiquam ad praeſens inſtitutum eſt referendus; aeque parum ac ille, quo fluidum in variis locis vario calore praeditum per communicationem mox ad eundem caloris gradum redigi videmus, qui effectus non tam preſſioni internae quam alii cauſae phyſicae adſcribi debet, etſi negare nolim eum ab maiorem preſſionem mutuam accelerari poſſe. Tum vero hic inprimis tota moles ſpectari poteſt, quae ſi fuerit ſatis vaſta, vtique euenire poteſt, vt gradus caloris in variis regionibus maxime diſcrepet, et diutiſſime ſine alteratione conſeruetur.

Pro-

Problema 2.

46. Si fluidum compreſſionis capax in vaſe contentum a vi quacunque ope emboli comprimatur, praeter preſſionem definire denſitatem in ſingulis locis, cum id fuerit in ſtatum aequilibrii redactum.

Solutio.

Tab. V. Fig. 2. Fluidum ergo aëri ſimile in vaſe ABCD EF contineri aſſumimus, quod a data vi, quae pondere $= P$ exhibeatur, embolum pO vrgente eousque iam ſit redactum, vt in aequilibrio conſiſtat. Quod cum euenerit preſſio perinde ſe habebit, ac praecedente caſu, quia natura fluidi hic nullam diuerſitatem parit, ad eam ergo definiendam ſit baſis emboli $O = ff$ et quaeratur columna eiusdem baſis ff et altitudinis $= p$ quae ex materia illa vniformi denſitatis $= 1$ conſtans habitura eſſet pondus $= P$ atque haec altitudo p tam in ipſa fluidi maſſa quam in vaſis lateribus vbique preſſionem menſurabit, prorſus vt in praecedente problemate oſtendimus. Quod autem nunc ad denſitatem fluidi in ſingulis punctis attinet, videndum eſt vtrum vbique idem caloris gradus verſetur nec ne? Vtrumuis igitur contigerit, ponamus in Q gradum caloris eſſe $= r$ et quia fluidi natura certam ſupponit legem, ſecundum quam preſſio tam a denſitate quam calore pendet, ob datam hic preſſionem $= p$, ex ea lege, quomodocunque fuerit comparata, determinabitur denſi-

denſitas fluidi in hoc loco Q, quod ſi in omnibus punctis fiat, per totam fluidi maſſam iam innoteſcet denſitas ſiue ea fuerit vbique conſtans ſiue variabilis: neque hic refert, vtrum tota maſſa ſit fluidum eiusdem generis nec ne?

Coroll. 1.

47. Ad aequilibrium igitur producendum embolum eousque adigi oportet, donec ob auctam denſitatem, preſſio interna aequalis fiat vi embolum vrgenti, quae aequalitas ex altitudine p eſt aeſtimanda.

Coroll. 2.

48. Si embolus tum vaſi affigatur, vt fluidum in vaſe vndique clauſo contineatur, omnia in eodem ſtatu manebunt, preſſio ſcilicet vbique erit eadem, altitudine $= p$ agnoſcenda, et ex hac preſſione et calore in ſingulis punctis Q denſitas agnoſcetur.

Coroll. 3.

49. Viciſſim ergo quoque ſi huiusmodi fluidum in vaſe clauſo contineatur preſſio per totum vas erit eadem, ideoque ex cognita denſitate et calore in quouis loco cognoſcetur. Simul ergo intelligitur, quanta vi P embolo applicanda, opus foret, ad fluidum in hunc ſtatum compellendum.

Scholion 1.

50. Ex cognita denſitate in ſingulis punctis maſſa totius fluidi definiri poteſt, tota enim maſſa in elementa infinite parua diuiſa, cuiusque volumen multiplicetur per denſitatem, et huius formulae integrale per totum fluidum extenſum dabit maſſam fluidi, ſimulque pondus quod ob grauitatem eſſet habiturum. Quod cum inertiae ſit proportionale, in motus determinatione potiſſimum erit conſiderandum, quia hic autem adhuc circa aequilibrium verſamur, maſſae et inertiae conſideratio nondum in computum venit. Hic tantum monuiſſe ſufficit, quomodocunque eadem fluidi maſſa a viribus externis in maius minusue volumen redigatur, inertiam ſeu materiae quantitatem perpetuo eandem manere: neque etiam ob auctum minutumue calorem vllam alterationem pati.

Scholion 2.

51. Stabilita preſſionis menſura quae ad noſtrum inſtitutum maxime eſt accommodata, eadem ſuppeditat nobis idoneam rationem denſitatem cuiusque fluidi metiendi. Cum enim illa menſura ſit petita a materia quadam homogenea, cuius denſitatem vt cognitam ſpectamus et vnitate deſignamus, cuiuscunque alius fluidi denſitatem certo numero exprimi oportet, qui ſcilicet ſit ad vnitatem vt haec denſitas ad illam: ac ſi fluidi denſitas non vbique

que sit eadem, pro quolibet loco numero variabili, qui sit q eam denotari conueniet. Quod autem ad calorem attinet, cuius ratio etiam est habenda, nulla certa mensura eius adhuc est cognita, vnde definire liceat, quando alius calor alio sit duplo maior, thermometra enim nihil aliud declarant, nisi alium caloris gradum alio vel esse maiorem vel minorem. Liberum ergo nobis est, modo quocunque varios caloris gradus metiendi vti; vnde pro aëre hic modus videtur maxime idoneus, vt si pro densitate data $q = b$ et certo calore $r = c$ pressio fuerit $p = a$, tum is calor duplus $r = 2c$ censeatur, qui pro eadem densitate aëri pressionem duplam $p = 2a$ inducat, vnde manente densitate $q = b$ pro quocunque calore r pressio erit $p = \frac{ar}{b}$: sicque vicissim ex pressione p gradus caloris r colligi potest. Cum deinde praeterea pro eodem calore pressio sit densitati proportionalis, siquidem densitas ab vtroque limite extremo multum distet, pro aëre hac formula generali $p = \frac{aqr}{bc}$ vti licebit. Generatim ergo erit calor directe vt pressio seu elasticitas aëris, ac reciproce vt eius densitas: quorum elementorum illud ex barometro, hoc vero ex thermometro aëreo cognoscitur. Pro aqua autem productum qr videtur esse quantitas constans.

CAPVT III.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITATORVM IN GENERE.

Problema 3.

52. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque sollicitetur inuestigare conditiones sub quibus fluidum in aequilibrio consistere possit.

Solutio.

Tab. VI. Fig. 6. Consideretur fluidi particula elementaris quaecunque sub figura parallelepipedi $klmn\varkappa\lambda\mu\nu$ ad ternas coordinatas inter se normales relata, quae sint $AS = x$ $SK = y$ et $Kk = z$, ita vt parallelepipedum ex harum differentialibus sit formatum, ideoque eius volumen $= dx\,dy\,dz$. Statuatur densitas fluidi in puncto $k = q$ posita semper densitate eius materiae, qua ad pressiones definiendas vtimur $= 1$, eritque massa totius elementi $= q\,dx\,dy\,dz$, quae simul si id esset gravitati expositum, eius pondus exprimeret. Iam a quibuscunque viribus hoc elementum sollicitetur, eas semper secundum directiones ternarum coordinatarum seu axes principales AP, AQ, et AR, inter se normales resoluere licet,

cet, sintque hae tres vires in puncto k sollicitantes secundum $kl = P$, secundum $km = Q$ et secundum $kn = R$ quae vires acceleratrices intelligantur, posita grauitatis vi acceleratrice $= 1$ hinc nostrum elementum pro ratione massae $qdxdydz$ ab his viribus acceleratricibus animatum sollicitabitur his tribus viribus motricibus sec. AP vi $= Pqdxdydz$ sec. AQ vi $= Qqdxdydz$ sec. AR vi $= Rqdxdydz$ vbi litterae P. Q. R numeros denotant vt functiones ternarum variabilium x, y, z spectandos. Cum autem fluidum in aequilibrio consistat, necesse est vt harum virium actio a pressionibus idem elementum vndequaque vrgentibus coerceatur. Hunc in finem sit altitudo pressionem in puncto k exhibens $= p$ quae cum pariter vt functio ternarum variabilium x, y et z considerari debeat, statuamus eius differentiale

$$dp = L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

ita vt sit more signandi recepto

$$L = \left(\frac{dp}{dx}\right) \quad M = \left(\frac{dp}{dy}\right) \quad N = \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Perpendantur iam pressiones, quas singulae hedrae nostri parallelepipedi ab his viribus sustinent, ac primo quidem patet pressiones hedrae $lm\lambda\nu$ superare pressiones hedrae $kmn\mu$ in singulis punctis particula $= L\,dx$ quare cum vtriusque harum hedrarum area sit $= dydz$ elementum nostrum secundum directionem PA vrgebitur vi $= L\,dx\,dy\,dz$. Deinde pressiones hedrae $mn\mu\nu$ excedunt pressiones

hedrae $klx\lambda$ in singulis punctis particula $= M\,dy$ vnde elementum secundum directionem QA vrgetur vi $M\,dx\,dy\,dz$: ac tandem simili modo reperitur elementum nostrum secundum directionem RA vrgeri vi $= N\,dx\,dy\,dz$. Cum nunc hae vires illas, quae ex viribus sollicitantibus nascuntur, continere in aequilibrio debeant, quia directiones sunt contrariae necesse est sit

$$L = Pq, \quad M = Qq \quad \text{et} \quad N = Rq.$$

Quare ex viribus sollicitantibus pressio fluidi in puncto k ita definitur, vt sit

$$dp = q(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Denique vero si gradus caloris in puncto k littera r designetur, quem vt cognitum spectare licet, dabitur quoque relatio inter litteras p, q, r ex natura fluidi, ex qua densitas q per p et r determinetur; si ergo haec conditio cum illa aequatione differentiali coniungatur, ex viribus sollicitantibus, quae in singulis punctis agunt vna cum gradu caloris r colligi poterit pressio fluidi p in singulis locis, indeque porro densitas q, vt fluidum in aequilibrio consistere possit.

Coroll. 1.

53. Si vires sollicitantes euanescant vt sit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, fit $dp = 0$ ideoque p quantitas constans, tum scilicet pressio vbique per totam fluidi

fluidi maſſam eadem eſſe debet, vt aequilibrium locum habere poſſit, prorſus vti in capite praecedente oſtendimus.

Coroll. 2.

54. Ob vires autem ſollicitantes preſſio per fluidi maſſam fit variabilis, eiusque variabilitas cum ab his viribus tum a gradu caloris pendet, ſiquidem denſitas q per preſſionem p et calorem r determinatur. Euenire ergo poterit, vt preſſio alicubi euaneſcat, vel adeo negatiua euadat.

Coroll. 3.

55. Aequilibrium ergo locum habere nequit, niſi aequatio $dp = q(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz)$ ſit poſſibilis: quod cum non niſi ſub certis conditionibus eueniat ob plures variabiles, euidens eſt infinitos dari caſus, quibus aequilibrium ne locum quidem habere poſſit, quos ergo caſus in poſterum ſollicite perſcrutari conueniet.

Scholion 1.

56. Fluidum hic nusquam terminari aſſumſi, quoniam conditio vaſis id continentis nihil ad determinationem preſſionis confert, ſed tantum impedit, ne fluidum diffluat. Pro lubitu ergo fluidum limitibus circumſcribere licet, idque conſiderare, quaſi vaſi eſſet incluſum, tum vero ex ſtatu aequilibrii hic definito patebit, quantam preſſionem latera

ra vasis in singulis punctis a fluido sustineant, vnde viciſſim colligere licebit quanta firmitate vas praeditum esse oporteat, vt his pressionibus resistere, fluidumque coercere valeat. Imprimis autem hic inaequalitas pressionum spectari debebit, vt vbi latera vasis maximas vires sustineant, innotescat. Sin autem eueniat, vt alicubi pressio prorsus euanescat, ibi plane non opus est fluidum coerceri, sed sponte in statu suo perseuerabit, etiamsi ibi vas omnino apertum relinquatur. In hac regione fluidum dicitur ad libellam compositum, eiusque superficies vt extrema spectatur, quia etiamsi quicquam fluidi vltra eam existeret, id ob defectum pressionis non cohaereret, et quasi plane abesset, considerari posset. Extrema ergo cuiusque massae fluidae superficies est ea, vbi pressio euanescit, et status aequilibrii sponte conseruatur, vt ibi vase non opus sit ad diffluxum coercendum. Sin autem vasi alicubi apertura tribuatur, hinc patet quanta vi ope emboli haec apertura obstrui debeat ne ibi fluidum effluat, quae vis vtique euanescit, si apertura in extremam fluidi superficiem cadat. Quando fluidum a sola grauitate animatur, haec extrema superficies simul est suprema, ad libellam composita, quod idem euenit si vires sollicitantes ad punctum fixum conuergant, quo casu superficies suprema fit sphaerica.

Scho-

Scholion 2.

57. Quomodo autem preſſio ſeu altitudo eam metiens p in ſtatu aequilibrii fieri poſſit negatiua, difficulter perſpicitur. Cum enim preſſio poſitiua particulas fluidi ita afficiat, vt ſe mutuo penetrare conentur, iſteque effectus tam ob impenetrabilitatem quam ob difficultatem eas in anguſtius ſpatium comprimendi irritus reddatur, negatiua preſſio in hoc conſiſtet, vt fluidi particulae quaſi ſe mutuo repellant: quoniam autem niſi fluidum vaſi ſit incluſum, nihil impedit, quo minus partes a ſe inuicem recedant, continuitas mox diſſoluetur, neque ergo aliter aequilibrium adeſſe poteſt, niſi quatenus ſingulae particulae ab omni nexu ſolutae ſeorſim quieſcant. Hic autem caſus non amplius ad mechanicam fluidorum eſt referendus, quia ſingulae guttulae tanquam corpuſcula ſolida tractari debent. In vaſe autem fluidum continente preſſio negatiua multo minus locum habere poteſt, cum fieri nequeat, vt latera a fluido introrſum premantur. Ex quo ſtatuendum eſt, quoties calculus preſſionem declarat negatiuam, toties fluidi continuitatem tolli, idque quaſi in guttas ſeparatas diſpergi, vt eius conſideratio non amplius ad praeſens inſtitutum ſit referenda: cuius quippe principia huic innituntur fundamento, vt fluidi partes continuae maneant. Hoc autem non ſolum de aequilibrio ſed etiam de motu fluidorum eſt tenendum, nusquam preſſionem fieri

posse negatiuam, quin simul continuitas tollatur. Ac si in motu aquae per tubos, ab auctoribus interdum pressio negatiua fieri asseritur, id ita est accipiendum, eam tantum fieri minorem pressione atmosphaerae, ideoque adhuc esse positiuam. Statim autem ac reuera fit negatiua, dispersio in guttas obseruatur, vti videmus in fontibus salientibus, qui postquam summitatem attigerunt, in guttas dispersuntur: ibi igitur pressio negatiua fieri est censenda.

Scholion 3.

58. Circa ipsas porro vires sollicitantes, vnde ternas vires P, Q et R elicuimus, omnino tenendum est, eas neutiquam ad libitum fingi licere, sed ita assumi debere, vti in mundo reuera existunt. Primo ergo occurrit grauitas, quae nisi fluidum, quod consideratur, maximum volumen occupet, quantitatem et directionem constantem habere est censenda, sin autem fluidum maiorem habeat expansionem grauitatis directiones conuergere sunt statuendae, veluti quando totum mare vel atmosphaera aërea examini subiicitur. Deinde etiam attractio vniuersalis, qua non solum corpora coelestia, sed etiam eorum partes se mutuo attrahere deprehenduntur plurimas vires reales suppeditat, quarum actioni fluida subiiciuntur. Hae autem vires omnes hac insigni gaudent proprietate, vt ex iis formula differentialis $Pdx+Qdy+Rdz$ semper euadat verum

rum differentiale cuiuspiam functionis variabilium x y et z ideoque sit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx}) : (\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$ et $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$ atque huius functionis indoles eo magis est notatu digna, quod ea in principio minimae actionis ab Ill. Praeside de *Maupertuis* inuento ipsam quantitatem actionis exprimat. Quod si ergo haec quantitas actionis designetur littera V, vt sit $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ habebimus $dp = qdV$, et quia q per p et r determinatur, intelligitur, nisi quantitas r ita sit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, aequilibrium plane locum habere non posse, sin autem vires P, Q, R pro lubitu fingere liceret, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem respueret, tum fluidum aequilibrii plane non foret capax, nisi forte in calore eiusmodi variatio statui posset, qua aequatio inuenta fieret integrabilis. Cum igitur huiusmodi casibus aequilibrium nullum plane locum habere posset, fluida perpetuo motu agitari necesse foret.

Problema 4.

59. Si fluidum a viribus quibuscunque sollicitatum in aequilibrio consistat, eique corpus quodcunque solidum sit immersum, inuestigare vires, quas hoc corpus a pressione fluidi ambientis sustinet.

Solutio.

Sit B C D E id corpus solidum, quod ei fluido, cuius statum aequilibrii modo definiuimus, sit Tab. VI. Fig. 7.

immerſum, ab eoque circumquaque eas ſuſtineat preſſiones, quas ibidem inuenimus. Ad eas autem euoluendas primum obſeruo hoc corpus easdem pati preſſiones, quas ſuſtineret ea fluidi maſſa, cuius nunc locum corpus obtinet: quo circa in locum corporis mente ſubſtituamus aequale fluidi volumen, quod cum futurum eſſet in aequilibrio, neceſſe eſt, vt preſſiones quas a fluido ambiente ſuſtinet, aequales ſint et contrariae actioni virium P, Q, R idem volumen ſollicitantium. Probe autem hic eſt animaduertendum iſti volumini loco corporis ſubſtituto in ſingulis punctis eam denſitatem tribui oportere, quam aequilibrii conditio ante definita poſtulat, ex quo forte neceſſe eſt vt etiam caloris ratio habeatur. Definito autem effectu, quem hae vires P, Q, R in iſto volumine producunt, ei aequalis erit et contrarius is effectus quem corpus ſolidum propoſitum a preſſionibus fluidi ambientis ſuſtinet.

Coroll. 1.

60. Cognitio ergo ſola virium, quibus fluidum ſollicitatur, non ſufficit ad vim, quam corpus immerſum ſuſtentat, definiendam, ſed inſuper noſſe oportet pro eo loco quem corpus occupat, quamnam ibi fluidum habiturum eſſet denſitatem in ſingulis punctis.

Coroll. 2.

61. Hinc in eodem fluido, prout corpus in alio atque alio loco conſtituitur preſſiones id maxime

me diſcrepantes ſuſtinere poteſt, hocque non ſolum ob variationem virium ſollicitantium, ſed etiam ob variationem denſitatis quae fluido in diuerſis locis ineſt: etiamſi in loco, quem iam corpus occupat, nullum adſit fluidum, ac fortaſſe denſitas huic loco conueniens nusquam alibi in fluido reperiatur.

Coroll. 3.

62. Deinde etiam plurimum intereſt, cuiusmodi ſitum idem corpus in fluido teneat: fieri enim poteſt vt idem corpus ſi tantillum inuertatur longe alias preſſiones ſuſtineat. Quamobrem non ſolum volumen corporis ſed etiam figura cum ſitu plurimum conferunt ad vim, quam ſuſtinet definiendam: niſi forte fluidum ſit homogeneum et graue, quo caſu haec vis a ſolo volumine pendet.

Scholion 1.

63. Hoc ergo caſu facillimo excepto, determinatio virium, quas corpus ſubmerſum ſuſtinet, calculos ſaepe vehementer moleſtos poſtulat, quoniam omnia elementa fluidi intra volumen corporis concipiendi conſiderare oportet. Ita ſi parallelepipedum elementare $klmn\varkappa\lambda\mu\nu$ in loco corporis fuerit, Tab. VI Fig. 6. cuius maſſa eſt $= qdxdydz$, ſingulae hae formulae differentiales $Pqdxdydz$, $Qqdxdydz$ et $Rqdxdydz$ ope triplicis integrationis per totum corporis volumen extendi debent, cuius figura ſi fuerit irregula-

gularis, haec inueſtigatio valde fit difficilis, neque in genere pro viribus quibuscunque P, Q, R quicquam definire licet. Totum ergo hoc negotium in ſequentes tractationes eſt reſeruandum, vbi praecipuos virium ſollicitantium caſus, qui quidem in mundo locum habent, accuratius euoluemus: hic vero ſufficiat, methodos quicque praeſtandi in genere ſaltem indicaſſe.

Scholion 2.

64. Alia autem ſtatim ſe offert methodus directa hoc idem problema ſoluendi, dum preſſiones, quas corpus in ſingulis ſuperficiei ſuae elementis ſuſtinet, perpenduntur, eaeque ſecundum ternas directiones fixas reſolutae per totam ſuperficiem in vnam ſummam colliguntur. Verum hic antea aequationem differentialem pro preſſione p inuentam integrari neceſſe eſt, vnde niſi preſſio ſatis ſimpliciter exprimatur haec methodus in calculos inextricabiles praecipitaret. Id tantum hic commodi eueniret, quod dum preſſio p per integrationem definienda conſtantem quandam arbitrariam recipit per circumſtantias fluidi datas definiendam, haec quantitas conſtans in hoc negotio prorſus non in computum ingrediatur, propterea quod preſſiones circumquaque aequales ſe mutuo deſtruunt. Eatenus ergo tantum corpus ſubmerſum a preſſionibus fluidi ad motum impellitur, quatenus hae preſſiones non ſunt aequales: inuenta autem hac vi, qua corpus impellitur,

litur, ſi ea cum reliquis viribus, quae in idem corpus agunt, comparatur, facile iudicare licebit, vtrum corpus ſit in quiete permanſurum, an vero motum impetraturum. Quoniam vero hic tantum de aequilibrio agitur, niſi corpus in fluido ſponte quieſcat, id vi quacunque in hoc ſtatu conſeruari concipiendum eſt, niſi forte quaeſtio de primo tantum momento, quo corpus fluido eſt immiſſum, inſtituatur.

Problema 5.

65. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum fuerit in aequilibrio, eique corpus ſolidum ex parte tantum immergatur, definire vires, quas eius pars ſubmerſa a preſſionibus fluidi ſuſtinet.

Solutio.

Ante omnia notandum eſt hunc caſum locum habere non poſſe, niſi in fluido, in quo datur extrema ſuperficies, in qua preſſio prorſus euaneſcat, quae ergo non indiget vaſe continente quo coerceatur. Sit ergo F C E G haec ſuperficies fluidi extrema ideoque aperta, dum in reliquis locis vaſe quocunque continetur, hicque corpus ſolidum B C D E fluido ita ſit immerſum vt portio C D E ſub fluido verſetur, portio vero C B E promineat; quo poſito qnaeſtio eſt quantas vires hoc corpus a preſſionibus fluidi ſuſtineat. Primum autem obſeruo, ſi portio

Tab. VI. Fig. 8.

portio prominens C B E ſecundum ipſam fluidi ſuperficiem extremam C E reſecetur, partem reliquam etiamnunc easdem preſſiones eſſe ſuſtentaturam, nunc autem haec pars C D E quaſi tota eſſet fluido immerſa conſiderari poterit, dummodo ſtrato fluidi infinite tenui tegi concipiatur, qua conditione ne opus quidem eſt, quia per totam ſuperficiem F C E G preſſio eſt nulla. Hinc per Problema praecedens vis, quam haec pars ſubmerſa ſuſtinet aequalis et contraria eſt illi vi, quam vera fluidi portio hunc locum occupans et cum reliquo fluido aequilibrium ſeruans a viribus ſollicitantibus P, Q et R ſuſtineret. Mente ergo ſpatium C D E fluido repleatur, cuius denſitas in ſingulis punctis, ad aequilibrium requiſita per ſuperiora patebit, et virium P, Q et R ſollicitatio in hanc maſſam exquiratur; quae in contrarium verſa dabit vim quaeſitam, a corporis ſolidi parte ſubmerſa ſuſtentatam.

Coroll. 1.

66. Si haec vis inuenta ab iis, quibus corpus ſolidum per ſe ſollicitatur perfecte deſtruatur, id ſponte in hoc ſtatu perſeuerabit, et fluido inſidebit, ſin ſecus eueniat corpus vel maius vel minus immergetur, vel conuertetur, niſi a noua vi aequilibrium conſeruetur.

Coroll. 2.

67. Inuentio ergo iſtius vis eodem modo inſtitui debet, vti in praecedente problemate oſtendimus:

mus: praeter volumen ſcilicet partis ſubmerſae eius quoque figuram noſſe oportet, tum vero potiſſimum denſitatem quam fluidum hoc volumen occupans et cum reliqua maſſa in aequilibrio conſiſtens, in ſingulis punctis eſſet habiturum. Quae inueſtigatio ita eſt comparata, vt nonniſi in caſibus particularibus deinceps tractandis ſuſcipi queat.

Scholion.

68. Imprimis autem notandum eſt, non ſemper omnes vires elementares quibus volumen quoddam fluidum a viribus P, Q et R ſollicitatur, ad vnicam vim omnibus aequiualentem reuocari poſſe; ſed quandoque eas vires ad duas, interdum etiam ad tres reduci debere, vt paucioribus non idem effectus obtineri queat. Haec autem virium ſupputatio eodem modo inſtitui debet, quo in corporibus ſolidis a viribus quibuscunque ſollicitatis vti ſolemus, quandoquidem hae vires, poſtquam fuerint inuentae, facta inuerſione ad corpus ſolidum ſunt applicandae. In maſſa ergo fluida, in locum partis ſubmerſae ſubſtituta, primum notetur centrum inertiae, deinde vero etiam per id terni axes inter ſe normales ducti concipiantur, quo facto primum omnes vires ſollicitantes elementares in ipſum centrum inertiae transferantur, earumque vis aequiualens vna quaeratur. Praeterea ſingularum virium elementarium momenta reſpectu ternorum axium colligantur, vt pateat quantum virium momentum

corpus circa ſingulos axes ſuſtineat. Denique eadem illa vis cum his tribus momentis contrario modo corpori ſolido in locum fluidi reſtituto applicetur, ſicque facillime patebit quemnam effectum in eo ſint productura, et quomodo hoc corpus in quiete conſeruari oporteat.

Problema 6.

69. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum ſit in aequilibrio et vaſi cuicunque incluſum, inueſtigare vires, quas totum vas a fluidi preſſione in latera exerta ſuſtinet.

Solutio.

Si omnes preſſiones inter ſe eſſent aequales, vas fluidum continens foret in aequilibrio, neque vlla vi externa opus eſſet ad id continendum: Eatenus ergo tantum vi opus eſt ad vas ſuſtentandum, quatenus preſſiones in eius latera non vbique ſunt aequales. Tum autem ſunt inter ſe inaequales, quando fluidum a viribus, quas hic litteris P, Q, R indicauimus, ſollicitatur vnde leui attentione intelligitur, vas omnes eas vires ſuſtentare, quibus ſingula fluidi elementa a viribus P, Q et R ſollicitantur, ſi enim omnis maſſa fluida ſubito in corpus ſolidum concreſceret, easdemque vires ſuſtineret, eae quaſi in ipſum vas immediate agerent, conſiderari poſſent. Eadem autem veritas per ratiocinium ſupra adhibitum confirmari poteſt; concipiantur latera

tera vaſis tenuiſſima, idque fluido quaſi infinito immerſum ſpectetur, ita vt fluidum externum cum interno in aequilibrio verſetur. Hoc poſito euidens eſt preſſiones, quas vas a fluido externo ſuſtinet, praeciſe aequales et contrarias eſſe iis viribus, quibus a fluido interno vrgetur, et quas hic inueſtigamus. Verum preſſiones externae, quoniam totum vas vt ſolidum corpus fluido immerſum ſpectari poteſt, aequales ſunt et contrariae, viribus quibus fluidum vaſi incluſum actu ſollicitatur; denuo igitur conuerſione facta, et fluido externo penitus remoto, perſpicuum eſt totum vas omnes ſuſtinere vires, quibus fluidum incluſum ſollicitatur.

Coroll. 1.

70. Vas igitur totum perinde vrgetur, ac ſi fluidum vna cum vaſe corpus ſolidum conſtitueret, quod ab iisdem viribus ſollicitaretur. Interim tamen in preſſione quam latera ſuſtinent ingens erit diſcrimen, quia in corpore ſolido preſſiones longe aliter propagantur atque in fluido.

Coroll. 2.

71. Vt ergo non ſolum fluidi aequilibrium, ſed etiam ipſum vas cum fluido in quiete conſeruetur, neceſſe eſt vt vas extrinſecus a viribus idoneis ſuſtentetur; et quantis viribus ad hoc opus ſit ex principiis poſitis determinari oportet.

Scholion.

72. Hic fluidum a vaſe vndequaque includi et compeſci aſſumimus, niſi forte in ea regione, vbi preſſio eſt nulla, vas ſit apertum et fluidi ſuperficies haec extrema nuda appareat. Sin autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intruſi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum ſollicitantes, etiam hanc emboli vim ſuſtinebit, quae cum pro emboli baſi maior minorue eſſe poſſit, diuerſiſſimis viribus idem vas ſubiectum eſſe poteſt. Statim vero atque embolus vaſi affigatur ſeu agglutinetur, hae nouae vires ſubito euaneſcunt, ac vas ſolas priores ſuſtinet.

CAPVT IV.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a ſola grauitate deorſum ſollicitetur quae concipiatur vt vis conſtantis magnitudinis, cuius directiones ſint inter ſe parallelae omnia

omnia momenta ad ſtatum aequilibrii requiſita exponere, et principia ante ſtabilita in genere ad hunc caſum accommodare.

Solutio.

Spectetur planum tabulae vt horizontale, cui ergo directio vis ſollicitantis vbique ſit normalis, quantitatem autem huius vis acceleratricis littera g deſignemus, ipſa grauitate naturali exiſtente $= 1$, vt pateat quomodo phaenomena ſe eſſent habitura, ſi grauitas foret vel maior vel minor. Concipiatur nunc fluidi elementum quodcunque in Z, vnde ad planum horizontale demiſſo perpendiculo Z Y, et ab Y ad rectam fixam A P ducta normali Y X, ſint ternae coordinatae locum puncti Z definientes $AX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$. In Z porro ſit gradus caloris $= r$, denſitas fluidi $= q$, et altitudo preſſionem metiens $= p$, ita vt relatio inter p, q, r per fluidi naturam ſit data. Cum nunc elementum in Z deorſum ſecundum Z Y ſollicitetur vi acceleratrice $= g$, pro ſolutione generali capitis praecedentis hic habebimus $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -g$, vnde aequatio differentialis conditionem aequilibrii exprimens erit $dp = -gqdz$, quae niſi denſitas q ita ſit comparata, vt integratio ſuccedat, aequilibrium omnino locum habere nequit. Dato autem aequilibrio reliqua problemata in cap. praec. tractata facilem ſolutionem admittunt: Si enim corpus ſolidum BCDE fluido ſit ſubmerſum, id ſurſum vrgebitur

Tab. VI. Fig. 9.

Tab. VI. Fig. 7.

tanta vi, quanta fluidi maſſa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio conſiſtens a grauitate g deorſum pelleretur, quae ergo vis huius maſſae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipſo ergo corpore BCDE notetur hoc punctum G quod maſſae fluidae in eius locum ſubſtitutae foret centrum inertiae, toto huius maſſae pondere exiſtente $= G$, et hoc corpus fluido ſubmerſum ſurſum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G tranſibit. Simili modo res ſe habebit ſi tantum portio corporis CDE fluido immergatur, pro quo caſu, quae modo de toto corpore ſunt dicta, hic tantum de parte ſubmerſa ſunt intelligenda.

Tab. VI. Fig. 8.

Si denique fluidum fuerit vaſi incluſum, totum vas inde eandem vim ſuſtinet, ac ſi fluidum in ſolidum concreſceret, pondere ſcilicet totius maſſae fluidae deorſum premetur, cuius directio tranſibit per centrum inertiae totius maſſae fluidae in vaſe contentae.

Coroll. 1.

74. Duo igitur caſus hic ſollicite ſunt diſtinguendi, prout variabilitas denſitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de ſtatu aequilibrii ſunt tradita, vllo modo locum habere poſſunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter preſſionem p denſitatem q et calorem r, denſitas q vt functio ipſarum p et r ſpectari poterit; niſi ergo calor r qui a loco pendere cenſendus eſt, a ſola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc ſequitur aequilibrium tum ſolum exiſtere poſſe, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi maſſam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuerſus, fluidum nullo modo ſe ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere ſum contemplatus, ita vt hae concluſiones tam ad fluida aquae ſimilia, quam quae veluti aër compreſſionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perſpiciatur, vtrumque fluidorum genus ſeorſim euoluemus; in priori quidem diſcrimen probe eſt notandum, prouti fluidum per totam maſſam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem caſus, quo fluidum vbique eadem gaudet denſitate, totam hydroſtaticam vulgarem complectitur. Sin autem ſit heterogeneum, ſiue id fiat permixtione diuerſorum fluidorum, ſiue idem

idem fluidum in diuerſis locis diuerſo caloris gradu fuerit praeditum, hic imprimis quaeſtio euoluenda occurret, quando aequilibrium ſit poſſibile et ſub quibus conditionibus. Altera autem huius capitis pars circa fluida compreſſionis capacia verſabitur, vbi etiam plures caſus tam pro permixtione, plurium huiusmodi fluidorum diuerſorum quam pro variatione caloris expediri conueniet.

Scholion 2.

78. Vbique autem cum ſtatus aequilibrii fuerit definitus, etiam inueſtigabimus, quomodo corpora ſolida ipſis immerſa ſe ſint habitura, vbi imprimis notandum eſt, niſi fluidum ſit homogeneum ſeu vbique eandem habeat denſitatem, regulas vulgares de vi, quam corpora ſubmerſa ſuſtinent, non amplius eſſe veritati conſentaneas. Quodſi enim denſitas fluidi fuerit variabilis pro loci diuerſitate, tum etiam locus, vbi corpus ſolidum fluido immergitur, conſiderari debet: ſiquidem pro eo loco, quem corpus ſolidum in fluido occupat, etiamſi fluidum inde iam ſit expulſum, tamen diligenter perpendi oportet, quantam denſitatem fluidum, mente ſaltem in locum ſolidi ſubſtitutum, in ſingulis punctis eſſet habiturum, id quod ex conditione aequilibrii eſt definiendum. Non ſolum enim tum pondus huius maſſae fluidae quaeri debet, ſed etiam eius centrum inertiae, cuius locus potiſſimum a variatione denſi-

tatis

tatis pendebit. Nisi enim hoc punctum exacte fuerit cognitum, media directio vis, qua solidum a fluido vrgetur, assignari non potest.

APPLICATIO
ad fluida omnis compressionis expertia.

Problema 8.

79. Si fluidum fuerit homogeneum, eiusque densitas q vbique eadem seu constans, statum aequilibrii assignare, et quantas vires tam vas continens quam corpora immersa sustineant, definire.

Solutio.

Cum densitas vbique sit eadem ponatur $q=b$ et solutio superior praebet $dp=-gbdz$, vnde integrando elicimus $p=gb(h-z)$, existente h constante per integrationem ingressa. In eleuatione igitur super plano horizontali, a quo altitudinem z sumsimus, facta ea $z=h$ pressies euanescit, ibique ergo existit extrema fluidi superficies quae propterea etiam est horizontalis. Sit ergo F E G haec suprema superficies ad libellam composita, et C Y D planum horizontale pro basi assumtum, vt illius eleuatio sit E Y $=h$ atque in altitudine quacunque minore Y Z $=z$, pressio erit $p=gb(h-z)=gb.$ E Z. In eadem ergo altitudine Y Z pressio vbique est eadem, Tab. VI. Fig. 10.

et profunditati E Z infra ſupremam ſuperficiem F G proportionalis, praeterea vero ſequitur rationem grauitatis g et denſitatem fluidi b. Quodſi nunc hic perinde atque in preſſionis euolutione grauitatem g vnitate indicemus et pro materia vniformi, ex qua preſſio definitur, hoc ipſum fluidum ſubſtituamus vtpote etiam homogeneum, fiet altitudo preſſionem metiens $p = b - z = EZ$, ita vt iam in loco quouis Z preſſio p aequetur ipſi profunditati E Z infra ſupremam ſuperficiem; et corpus quoduis huic fluido immerſum ſurſum vrgebitur vi, quae ponderi aequalis voluminis fluidi eſt aequalis, quod cum ſit homogeneum, eius media directio per corporis centrum magnitudinis tranſibit. Vas autem totum fluidi quod continet pondus ſuſtinebit.

Coroll. 1.

Tab. VI. Fig. 11. 80. Quamcunque igitur vas tale fluidum continens habuerit figuram, ſuprema fluidi ſuperficies F f, E e, G g in idem planum horizontale cadit, in qua preſſio vbique eſt nulla. Infra autem hanc ſuperficiem preſſio vbique profunditati erit aequalis, ſiquidem hoc ipſum fluidum loco materiae illius homogeneae grauis, ex qua preſſio definitur, in vſum vocetur.

Coroll. 2.

81. Circa latera ergo huius vaſis in T preſſio aequatur altitudini T V, ita vt ſpatiolum ad T norma-

normaliter prematur a vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido formatae, cuius altitudo eſt T V et baſis ipſum illud ſpatiolum. Similique modo ad *s* preſſio altitudini *t* V aequabitur.

Coroll. 3.

82. Quod ad corpus ſolidum quodcunque immerſum B C D attinet quoniam tam denſitas quam grauitas fluidi vbique eſt eadem, perinde eſt in quonam loco intra fluidum id ſit collocatum, ſemper enim ſurſum pelletur vi aequali ponderi paris voluminis B C D fluidi, cuius media directio per eius centrum magnitudinis tranſit.

Scholion.

83. Haec ſunt principia vniuerſae hydroſtaticae, ex quibus omnia, quae in hac diſciplina tradi ſolent, facillime deducuntur, quae cum ſatis ſuperque iam ab Auctoribus ſint expoſita, iis plenius euoluendis hic non immoror. Ad maiora potius pergo, quae vulgo minus accurate tractari ſolent, quando ſcilicet fluidum ex partibus heterogeneis eſt compoſitum, quorſum referendus quoque eſt caſus, quo idem fluidum diuerſis caloris gradibus eſt praeditum, quoniam tum etiam eius denſitas eſt diuerſa: vbi imprimis animaduerti oportet his caſibus fieri poſſe, vt aequilibrium nullum prorſus locum inueniat, ideoque fluidum continuo motu agitari

neceſſe ſit. Cuius motus determinatio etiamſi huc non pertineat, tamen quodammodo eius rationem perſpicere licebit, vnde plurima phaenomena naturae ſatis feliciter explicari poterunt.

Problema 9.

84. *Si fluidum nullam compreſſionem patiens fuerit heterogeneum, ſeu ex diuerſis materiis fluidis mixtum, definire rationem permixtionis vt aequilibrium ſubſiſtere poſſit, ſimulque aequilibrii phaenomena.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Denotante littera g vim acceleratricem grauitatis, ſit q denſitas fluidi in puncto Z, cuius locus per ternas coordinatas $AX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$ determinatur. Si igitur altitudo p ibidem preſſionem exhibeat, pro aequilibrio hanc habemus aequationem $dp=-gqdz$, quae niſi integrationem admiſerit, aequilibrium oriri nequit. Neceſſe ergo eſt vt denſitas q a ſola variabili z pendeat, quia alioquin integratio excluditur; ſi enim forte obiiciatur, hoc fieri poſſe, dummodo quantitas q fuerit functio binarum variabilium p et z, euidens eſt, quia tum altitudo p functioni ipſius z aequalis inueniretur, etiam q per certam functionem ipſius z expreſſum iri. Quare ad aequilibrium neceſſario requiritur vt denſitas q a ſola variabili z pendeat; quae conditio eo redit vt in aequalibus altitudinibus

bus z, seu in qualibet sectione horizontali eadem vbique densitas reperiatur. Diuersa ergo fluida planis horizontalibus a se inuicem separata esse oportet, ita vt si F G sit superficies suprema, vbi pressio euanescit, per eam vbique fluidum eiusdem densitatis expandatur, quod infra iterum plano horizontali H I terminetur: vbi si aliud fluidum incipiat, id quoque vsque ad planum quoddam horizontale inferius extendatur, sicque porro si plura fluida diuersa sequantur. Quodsi in tali fluido corpus solidum B C D E sit immersum, eius loco fluidum, quod cum reliquo foret in aequilibrio consideretur, eiusque tam pondus quam centum inertiae O notetur, quo facto hoc pondus dabit vim, qua corpus B C D E a pressionibus fluidi sursum pelletur, cuius directio per punctum O transire est concipienda. Denique si casu figurae densitas supremi strati F I sit $= l$, sequentis H L $= m$, et infimi K N $= n$, pressio in loco Z erit $= g$ (G I. l + I L. m + L Z. n). Tab. VII. Fig. 12.

Coroll. 1.

85. Plura ergo diuersae densitatis fluida in aequilibrio consistere nequeunt, nisi secundum strata horizontalia inter se fuerint disposita. Ac si initio alium situm habuerint, vel ad istum se component, vel se intime miscendo fluidum homogeneum constituent, vel nunquam ad aequilibrium peruenient.

Coroll. 2.

86. Cum idem fluidum pro diuerſo caloris gradu variam denſitatem recipiat, perſpicuum eſt, etiam fluidum alias homogeneum ſe ad aequilibrium componere non poſſe, niſi per quamlibet ſectionem horizontalem calor vbique fuerit idem.

Scholion 1.

87. Vt plura fluida heterogenea in aequilibrio conſiſtant, ſufficiat ea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe eſſe diſpoſita, vt per quamlibet ſectionem horizontalem per totam fluidi maſſam factam denſitas vbique ſit eadem, neque ad hoc abſolute requiritur, vt ſpecifice grauiſſimum locum infimum, leuiſſimum vero ſupremum occupet. Ita aequilibrium daretur etſi ſupremum ſtratum F I argentum viuum, medium H L aquam et infimum K N oleum contineret; verum hoc aequilibrium minime eſſet ſtabile; quoniam leuiſſima facta concuſſione, ſtatim ac grauioris fluidi particula in inferius levius cederet, aequilibrium ita perturbaretur, vt grauiſſimum fundum eſſet petiturum, leuiſſimum vero in ſupremum ſtatum ſe recepturum, quandoquidem haec tria fluida ab intima permixtione, qua fluidum homogeneum oriretur abhorrent Quamobrem vt aequilibrium perenne obtineatur, variorum fluidorum ſtrata ita diſponi debent, vt deorſum deſcendendo continuo grauiora ſeu denſiora occur-

currant. At si fluida etsi densitate differentia, facile permiscéri patiantur, aequilibrium vix obtineri potest, nisi ea ita confundantur, vt fluidum homogeneum mentiantur. Vtcunque ergo fluida densitate differant, tamen per agitationem ita se tandem disponent, quemadmodum status aequilibrii postulat.

Scholion 2.

88. Fieri autem potest, vt fluidum adeo homogeneum nunquam in aequilibrium perueniat, quando scilicet causa externa adest, qua fluido in vna vasis parte continuo maior caloris gradus imprimitur, veluti si vasis F N aquam continentis lateri G N ignis sit appositus, quo aqua in regione E N contenta multo calidior conseruatur, et vas in alteram partem F M satis protensum sit, vt idem caloris gradus eousque propagari nequeat, ac circa F M aqua perpetuo sit multo frigidior. Cum igitur in parte igni vicina E N aquae densitas sit minor, in opposita vero F L maior, aequilibrium nullo modo locum inuenire potest, cuiusmodi autem motus in eo sit futurus, ex sequenti ratiocinio coniici poterit: Concipiamus diaphragma verticale E L aquam calidiorem a frigidiori separans, atque vt in eius ima parte Z pressio vtrinque existat aequalis, necesse est aquae calidioris altitudinem E Z superare altitudinem frigidioris *e* Z. Hoc ergo modo impedietur ne particula in foraminulo Z *z* ad motum incitetur, at in locis altioribus versus *e* sumtis

Tab. VIII. Fig. 13.

ſumtis preſſio aquae calidae ſine dubio ſuperabit preſſionem frigidae, ex quo ſi totum diaphragma foraminibus pertuſum concipiatur, per ſuperiora aqua calida effluet in regionem frigidae. Qui fluxus ſimul ac inceperit ob auctam altitudinem aquae frigidae eius preſſio circa fundum in Z augebitur contraria vero calidae minuetur, ſicque aqua frigida hic in locum calidae pelletur ac ſimul prior cauſa aquam calidam in regione ſuperiori verſus F vrgens denuo vigebit. Qui vterque fluxus cum perpetuo continuari debet, etiam penitus ſublato diaphragmate EL, euidens eſt hoc caſu quo aqua in regione EN iugiter maiori calore praedita eſt quam in regione oppoſita FL eiusmodi motum perennem in aqua ineſſe debere, vt ſuperne circa GF fluxus fiat ab G ad F aquae calidae in locum frigidae, inferne autem contra ab M ad N aquae frigidae in locum calidae; niſi forte amplitudo vaſis NM ita ſit parva, vt tandem aquae per totam extenſionem idem caloris gradus induci queat.

Scholion 3.

89. Haec concluſio ex theoria deducta, quod fluidum nunquam in ſtatum aequilibrii peruenire poſſit, niſi in aequalibus altitudinibus vbique idem reperiatur caloris gradus, maximi eſt momenti, ac ratio etiam huius phaenomeni nunc perſpicue cognoſcitur quae in eo eſt ſita, quod ſi fluidum ita ſit diſpoſitum, vt circa fundum aequilibrium detur, id

id prope ſupremam ſuperficiem prorſus excludatur. Ex quo intelligitur, quo profundius ſit huiusmodi fluidum, quo in maius ſpatium id extendatur, et quo maius fuerit discrimen in gradu caloris, eo fortiorem eſſe debere iſtum fluxum internum, quo circa ſuperficiem aqua calida in locum frigidae, circa fundum autem contra aqua frigida in locum calidae continuo fertur. Si ergo in mari eiusmodi locus detur, vel lacus quidam ita ſit comparatus, vt in altero termino aqua perpetuo ſit magis calida quam in termino oppoſito, hoc phaenomenum imprimis cerni debebit, vt in ſuperficie aqua continuo a loco calidiori in frigidiorem defluat, circa fundum autem fluxus contrarius obſeruetur. His perpenſis ſatis veriſimile videtur, oceani fluxum intra tropicos ab oriente in occidentem ab hac cauſa potiſſimum oriri, quandoquidem a ſole mare in locis orientalioribus multo magis calefit, quam in occidentalioribus, qui effectus inſuper a continuo ſolis progreſſu ab oriente in occidentem haud mediocriter augetur.

APPLICATIO
ad fluida compreſſionis et rarefactionis capacia.

Problema 10.

90. *Si fluidum aëri ſimile a grauitate animatum vbique eodem caloris gradu ſit praeditum, ſtatum aequilibrii definire et preſſionem in ſingulis locis.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9.

Assumto quodam plano horizontali A X Y supra quod altitudines huius fluidi mensurentur, sit in Z eius particula quaecunque, eiusque altitudo super isto plano $YZ = z$. Densitas porro ibi sit $= q$, et altitudo pressionem metiens $= p$; et quoniam gradus caloris vbique idem statuitur, densitas q a sola pressione p pendebit eiusque certa erit functio ex natura fluidi definienda. Grauitatis nunc vi acceleratrice posita $= g$, pro qua in mensura pressionis vnitate vtimur, status aequilibrii hac aequatione differentiali $dp = -gqdz$ definitur, quae cum q sit functio ipsius p semper integrationem admittit, et integrata praebet $\int \frac{dp}{q} = g(b-z)$, vnde primo intelligimus, aequilibrium semper locum habere, et cum in eum statum peruenerit, pressionem in singulis locis assignare poterimus. Patet autem pressionem p per solam altitudinem z determinari, ita vt vbique ad aequales altitudines eadem futura sit pressio p. Cum igitur euolutio huius formulae pendeat a ratione, qua densitas q per pressionem p determinatur, aliquot hypotheses percurramus.

I. Sit primo $p = \frac{aq}{b}$, ita vt densitati b conueniat pressio a, et generatim pressio densitati sit proportionalis. Quare ob $q = \frac{bp}{a}$ habebimus $\frac{a}{b} lp = g(b-z)$, ac si sumamus in plano horizontali A X Y densitatem

tem esse $= b$, et pressionem $= a$, fiet $\frac{a}{b} la = gb$, ideoque $\frac{a}{b} lp = \frac{a}{b} la - gz$ seu $l\frac{a}{p} = \frac{gb}{a} z$.

II. Loco alterius hypothesis supra ex aëris maxima et minima densitate stabilitae quia ad integrationem minus est idonea, sequente vtamur ad phaenomena egregie accommodata. Posita densitate minima $= m$, maxima vero $= n$ statuamus $q = \frac{mk+np}{k+p}$, vbi k denotet pressionem valde magnam, quam experimentis vix attingere liceat, verumtamen talem, vt pro pressionibus mediocribus, mk prae np quasi euanescat, quod cum densitas minima m prae maxima n vix pars $\frac{1}{1000000}$ aestimari queat, facile efficitur, si verbi gratia pressione atmosphaerae in plano horizontali A X Y posita $= a$ sumatur $k = 100\,a$ vel etiam $k = 1000\,a$; hoc autem modo si pressio mediocris non vehementer ab a abhorreat, in illius formulae numeratore pars mk prae np, in denominatore vero pars p prae k negligi poterit vt prodeat $q = \frac{np}{k}$, seu densitas pressioni proportionalis, vt aëris indoles postulat. Hinc ergo nostra aequatio differentialis erit $\frac{k+p}{mk+pn} dp = -g\,dz$, vnde si in ipso plano horizontali A X Y fuerit pressio $= a$, integratio praebet

$$\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)k}{nn} l\frac{mk+na}{mk+np} = gz.$$

Quodsi densitatem in eodem plano horizontali vocemus $= b$ ob $b = \frac{mk+na}{k+a}$ erit $k = \frac{(n-b)a}{b-m}$ ideoque in genere $q = \frac{m(n-b)a+n(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p} = m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p}$,

ex quo aequatio noſtra ſtatum aequilibrii definiens erit:

$$\frac{a-p}{n}+\frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}\,l\,\frac{(n-m)ba}{m(n-b)a+n(b-m)p}=gz.$$

Cum igitur ſurſum aſcendendo preſſio p continuo diminuatur pro eius quauis diminutione infra a altitudo z hinc facile definitur, ac preſſio p plane euaneſcet in altitudine, quae eſt $=\frac{a}{ng}+\frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)g}\,l\frac{(n-m)b}{m(n-b)}$, vbi denſitas fiet $=m$, et atmoſphaera penitus deſinere eſt cenſenda. Quantam preſſionem ſolida huiusmodi fluido immerſa ſuſtineant, ex praecedentibus ſatis intelligitur.

Coroll. 1.

91. Quia preſſio atmoſphaerae per altitudines mercuriales menſurari ſolet, denſitas mercurii vnitate eſt denotanda; vnde parum a ſcopo aberrabimus, ſi maximam aëris denſitatem n etiam vnitate deſignemus: tum autem denotante iam a altitudinem barometri in ſuperficie terrae erit propemodum denſitas ibi $b=\frac{1}{10000}$, minima vero denſitas m minimum adhuc millies minor eſt aeſtimanda.

Coroll. 2.

92. Quodſi porro grauitatem g vnitate deſignemus aequatio inuenta erit:

$$z=a-p+\frac{9999(1-m)a}{1-10000m}\,l\,\frac{(1-m)a}{9999ma+(1-10000m)p}$$

vnde

vnde tota atmoſphaerae altitudo facta preſſione $p = 0$ reperitur $= a + \frac{9999\,(1-m)a}{1-10000\,m}\, l\frac{1-m}{9999\,m}$. Quare poſito $m = 10^{-\mu}$ quia exponens μ eſt valde magnus, erit proxime:

$$z = a - p + 10000\, l\frac{10^{\mu-4}a}{a + 10^{\mu-4}p},$$

hincque altitudo atmoſphaerae $= a + 10000\, a.(\mu-4)\, l\, 10$.

Coroll. 3.

93. Cum igitur ſit $a = 2\frac{1}{2}$ ped. et $l10 = 2.30258$ ſi altitudo atmoſphaerae ſtatuatur $= \lambda a$, vt λ ſit numerus maximus, fiet hinc $\lambda - 1 = 23026\,(\mu-4)$. Quare ſi modo ſit $\mu = 6$ ſeu $m = \frac{1}{1000000}$, fit $\lambda = 2.23026$, et 23026 ped. pro milliari germanico aeſtimatis altitudo atmoſphaerae ad quinque milliaria aſſurget, ſumtoque $\mu = 8$ ad decem milliaria.

Coroll. 4.

94. Si ergo altitudo atmoſphaerae aeſtimetur 5 milliarium erit aeris denſitas minima $m = \frac{1}{1000000}$, qui valor cum tantum centies ſit minor denſitate, quam ſentimus, experimenta pneumatica vtique ſuadent vt ſtatuamus $m = \frac{1}{10000000}$, et altitudinem atmoſphaerae 10 milliarium vnde pro quauis altitudine z erit $z = a - p + 10000\, al\frac{10000\,a}{a+10000\,p}$ ibique erit

denſitas aeris $q = \frac{1}{13000000} + \frac{p}{10000 + p}$ denſitate mercurii exiſtente $= 1$.

Scholion.

95. Hae duae hypotheſes etſi natura prorſus diuerſae tamen inter ſe vix diſcrepant, niſi preſſio ſit vel nulla vel adeo infinita. Quando autem preſſio nulla ſtatuitur, diſcrimen cernitur maximum, cum prior hypotheſis, atmoſphaerae altitudinem infinitam tribuat altera vero finitam, antequam autem aſcendendo ad hanc peruenitur, ratio qua et denſitas q et preſſio p decreſcit, ex vtraque hypotheſi eadem fere prodit. Ac ſi liceret infra planum A X Y in viſcera terrae deſcendere, vix vlla differentia perciperetur, niſi ad maximam profunditatem fuerit deuentum, quanquam in deſcenſu differentia ſenſibilior fieri debet quam in aſcenſu, ex his formulis autem tabula condi ſolet oſtendens quantum in aſcenſu ad quamuis altitudinem preſſio cum denſitate minuatur, in deſcenſu vero augeatur, quae autem ab experientia haud mediocriter abludere deprehenditur. Cuius rei cauſa non in eo ſita eſt putanda, quod hic non veram relationem inter denſitatem et preſſionem ſimus ſecuti, quomodocunque enim ea fuerit comparata, ſemper pro iis altitudinibus ad quas nobis aſcendere licet, eadem lex prodire debet, propterea quod in his variationibus denſitas ſatis exacte preſſioni eſt proportionalis. Vera autem huius aberrationis cauſa ſine dubio in eo eſt quae-

quaerenda, quod hic toti atmosphaerae vbique eundem calorem tribuimus, cum tamen experientia longe aliud declaret, qua nouimus ascendendo gradum caloris continuo diminui, ita vt ad certam altitudinem sub aequatore aeque ac sub polis vbique terrarum frigus intensissimum fere in eodem gradu reperiatur, atque tota caloris et frigoris variatio et vicissitudo tantum circa terrae superficiem obseruetur, cum etiam in terrae interiora penetrando continuo magis ad aequalitatem componatur. Lex vero, qua calor sursum ascendendo diminuitur, nullam certam regulam sequitur, sed pro variatione climatum et tempestatum maxime est irregularis; vnde in sequente problemate rem ita generaliter sum complexurus, vt ad omnes casus accommodari queat; pro scala nempe caloris in quauis altitudine lineam curuam quamcunque adhibebo; vbi autem hoc perpetuo est tenendum, nisi vbique in aequalibus altitudinibus idem sit caloris gradus, aequilibrium plane dari non posse.

Problema. II.

96 Data scala caloris pro qualibet altitudine super plano horizontali, definire statum aequilibrii atmosphaerae et pressionem cum densitate aeris in quauis altitudine.

Solutio.

A plano horizontali C A D ascendendo per altitudinem verticalem A Z = z sit ibi gradus caloris Tab. VII. Fig. 14.

ris $= r$ repraeſentatus applicata Z R curuae cognitae C R r, quae eſt ſcala caloris; tum vero in eadem altitudine ſit denſitas aëris $= q$ et preſſio $= p$, quae ſimul denotet altitudinem mercurii in barometro ad Z conſtituto, ita vt hic denſitas mercurii vnitate exprimatur, ideoque q ſit fractio valde exigua. In ipſo autem plano horizontali C A D ſit gradus caloris A C $= c$, denſitas aeris $= b$ et preſſio ſeu altitudo barometri in A $= a$. Iam pro altitudinibus ad quas aſcendere licet, ante vidimus preſſionem denſitati proportionalem ſtatui poſſe, ſiquidem calor fuerit idem; calore ergo variabili aſſumto ſi eius menſura adhuc incerta ita determinetur, vt manente denſitate eadem calor preſſioni proportionalis aeſtimetur, habebimus $p = \frac{aqr}{bc}$, vnde fit $q = \frac{bcp}{ar}$. Quare cum ſtatus aequilibrii hac aequatione differentiali contineatur $\frac{dp}{q} = -dz$, poſita vi grauitatis acceleratrice $g = 1$ erit $\frac{dp}{p} = \frac{-bcdz}{ar}$, quae aequatio cum r ſit functio ipſius z vtique integrationem admittit, ſimulque indicat hoc caſu aequilibrium locum habere, quo cum atmoſphaera peruenerit fiet integrando $lp = \text{Conſt.} - \frac{bc}{a}\int\frac{dz}{r}$. Ex ſcala caloris C R r conſtruatur alia curua D S s, vt ſit vbique Z S $= \frac{c}{r} = \frac{\text{A C}}{\text{Z R}}$, ideoque A D $= 1$, et per quadraturam huius curuae habebimus $l\frac{a}{p} = \frac{b}{a}$. A D Z S, vnde definita preſſione p pro altitudine A Z $= z$, erit ibidem denſitas $q = \frac{bcp}{ar} = \frac{bcp}{a.\,\text{Z R}}$. Vel ſi loco caloris r ipſam aream curuae D S s in calculum introducere

ducere velimus ponendo $\int \frac{c\,dz}{r} = s$, ita vt s sit certa functio ipsius z euanescens posito $z = 0$, erit $l\frac{a}{p} = \frac{bs}{a}$ seu $p = a e^{\frac{-bs}{a}}$, et ob $r = \frac{c\,dz}{ds}$, habebitur $q = \frac{bp\,ds}{a\,dz} = \frac{b\,ds}{dz} e^{\frac{-bs}{a}}$ vbi notetur, si calor per totam altitudinem esset idem fore $s = z$, sin autem calor decrescat functionem s in maiore ratione crescere debere quam z, ita tamen vt posito $z = 0$ fiat $s = 0$ et $\frac{ds}{dz} = 1$, vnde statui conueniet $s = z + \alpha z^{\lambda}$ existente $\lambda > 1$. Quo facto erit $r = \frac{c}{\alpha\lambda z^{\lambda-1} + 1}$, et $q = \frac{bp}{a}(1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1})$.

Coroll. 1.

97. Quodsi scala caloris $CR\,r$ sit linea recta verticalem AZ in altitudine $z = b$ secans, ita vt ibi calor prorsus euanescat; pro hoc casu habebimus $r = c(1 - \frac{z}{b})$ tum vero $p = a(1 - \frac{z}{b})^{\frac{bb}{a}}$ et $q = b(1 - \frac{z}{b})^{\frac{bb}{a}} - 1$. Hinc posito $z = b$ pressio ibi euanescet, densitas vero q vel euanescet si $b > \frac{a}{b}$ vel erit $= b$ si $b = \frac{a}{b}$ vel adeo infinita euadet si $b < \frac{a}{b}$.

Coroll. 2.

98. Si scala caloris sit logarithmica sursum cum verticali $AZ\,z$ conuergens, seu $z = b\,l\frac{c}{r}$ erit

$r = ce^{\frac{-z}{b}}$, hinc $q = \frac{bp}{a}e^{\frac{z}{b}}$, ideoque $\frac{dp}{p} = -\frac{b}{a}e^{\frac{z}{b}}dz$, vnde integrando colligitur $l\frac{a}{p} = \frac{bb}{a}(e^{\frac{z}{b}} - 1)$, ex qua aequatione pro quauis eleuatione z preſſio p aſſignari poterit. Hoc caſu in altitudine infinita tam preſſio p quam denſitas q cum calore r euaneſcet.

Coroll. 3.

99. Si calor etiam deſcendendo decreſcat formula $r = \frac{c}{1+\alpha\lambda z^{\lambda-1}}$ ad hunc caſum accommodari poteſt ſumendo pro λ numerum imparem vnitate ſemper maiorem. Veluti poſito $\lambda = 3$, habebimus $r = \frac{c}{1+3\alpha zz}$, $s = z+\alpha z^3$, hinc $p = ae^{\frac{-bz}{a}}(1+\alpha zz)$ atque $q = \frac{bp}{a}(1+3\alpha zz)$. Hic ſi ponatur $z = \infty$, cum calore etiam preſſio cum denſitate euaneſcet.

Scholion 1.

100. Relatio inter preſſionem, denſitatem et calorem, etiam generalior in calculum introduci poteſt, ei qua ſupra ſumus vſi conformis, vbi denſitatem minimam $= m$, maximam vero $= n$ ſtatuimus. Sit enim hic ob calorem variabilem $\frac{qr}{c} = \frac{mk+np}{k+p}$ ſeu $q = \frac{mk+np}{k+p}\cdot\frac{c}{r}$ et ſumto $g = 1$ aequatio differentialis $\frac{k+p}{mk+np}dp = \frac{cdz}{r}$ integrata dat $\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)k}{nn}l\frac{mk+np}{mk+np} = \int\frac{cdz}{r}$. Pro caſu ergo praeſenti, vbi denſitas in ſuperficie terrae $= b$ fit $k = \frac{(n-b)a}{b-m}$ et

et $q = (m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a+(b-m)p}) \frac{c}{r}$ hincque $\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}$
$l \frac{(n-m)ba}{m(n-b)a+n(b-m)p} = \int \frac{cdz}{r}$.

Cum autem ob denſitatem mercurii $= 1$ ſtatui queat $n = 1$, ac tam b prae n, quam m prae b ſit fractio minima, ſatis exacte habebimus:

$$q = (m + \frac{bp}{a-b(a-p)}) \frac{c}{r} \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b} l \frac{ba}{bp+m(a-p)} = \int \frac{cdz}{r}.$$

Hic ſi vtamur hypotheſi $r = \frac{c}{1+3\alpha zz}$ obtinebimus

$$q = (m + \frac{bp}{a-b(a-p)})(1 + 3\alpha zz) \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b} l \frac{ba}{bp+m(a-p)} = z + \alpha z^3$$

vnde poſito $p = 0$ tota atmoſphaerae altitudo, quae ſit $= h$ ita definitur, vt ſit $a + \frac{a}{b} l \frac{b}{m} = h + \alpha h^3$; ex quo patet α ita exiguam fractionem eſſe debere vt etiamſi h fit altitudo aliquot millarium, tamen αhh non fiat numerus praemagnus. Ponamus ergo $\alpha hh = \lambda$, eritque $r = \frac{chh}{hh+3\lambda zz}$; $q = (m + \frac{bp}{a-b(a-p)})$ $\frac{hh+3\lambda zz}{hh}$ et $a - p + \frac{a}{b} l \frac{ba}{bp+m(a-p)} = \frac{z(hh+\lambda zz)}{hh}$ vnde facto $p = 0$, ob $z = h$ erit $a + \frac{a}{b} l \frac{b}{m} = (1+\lambda)h$, et $q = m(1+3\lambda)$. Verum quia ob maximas atmoſphaerae mutationes hic nihil eſt certum vel conſtans, vberior euolutio huius hypotheſis prorſus foret inutilis.

Scholion 2.

101. Quascunque autem concluſiones hinc inferre licet, probe ſemper eſt tenendum, eas locum non habere, niſi atmoſphaera fuerit in aequilibrio; ſtatim enim atque ea ventis agitatur, omnia quae hinc de preſſione et altitudine barometri tradi ſolent, maxime perturbantur, neque amplius quicquam certi ſtatui poteſt, cuius circumſtantiae imprimis ratio eſt habenda, quando altitudo barometrica in diuerſis altitudinibus et profunditatibus obſeruatur etiamſi enim ſtatus caloris perfecte eſſet cognitus, nihil tamen inde colligere liceret, niſi atmoſphaera prorſus eſſet tranquilla. Vt autem atmoſphaera in aequilibrio conſiſtere poſſit, omnino neceſſe eſt, vt in aequalibus altitudinibus, ſeu per quoduis eius ſtratum horizontale denſitas vbique ſit eadem, vnde etiam eadem preſſio conſequitur. Vidimus autem hoc neutiquam euenire poſſe, niſi ſimul in aequalibus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, ex quo ſequitur, quoties in vna terrae regione ad eandem altitudinem aër fuerit calidior vel frigidior quam in alia, aequilibrium nullo modo ſubſiſtere poſſe, ſed ventum neceſſario exoriri debere non ante ceſſaturum quam per ingentem ſaltem terrae tractum in quouis ſtrato horizontali aër ſeſe ad eundem caloris gradum compoſuerit. Quod cum rariſſime eueniat, mirum non eſt, atmoſphaeram vix vnquam prorſus eſſe tranquillam, ideoque dubium eſt nullum, quin haec praecipua ventorum cauſa ſit ſtatuenda.

tuenda. Cuiusmodi autem motus in aëre oriri debeat, quando in aequalibus altitudinibus gradu caloris diſcrepat, tametſi haec quaeſtio ad theoriam motus fluidorum pertinet, tamen ſimili modo, quo ſupra vſi ſumus, quodammodo colligere licet, quantum quidem ad praeſens inſtitutum ſufficit; atque hinc plurimorum phaenomenorum cauſam intelligere licebit.

Problema 12.

102. Si calor atmoſphaerae in vna regione multum diſcrepet ab eo, quem in alia regione ad eandem altitudinem habet, ita vt aequilibrium locum habere nequeat, motum aëris hinc oriundum praeterpropter ſaltem definire.

Solutio.

Sit aër regioni A B imminens maiore calore praeditus, quam qui regioni C D imminet; concipiamus primo prope terram tubum horizontalem *b c* a regione calida in frigidam porrigi, et atmoſphaeram in eo ſtatu eſſe, vt preſſio in *b* aequalis ſit preſſioni in *c*, ideoque aër in tubo *b c* quieſcat. Ob calorem ergo circa *b* maiorem quam circa *c*, denſitas ad *b* minor erit quam ad *c*, hincque par aëris volumen ibi minus habebit pondus quam hic. Nunc ſimilem tubum horizontalem $\mathfrak{E}\gamma$ altius ſitum conſideremus, ac manifeſtum eſt preſſionem ad $\mathfrak{E}$ minorem eſſe preſſione ad *b* pondere columnae Tab. VII. Fig. 15.

aëris a b ad $\mathfrak{C}$ protenſae ; ſimilique modo preſſionem ad γ deficere a preſſione ad c pondere columnae aëris a c ad γ protenſae , at haec columna ob denſitatem maiorem per $c\gamma$ grauior eſt illa; vnde cum preſſiones ad b et c ſint aequales , preſſio ad γ vtpote maiore parte minuta minor erit preſſione ad $\mathfrak{C}$, quippe quae minore parte mulctatur. Ex quo neceſſe eſt aërem in ſuperiori tubo a regione calidiore in frigidiorem propelli ; qui fluxus cum aëris molem in regione frigida augeat , in calida vero minuat , etiam circa tubum inferiorem bc aequilibrium mox turbabitur , et aër hic a regione frigida in calidam propelletur. Idem eueniet ſi aërem primum circa tubum ſuperiorem $\mathfrak{C}\gamma$ in aequilibrio fuiſſe ſtatuamus , ita vt tum preſſiones ad $\mathfrak{C}$ et γ fuerint aequales , tum enim a $\mathfrak{C}$ ad b deſcendendo preſſio minus accipiet augmentum quam a γ ad c deſcendendo , quia ibi aëris denſitas minor eſt quam hic , ex quo in c preſſio erit maior quam in b et aër frigidior per hunc tubum in locum calidiorem propelletur , quo fluxu etiam aequilibrium ſuperne ita turbabitur , vt iam aër calidior per tubum $\mathfrak{C}\gamma$ in locum frigidiorem deferatur. Hinc ergo remotis his tubis tuto pronunciare poſſumus, ſi aër regioni AB imminens calidior ſit aëre regioni CD imminente , tum infra ventum oriri a regione frigida in calidam , ſupra autem contra ventum a regione calida in frigidam ſpirantem. Tum vero de vi huius venti duplicis , in genere ſequentia notari

tari licet. Primo quo maius fuerit discrimen inter calorem et frigus, eo hunc ventum fortiorem esse debere. Secundo quo maior fuerit altitudo $b\,\mathfrak{C}$, per quod hoc discrimen porrigitur, ob maiorem aequilibrii perturbationem etiam ventum accelerari oportere. Tertio vero quo minus regio frigida a calida distet, eo magis etiam ventum augeri, quia tum minor aëris massa ab iisdem viribus per tubos $c\,b$ et $\mathfrak{C}\,\gamma$ est propellenda, dum contra si hae regiones maxime distent, fluxus aëris admodum lenis oriri debet ob insignem massam movendam.

Coroll. 1.

103. Si ergo duo conclauia vicina per ianuam inuicem communicent et alterum fuerit calefactum, alterum frigidum, tum infra aër ex conclaui frigido in calidum intrabit, supra autem habebit fluxum contrarium, vti experientia ostendit.

Coroll. 2.

104. In eodem porro conclaui, quod ope fornacis est calefactum in regione inferiori aër ad fornacem accedit, in superiori vero inde recedit, ficque prope fornacem continuo sursum ascendet, et motu suo exiles machinas agitare valet, prouti experientia declarat.

Coroll. 3.

105. Si in foco camini ignis accendatur, statim atque aër ei imminens calorem concipit, in regione

gione inferiori aër vndequaque ad ignem propellitur, et cum fumo per caminum egreditur, dum eius locum aër exterior per rimas conclauis intrans supplere valeat.

Coroll. 4.

106. Haec etiam causa est, quod in Africae littoribus quae interdiu ab imminente sole maxime vruntur, continuus ventus ab oceano afflet in regionibus scilicet humilioribus, dum is sine dubio in sublimi cursum tenet contrarium.

Scholion 1.

107. Hinc igitur perspicuum est quantum iste fluxus aëris ad ignem super focis et in fornacibus suscitandum conferat, dum continuo motu ad ignem appellens per caminum ascendit, ac phaenomena notissima producit. Id tantum dubium hic exoritur, quod exempla eiusmodi caminorum non desint, quibus iste aëris fluxus minime conspiciatur ac potius fumus a fluxu contrario in conclaue depelli videatur. Quanquam autem vitium plerumque in eo est positum, quod vel ob angustiam vel alia impedimenta camini liber aëris ascensus coërceatur, tamen haec sola causa huiusmodi aduersis phaenomenis explicandis haud sufficere videtur. Ad fumum autem sese aëri admiscentem hic quoque est attendendum, quo sine dubio densitas aëris haud mediocriter

criter augetur; cum enim affluxus aëris ſupra explicatus inde oriatur, quod a calore denſitas aëris diminuitur, ſi eueniat, vt ob fumum tantundem augeatur, ille effectus prorſus ceſſare debet, quin etiam ob maiorem denſitatem curſus contrarius per caminum deſcendens fumum in conclaue expellere poterit. Quare ne hoc incommodum vſu veniat, imprimis curandum eſt, vt fumus liberrimum exitum per caminum inueniat, hocque modo eius quantitas prope ignem ita diminuatur, vt aër inde vix maiorem denſitatem adipiſcatur.

Scholion 2.

108. Num autem ventus ille perennis orientalis, qui inter tropicos obſeruatur, ab eadem cauſa oriatur? haud ſatis liquet, quoniam in locis magis ad occidentem ſitis, ad quae ſol curſum ſuum dirigit, calor atmoſphaerae maior certe non eſt, quam in iis quibus ſol imminet. Et cum poſt meridiem demum calor ſentiatur maximus, hinc potius ſequi videtur, a regionibus occidentalioribus aerem affluere debere. Quo autem hic aliquid certius ſtatuere queamus repraeſentet circulus A B D C globum terraqueum, in quo ſit A locus, cui iam vel ſol immineat, vel vbi calor ſit maximus, ita vt tam in regione occidentaliori B quam orientaliori C gradus caloris ſit multo minor. Hoc poſito certo affirmare licet, ſi ſol perpetuo eidem loco A immineret, Tab. VII. Fig. 16.

neret, vel calor maximus ibi perennis foret, tum vndequaque perinde aërem prope ſuperficiem ad locum A delatum iri, ita vt in B ventus occidentalis, in C vero orientalis ſentiri deberet; dum in regione ſublimi aër vbique curſum contrarium eſſet habiturus. Nunc autem ponamus maximum calorem ab A continuo occidentem verſus proferri, ac manifeſtum eſt inde affluxum ab oriente intendi, ab occidente autem debilitari debere. Si enim haec promotio caloris ſatis eſſet rapida, facile intelligitur motum ab occidente prorſus extinctum iri, atque vniuerſam atmoſphaeram fere vniformiter ab oriente in occidentem conuerti debere; quae cum quaſi ſponte ſe ad talem motum componat impetu ſemel accepto, vix opus eſſe videtur, vt in ſuprema regione motus exiſtat contrarius, quo iactura retro facta compenſetur; vel ſi adſit talis motus, multo erit debilior. Neque ergo dubito cauſam euri perennis in zona torrida principio hic ſtabilito et cum motu telluris diurno coniuncto attribuere.

CAPVT

CAPVT V.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM AD CENTRA VIRIVM FIXA SOLLICITATORVM.

Problema 13.

109.

Si vis acceleratrix, qua singulae fluidi particulae ad centrum virium vrgentur, sit functioni cuicunque distantiae ab hoc centro proportionalis, definire fluidi statum aequilibrii.

Solutio.

Sit A centrum virium per quod transeat planum illud fixum A X Y, ad quod situm singularum fluidi particularum Z referamus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ sitque in Z pressio $= p$ et densitas fluidi $= q$. Statuatur nunc puncti Z a centro virium distantia $AZ = v$, vt sit $vv = xx + yy + zz$, et sit V ea functio distantiae v, quae vim acceleratricem in Z secundum Z A exprimit. Haec vis secundum ternas coordinatas resoluta dat vires sequentes: Tab. VII. Fig. 17.

ſec. direct. XA vim $= \frac{V x}{v}$ vt ſit $P = -\frac{V x}{v}$

ſec. direct. YX vim $= \frac{V y}{v}$ vt ſit $Q = -\frac{V y}{v}$

ſec. direct. ZY vim $= \frac{V z}{v}$ vt ſit $R = -\frac{V z}{v}$.

Quocirca ex probl. 3. pro ſtatu aequilibrii fluidi hanc habebimus aequationem

$$dp = -\frac{q V}{v}(x dx + y dy + z dz)$$

quae ob $v dv = x dx + y dy + z dz$ contrahitur in hanc:

$$dp = -q V dv.$$

Quod ſi iam denſitas q ita ſit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, quod non euenit, niſi q ſit functio binarum quantitatum p et v, ſtatus aequilibrii locum habet, eiusque natura per integralem huius aequationis exprimetur.

Coroll. 1.

Tab. VII. Fig. 18

110. Vt ergo fluidum ad aequilibrium ſe componat, denſitas q tantum a diſtantia a centro virium $AZ = v$ et a preſſione p in loco Z pendere debet; quia autem tum ex aequatione $dp = -q V dv$ preſſio p per ſolam diſtantiam v determinatur, etiam denſitas per ſolam diſtantiam v determinabitur.

Coroll. 2.

111. Si ergo fluidum fuerit in aequilibrio, tum in aequalibus a centro A diſtantiis hoc eſt per totam

totam ſuperficiem ſphaerae radio $AZ = v$ circa centrum deſcriptae vbique eadem preſſio p eademque denſitas q reperietur, id quod de omnibus ſuperficiebus ſphaericis concentricis eſt intelligendum.

Coroll. 3.

112. Quod ſi igitur in diſtantia $AC = b$ preſſio euaneſcit, per totam quoque ſuperficiem ſphaericam CEGF euaneſcat neceſſe eſt, haecque ſuperficies fluidi ſuprema eſt cenſenda. Vnde patet fluidum in aequilibrio conſtitutum neceſſario figuram ſphaericam induere, in cuius centro poſitum ſit centrum virium.

Coroll. 4.

113. Si preſſio in C euaneſcat, erit in loco centro propiore Z, poſito interuallo $CZ = b - v = u$, preſſio $p = \int q V du$, integrali hoc ita accepto, vt euaneſcat poſito $u = 0$, hoc autem integrale, exprimit pondus columnae fluidae ex C in Z protenſae, quo ea a vi centripeta ad Z vrgetur: Quare ad centrum A accedendo preſſio p continuo augebitur.

Scholion 1.

114. Ratiocinium hoc clarius reddetur, ſi columnae cylindricae CZ baſin tribuamus $= ff$, vt eius volumen ob altitudinem $CZ = u$ ſit ffu, et incrementum eius, dum altitudo elemento du auge-

tur, $=ff\,du$; maſſae ergo elementum ob denſitatem in $Z=q$ erit $=ff\,q\,du$, quod in vim acceleratricem V, qua deorſum ſollicitatur ductum, dabit ponderis incrementum $=ff\,q\,V\,du$; ex quo totius columnae C Z pondus erit $=ff\int q\,V\,du$, quod ſi ponatur $=P$, preſſio in Z erit $p=\frac{P}{ff}$; vnde perſpicuum eſt preſſionem in Z ponderi columnae fluidae C Z eſſe proportionalem, ſiquidem haec columna a ſuprema fluidi ſuperficie capiatur. Quoniam igitur haec columna quo magis verſus centrum A extenditur eo fit neceſſario ponderoſior, ſimul intelligitur, quo propius ad centrum A accedatur, eo magis preſſionem p augeri debere. Atque hinc etiam vis, quam quoduis corpus ſolidum fluido immerſum ab eius preſſionibus ſuſtinet, colligi debet, quippe quae aequalis et contraria eſt ei vi, qua maſſa fluida in locum corporis ſolidi ſubſtituta a vi centripeta vrgetur. Hincque ex vi, qua corpus ſolidum ipſum a vi centripeta ſollicitatur, iudicare licebit, vtrum id in fluido ſit quieturum, an vero vel ſurſum vel deorſum pellatur? prouti haec vi illi fuerit vel aequalis; vel ea minor maiorue: quin etiam fieri poteſt, ſi ambae vires non per idem corporis punctum tranſeant, vt ei interea motus quoque gyratorius imprimatur.

Scholion 2.

115. Si ergo denſitas in locis a centro A aeque remotis non ſit aequalis ſtatus aequilibrii locum

cum habere nequit, qualem autem tum motum adipiſcatur fluidum, ſequenti modo colligere licebit. Ponamus in locis b et δ denſitatem minorem eſſe quam in locis c et γ, fluidum autem ita eſſe diſpoſitum, vt in b et c preſſiones ſint aequales, ideoque fluidum in tubo bc in aequilibrio verſetur; quo poſito preſſio ad δ maior erit preſſione ad γ, quoniam pro illa obtinenda a preſſione in b pondus columnae rarioris δb ſubtrahi debet, pro hac vero denſioris γc. Fluidum ergo per tubum ſuperiorem $\delta\gamma$ a loco, vbi denſitas eſt minor defluet in locum, vbi denſitas eſt maior, qui fluxus ſimul ac inceperit aequilibrium in tubo inferiori bc turbabitur, hicque fluidum denſius ad rarius fluere incipiet. Idem motus prodibit ſi primum fluidum in tubo ſuperiori $\delta\gamma$ in aequilibrio fuiſſe aſſumamus. Quocirca tuto concludimus, ſi in regione δb denſitas minor fuerit quam in regione γc, tum infra fluidum ex c in b ſupra autem contra ex δ in γ fluere debere; qui motus tamdiu durabit, quoad aequilibrium locum inuenire queat; ac ſi ob calorem ad $b\delta$ minorem denſitas ibi conſtanter ſit maior quam ad $c\gamma$ hic motus perpetuo durabit, qui caſus omnino conuenit cum illo, quem ſupra euolvimus.

Scholion 3.

116. Pro diuerſa ergo fluidi indole circa aequilibrium ſequentia ſunt notanda. Primo ſi fluidum

dum ſit homogeneum denſitatem habens inuariabilem, veluti aqua eodem vbique caloris gradu praedita, cum ſe ad aequilibrium compoſuerit, in aequalibus a centro virium diſtantiis preſſio vbique eſt eadem: ſin autem fluidum ſit heterogeneum, cuius tamen ſingulae partes nullam denſitatis mutationem patiuntur, aequilibrium ſubſiſtere nequit, niſi in aequalibus a centro virium diſtantiis denſitas vbique ſit eadem, at tum etiam preſſio ibidem aequalis ſit neceſſe eſt. Idem tenendum eſt, ſi idem fluidum ob diuerſos caloris gradus ratione denſitatis diſcrepet, tum enim ad aequilibrium requiritur, vt in aequalibus a centro virium diſtantiis vbique idem reperiatur caloris gradus, quod niſi eueniat, aequilibrium locum habere nequit, ſed in regionibus inferioribus fluxus dabitur perpetuus a loco frigidiori in calidiorem, in ſuperioribus vero contra a loco calidiore in frigidiorem. Quod ſi fluidum aëri ſit ſimile et denſitatem habeat variabilem non ſolum a gradu caloris ſed etiam a preſſione pendentem; tum aequilibrium dari nequit, niſi per ſingulas ſuperficies ſphaericas circa centrum virium deſcriptas vbique idem caloris gradus regnet; tum vero etiam per totam cuiusque harum ſuperficierum expanſionem et denſitas et preſſio eadem deprehendetur. In his igitur omnibus caſibus maxime intereſt fluidi maſſam in eiusmodi ſtrata diuidi, quae a centro virium aeque diſtent, ideoque figuram habeant ſphaericam, quae ſtrata aequilibrata vel libellata vocare

care licet; simili modo quo casu ante tractato, vbi directiones grauitatis inter se erant parallelae, haec strata plana et horizonti parallela accipi debebant.

Problema 14.

117. Si singulae fluidi partes ad duo pluraue centra virium simul sollicitentur viribus acceleratricibus, quae vtcunque a distantiis pendeant, conditiones inuestigare, sub quibus fluidum in aequilibrio consistere queat.

Solutio.

Sint plura centra virium fixa C, C′, C″ vtcunque dispositа siue in eodem plano siue secus; ac fluidi consideretur elementum quodcunque in Z situm, vbi densitas sit $= q$, et pressio $= p$. Ponantur huius puncti Z distantiae a singulis virium centris: Tab. VIII. Fig. 19.

$$CZ = v\,;\quad C'Z = v'\,;\quad C''Z = v''$$

et vires acceleratrices, quibus ad ea seorsim sollicitatur, sint V, V′, V″. Harum autem virium effectus ratione aequilibrii seorsim definire licet, quoniam supra vidimus in genere pro aequilibrio esse debere $\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$, vbi singulae vires resolutae in P, Q, R partes peculiares inducunt. Calculo ergo vt ante subducto pro singulis viribus ternae coordinatae ex calculo excedent, et ad hanc aequationem peruenietur:

$$\frac{dp}{q} = -Vdv - V'dv' - V''dv''$$

vnde patet si denſitas q fuerit vel conſtans, vel a ſola preſſione p pendeat, integrationem ſuccedere, ideoque aequilibrium locum habere, cuius indoles hac aequatione exprimetur:

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$$

vbi notari meretur formulam integralem $\int V\,dv$ repraeſentare actionem vis V; quare ſi omnium virium iunctim conſideratarum actio tota ſtatuatur $= W$, vt ſit

$$W = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$$

habebitur $\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - W$. Notio autem huius actionis ita eſt ſtabilienda, vt pro quouis ſpatii puncto, quod virium actioni ſubiicitur, certum ſortiatur valorem longitudine ſeu altitudine quadam exprimendum, ſiquidem vires acceleratrices V, V', V'' grauitati homogeneae numeris abſolutis indicantur; ita vt actio virium in quouis puncto euadat preſſioni homogenea, quippe quam etiam certa altitudine repraeſentamus. Actione ergo in calculum introducta erit aequatio differentialis pro ſtatu aequilibrii $dp = -q\,dW$, vnde ſi denſitas q non ſolum a preſſione p ſed etiam a loco pendeat, veluti ſi cuilibet loco certus caloris gradus conueniat, tum aequilibrium locum habere nequit, niſi calor vnice ab actione virium W pendeat, ita vt in omnibus punctis, vbi eadem actio viget, ibi etiam calor ſit idem; tum autem in iisdem locis quoque denſitas et preſſio in aequilibrio fiet eadem.

Coroll.

Coroll. 1.

118. Totum ergo negotium eo redit, vt omnia puncta, vbi actio virium eſt eadem probe notentur, quae cum pro quauis actionis quantitate W in certam quandam ſuperficiem cadant, talis ſuperficies ſtratum aequilibratum repraeſentabit; ita vt in quolibet ſtrato aequilibrato actio virium vbique ſit eadem.

Coroll. 2.

119. Ad aequilibrium igitur id maxime requiritur, vt per ſingula ſtrata aequilibrata fluidum vbique eandem habeat denſitatem, tum vero etiam preſſio vbique erit eadem in quolibet ſcilicet ſtrato aequilibrato. Vnde perſpicuum eſt extremam ſeu ſupremam fluidi ſuperficiem ſecundum huiusmodi ſtratum aequilibratum ſe componere debere; ex quo haec ſtrata ad libellam diſpoſita ſunt cenſenda.

Coroll. 3.

120. Si vnicum ſit centrum virium, omnia ſtrata aequilibrata figuram habent ſphaericam centro virium deſcriptam, ideoque inter ſe erunt parallela. Sin autem duo pluraue adſint centra virium, figura ſingulorum ſtratorum aequilibratorum admodum fit plerumque irregularis, neque ea amplius inter ſe erunt parallela, ſed potius craſſitie inaequabili praedita.

Scholion 1.

121. Duae hic occurrunt notiones maxime notatu dignae, quarum prior eſt notio actionis virium, quae in quoduis punctum agunt, atque alibi oſtendi hanc notionem in principio minimae actionis, maximi eſſe momenti, ex quo ſi forte ea quibusdam geometris vel nimis metaphyſica vel adeo nimis ſterilis fuerit viſa, hic certe ſummam eius vtilitatem agnoſcent. Dum enim vires quaecunque acceleratrices in punctum definitum agunt, ibi certam exerunt actionem quae conuenientiſſime eo modo, quo hic vſus ſum, repraeſentatur, dum ſcilicet quaelibet vis per differentiale directionis ſuae multiplicata integratur, et haec integralia ex ſingulis viribus nata in vnam ſummam colliguntur; vnde conceptus metaphyſicus formari poterit. Ita hic littera W dum exprimit ſummam formularum $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ deſignabit actionem virium V, V′, V″ punctum Z, in quo fluidi elementum concipimus, ſollicitantium. Parum autem refert, quantam conſtantem ob integrationes introducamus, quoniam hanc notionem eo dirigimus, vt omnia loca, in quibus eadem ineſt actio definiamus; interim tamen cum elicuerimus $\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - W$ pro quolibet caſu haec conſtans facile determinatur. Hinc igitur nata eſt altera notio ſtratorum aequilibratorum, quorum quoduis eam vniuerſam ſuperficiem complectitur, cuius omnibus punctis eadem actio

actio conuenit; quantae autem sit vtilitatis haec notio in aequilibrio fluidorum definiendo, hic iam satis copiose est declaratum: at vero etiam in motu fluidorum inuestigando aeque est necessaria, vti ex sequentibus patebit. Determinatio autem horum stratorum aequilibratorum pro qualibet virium sollicitantium hypothesi, ad problema geometricum reducitur, cuius solutio autem plerumque ita sit difficilis, vt stratorum horum figura inde difficulter cognosci queat. Quoniam vero huiusmodi casus vix in rerum natura occurrunt, operae haud est pretium hunc laborem suscipere; quin potius vires reales, quae in fluida terrestria agunt, eorumque statum aequilibrii afficiunt, sum exploraturus.

Scholion 2.

122. Cum scilicet omnia, quae nobis circa aequilibrium et motum fluidorum explorare licet, potissimum ad fluida super terra constituta referri conueniat, aquam nimirum et aërem, perpendendum est a cuiusmodi viribus haec fluida praeter grauitatem sollicitentur. Ac primo quidem occurrit vis centrifuga, qua haec fluida ob motum vertiginis terrae, ab eius axe repelluntur, quam ipsis ab axe distantiis proportionalem esse constat. Etsi enim consideratio huius vis, ob motum vnde nascitur neutiquam ad theoriam aequilibrii pertinet; tamen quia eius actio est perennis, statim ac fluida sese in certum statum composuerint, hic status vt

aequilibrium ſpectari poteſt, ſiquidem is perfecte cum eo conuenire cenſendus eſt, quem eadem fluida induerent, ſi terra quieſcente ſingula fluidorum elementa praeter grauitatem continuo a viribus illis ab axe repellerentur. Quamobrem quomodo ſtatus aequilibrii in hac hypotheſi comparatus eſſe debeat, plurimum intererit hic inueſtigare, cum concluſiones etiamſi fictioni innitantur, tamen minime a veritate aberrare ſint putandae. Deinde etiam conſtat tam ſolem quam lunam vi ſua attractrice in fluida terrae effectum ſatis notabilem exſerere; qui etiamſi cum continuo motu ſit coniunctus, tamen ita ad ſtatum aequilibrii reuocari poteſt, vt concluſiones vel non multum a veritate abhorreant vel ſaltem ad motus cognitionem deinceps inueſtigandam maxime ſint neceſſariae. Quare etſi ſol et luna quotidie circa terram circumferantur, conueniet quaeſtionem ita conſtitui, vt terra in quiete ſpectata, ſol vel luna perpetuo eidem terrae puncto imminere concipiatur, et ſtatus aequilibrii fluidorum ab hac vi cum grauitate coniuncta productus definiatur. Tum enim his aſtris etiam procedentibus intelligetur, quemnam ſtatum fluida quouis momento induere conentur; tametſi enim nunquam in aequilibrium ſint peruentura, tamen cognitio aequilibrii quod quaſi affectant, maximam habebit vtilitatem.

Pro-

Problema 15.

123. Si praeter vim centripetam, qua fluidum ad punctum fixum C vrgetur, singulae particulae Z ab axe fixo A B per centrum C transeunte repelliantur viribus distantiae X Z ab axe proportionalibus definire statum aequilibrii, fluidi cuiuscunque. Tab. VIII. Fig. 20.

Solutio.

Sit fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit $= q$ et pressio $= p$; ponatur eius distantia a centro $CZ = v$, cuius functioni V aequalis sit vis acceleratrix, qua id elementum ad C vrgetur, huius ergo vis actio in punctum Z erit $= \int V dv$, partem constituens actionis totius ante littera W indicatae. Altera vero pars oritur ex vi qua elementum Z ab axe A B repelli assumimus, sit ergo perpendiculum ex Z ad axem ductum $ZX = x$, et vis ipsa acceleratrix repellens $= \frac{x}{f}$, quoniam distantiae x proportionalis statuitur. Iam ex praecedentibus perspicuum est, si haec vis contrariam haberet directionem Z X, eam spectari posse vt vim centripetam ad centrum in directione Z X infinite remotum tendentem, sicque eius actio foret $= \int \frac{x\,dx}{f} = \frac{xx}{2f}$: nunc igitur quia vis ab axe repellit, actio statuenda est $= -\frac{xx}{2f}$, ita vt actio tota pro elemento in Z sit $= \int V dv - \frac{xx}{2f}$ loco litterae W substi-

ſubſtituenda, ex quo pro ſtatu aequilibrii haec habetur aequatio

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - \int V\,dv + \frac{xx}{2f} \text{ ſeu } dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - V\,dv\right)$$

vnde patet niſi denſitas q ſit conſtans vel a ſola preſſione p pendens, eam inſuper ipſam actionem W inuoluere debere cum alioquin aequilibrium ſubſiſtere non poſſit. Pro aequilibrio ergo neceſſe eſt, vt denſitas q ſit vel conſtans, vel functio ſolius preſſionis p, vel functio duarum quantitatum p et $W = \int V\,dv - \frac{xx}{2f}$. Si ergo calor ſit variabilis, eum functionem ipſius W eſſe oportet, ita vt in omnibus locis, vbi actio W eſt eadem, hoc eſt in quolibet ſtrato aequilibrato, ſit idem. Tum vero ibidem et denſitas et preſſio eadem ſit oportet; ac ſuprema fluidi ſuperficies ſecundum tale ſtratum aequilibratum ſemper erit diſpoſita. Pro grauitate hic functionem quandam V diſtantiae $CZ = v$ introduxi quia eius indoles eſt ambigua; ſi enim in viſcera terrae deſcendimus, haec vis ipſi diſtantiae proximae cenſetur proportionalis, ſin autem ſupra terram per atmoſphaeram aſcendimus, quadrato diſtantiae reciproce proportionalis aeſtimatur: ex quo coniicere licet prope ſuperficiem quousque vel aſcendere vel deſcendere datur, grauitatem recte conſtantem et vnitati aequalem poni, vnde erit $dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - dv\right)$, pro ſtratis autem aequilibratis habebitur haec aequatio $v = \text{Conſt.} + \frac{xx}{2f}$, quae ergo exprimit naturam ſupremae ſuperficiei fluidorum. Ita

ſi

si semiaxis totius superficiei sit $CA = k$ vbi $x = 0$, semidiameter aequatoreus vbi $v = x$, ex hac aequatione $x = k + \frac{xx}{2f}$, definitur $x = f - V(ff - 2fk)$ vbi notetur f esse quantitatem maximam.

Coroll. 1.

124. Si ergo quaestio sit de figura oceani terram cingentis, posita densitate $q = 1$, erit pro loco sub oceano quocunque Z pressio $p = k + \frac{xx}{2f} - v$ vnde pro suprema superficie erit $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$, vnde vt supra fit semiaxis $CA = k$ et semidiameter aequatoris $= f - V(ff - 2fk) = k + \frac{kk}{2f} + \frac{k^3}{2ff}$ siquidem f multum superet k.

Coroll. 2.

125. Cum reuolutio terrae circa axem absolvatur tempore $23^h, 56', 45'' = 86205''$, pro quo numero si scribamus ν, et altitudinem lapsus vno minuto secundo facti ponamus $= g$ erit quantitas illa $f = \frac{\nu\nu g}{2\pi\pi}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$; ex quo colligitur $f = 37647418 0.g$ et ob semiaxem terrae $k = 19601352$ ped. paris. fit $f = 289,95\,k$, ex quo semidiameter aequatoris prodit $= k\left(1 + \frac{1}{3799}\right) = \frac{581}{580}k$.

Coroll. 3.

126. Pro pressione autem atmosphaerae, si in terrae superficie sub polo ponatur altitudo barome-

tri $= a$, denſitas aëris $= b$, exiſtente denſitate mercurii $= 1$, ob $q = \frac{bp}{a}$ erit $l\frac{p}{a} = \frac{b}{a}(k - v + \frac{xx}{2f})$, et vbique in ſuperficie maris ob $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$ altitudo barometri p erit eadem $= k$. Sub aequatore autem ob ſtrata craſſiora atmoſphaera altius aſſurgit quam ſub polis.

Scholion.

127. Mirum hic videri non debet quod ſemidiameter aequatoris parte tantum $\frac{1}{286}$ ſuperare inventus ſit ſemiaxem terrae, cum tamen experientia iam conſtet exceſſum ad partem $\frac{1}{305}$ aſſurgere. Ratio huius diſcriminis in eo latet, quod hic grauitatem perpetuo ad centrum directam et a ſola diſtantia ab eo pendentem aſſumſimus, ita vt quomodocunque terrae figura mutetur, grauitatis tamen eadem eſſet menſura. Verum nunc ſatis euictum eſt grauitatem ab attractione omnium terrae partium proficiſci, ideoque ſtatim atque terrae figura ſphaerica alteretur, ipſam quoque grauitatem mutationem pati, atque haec grauitatis mutatio in cauſa eſt, quod ob motum vertiginis terrae aberratio a figura ſphaerica multo maior exiſtat. Hugenius quoque qui primus figuram terrae definire ex theoria eſt conatus, dum ad ſolam vim centrifugam reſpexit, grauitate vt inuariabili ſpectata eandem rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris ſcilicet fere 580 : 581 elicuit, ex quo calculus hic adhibitus minime ſuſpectus videri debet. Hic autem

locus

locus non eſt, vt ex vera attractionis indole calculum propius ad veritatem accommodemus, dum pro aequilibrio tam aquae quam aëris cognoſcendo haec allata abunde ſufficiunt. Neque etiam ei caſui quo in iisdem ſtratis caloris gradus diſcrepat, immoror, cum ſatis conſtet ex ſuperioribus, cuiusmodi motus tum oriri debeat.

Problema 16.

128. Si terrae centro C immineat in E ſiue ſol ſiue luna ſiue aliud corpus attrahens in ratione reciproca duplicata diſtantiarum definire ſtatum aequilibrii fluidorum circa terrae ſuperficiem ſitorum, hoc eſt oceani et atmoſphaerae, dum tam terra quam corpus in E ſine motu ſpectantur. Tab. VIII. Fig. 21.

Solutio.

Poſita diſtantia $CE = b$, ſit maſſa terrae $= C$, corporisque $E = E$ ita vt in diſtantia quacunque $= d$, ſit vis attrahens terrae $= \frac{C}{dd}$ corporis vero $E = \frac{E}{dd}$. Conſideretur iam fluidi elementum quodcunque in Z, cuius denſitas ſit $= q$ et preſſio $= p$; ac vires acceleratrices quibus hoc elementum vrgetur perpendi oportet. Vocentur diſtantiae $CZ = v$ et $EZ = u$, vt poſito angulo $ECZ = \Phi$, ſit $uu = bb - 2bv\cos.\Phi + vv$, ac primo punctum Z ſollicitatur ad centrum C vi $= \frac{C}{vv}$, quae abit in vnitatem ſi Z in ſuperficie terrae ipſa capiatur; huius ergo vis actio eſt $= \int \frac{C\,dv}{vv} = \frac{-C}{v}$ partem totius actionis

W conſtituens. Tum vero idem elementum Z ad E vrgetur vi $= \frac{E}{uu}$, cuius propterea actio eſt $= \int \frac{E\,du}{uu} = \frac{-E}{u}$. Quoniam vero centrum terrae quod ad E incitatur vi $= \frac{E}{bb}$, in quiete ſpectatur, tanta vi ſingula puncta terrae in directionem contrariam vrgeri ſunt cenſenda, hinc ducta ZY ipſi EC parallela, ſeu ZX ad EC normali, vt ſit $ZY = CX = v \cos.\Phi$, punctum Z inſuper ſollicitari ſtatuendum eſt ſecundum ZY vi $= \frac{E}{bb}$, cuius ergo actio eſt $= \int \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb} = \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb}$. Quamobrem tota actio in puncto Z erit $W = \frac{-C}{v} - \frac{E}{u} + \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb}$, ſicque pro ſtatu aequilibrii habebitur haec aequatio:

$$dp = -q\left(\frac{C\,dv}{vv} + \frac{E\,du}{uu} + \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb}\right)$$

vbi notandum aequilibrium locum habere non poſſe niſi denſitas q ſit vel conſtans vel a ſola preſſione p pendeat, vel functio ſit binarum quantitatum p et W; tum igitur etiam tam denſitas q quam preſſio p certis functionibus actionis W aequabuntur. Pro ſtratis autem aequilibratis aequatio generalis erit $\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{E\,v\cos.\Phi}{bb} = \text{Conſt.}$ Cum autem diſtantia b prae v valde ſit magna, erit per approximationem

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{b} + \frac{v\cos.\Phi}{bb} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2-1)}{2\,b^3} + \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2-3)}{2\,b^4} + \frac{v^4(35\cos.\Phi^4-30\cos.\Phi^2+3)}{8\,b^5}$$

hincque colligitur actio tota omiſſis conſtantibus:

$$W = \frac{-C}{v} - \frac{Evv(3\cos.\Phi^2-1)}{2\,b^3} - \frac{Ev^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2-3)}{2\,b^4} - \frac{Ev^4(35\cos.\Phi^4-30\cos.\Phi^2+3)}{8\,b^5}$$

exiſtente $dp = -q\,dW$. Notandum autem eſt ſi ſemidia-

midiameter terrae vocetur $= k$, fore $\frac{C}{kk} = 1$, ideoque $C = kk$, tum vero si in E sit luna haberi proxime $E = \frac{1}{80} C = \frac{kk}{80}$, sin autem E sit sol eius distantia media a terra existente $= h$, fore $E = \frac{16\,b^3}{390.\,1465^2.\,k^3} C = \frac{C\,b^3}{38894140\,k^3}$ ideoque $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{38894140\,k}$ ob $C = kk$, dum pro luna si eius distantia a terra media ponatur $= h = 60k$ est $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{17280000\,k}$.

Coroll. 1.

129. Siue ergo in E consideremus siue solem siue lunam, posito $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{nk}$ existente pro luna $n = 17280000$, at pro sole $n = 38894140$, erit actio $W = \frac{-kk}{v} - \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$ et pro aequilibrio habebitur haec aequatio $dp = -q^d W$.

Coroll. 2.

130. Pro mari ergo si eius densitatem statuamus constantem $q = 1$, vt pressio p definiatur per altitudinem columnae aqueae, fit $p = \text{Const.} + \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$; qui postremus terminus tuto omitti potest, vnde pro superficie maris vbi $p = 0$, posito semidiametro $CA = k$ vbi $\Phi = 0$, habebitur aequatio $k + \frac{k}{n} + \frac{kk}{nb} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$, vnde colligitur proxime $v = k - \frac{3k\sin.\Phi^2}{2n}$, ita vt fit $CD = k - \frac{3k}{2n}$ existente pro luna $\frac{3k}{2n} = 1\frac{2}{3}$ ped. pro sole vero $\frac{3k}{2n} = \frac{3}{4}$ ped. paris.

Coroll. 3.

131. Pro atmosphaera autem, si in A sit altitudo barometri $= a$ et densitas aëris $= b$ ob $q = \frac{b}{a}p$ fit $l\frac{p}{a} = \text{Const.} - \frac{bW}{a}$ seu $\frac{a}{b}l\frac{p}{a} = \frac{kk}{vv} + \frac{vv(2\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - k - \frac{k}{n}$. Vbique ergo in superficie terrae vbi $v = k$ erit $\frac{a}{b}l\frac{p}{a} = \frac{-2k\sin.\Phi^2}{2n}$ seu $p = a - \frac{2bk\sin.\Phi^2}{2n}$. Quare in A et B barometrum tenebit maximam altitudinem in D vero minimam, differentia existente $= \frac{1}{6000}$ ped. pro luna, at $= \frac{1}{133333}$ ped. pro sole, quae ergo sentiri nequit.

Scholion 1.

132. Sole ergo vel luna in E versante mare tam in A quam e regione in B intumescit, in D vero subsidit, neque tamen differentia maior foret quam $1\frac{2}{3}$ ped. pro luna et $\frac{3}{4}$ ped. pro sole, siquidem haec luminaria perpetuo eidem loco A imminerent vnde si coniunctim agerent, quod fit tam in coniunctione quam in oppositione, maxima maris altitudo superaret minimam fere $2\frac{1}{2}$ ped. Cum autem ambo luminaria continuo ab oriente in occidentem progrediantur, facile intelligitur antequam aquae in A et B confluere queant, luminaria iam vlterius esse promota, vnde fit vt in quoque loco aqua tardius intumescat, quam sol vel luna per eius zenith vel nadir transierit, idque eo magis, quo maiora impedimenta affluxui obstent, veluti si per freta vel loca minus profunda transire cogatur. Tum vero vbi

vbi affluxus iſte maiori celeritate contingit, ob impetum conceptum fieri poteſt, vt aqua ad multo maiorem altitudinem eleuetur, quam pro ratione aequilibrii: cum enim tantum aquae affluat, quantum ad inſignem maris tractum tumefaciendum ſufficeret, ſi mare ſubito littoribus in anguſtum ſpatium coarctetur, omnis aqua eo affluens ad inſignem altitudinem aſcendere debebit, quemadmodum ſatis nota aeſtus marini phaenomena declarant.

Scholion 2.

133. Videamus etiam accuratius, quemadmodum atmoſphaera a tali actione afficiatur, et quanta in ea aſcendendo vbique denſitas et preſſio ſit futura. Terrae igitur ſuperficiem ſphaericam aſſumentes, cuius radius ſit $= k$, ſi in loco quocunque a recta C E angulo $= \Phi$ remoto per altitudinem $= s$ aſcendamus vt ſit $v = k + s$, ex aequatione ſupra inventa colligimus fore proxime $p = a - bs - \frac{2bk\,\mathfrak{ſin}.\Phi^2}{2n}$, dum ſcilicet altitudo barometri in A ſtatuitur $= a$, et aëris denſitas $= b$, mercurii denſitate exiſtente $= 1$. In altitudine ergo iſta s denſitas aëris erit $q = \frac{bp}{a} = b - \frac{bbs}{a} - \frac{2bbk\,\mathfrak{ſin}.\Phi^2}{2na}$, vnde ſi in hoc loco columnam aeream conſideremus cuius baſis ſit $= ff$, maſſa aëris in ea contenta erit $= ff\int q\,ds = ff(bs - \frac{bbss}{2a} - \frac{2bbks\,\mathfrak{ſin}.\Phi^2}{2na})$. Talis ergo columna in A vel B conſtituta continebit quantitatem aëris $= ff(bs - \frac{bbss}{2a})$, at

at ſimilis columna in D quantitatem aëris $= ff(bs - \frac{bbss}{2a} - \frac{3bbks}{2na})$ ex quo illa hanc ſuperat quantitate $= \frac{3bbffks}{2na}$. Quare neceſſe eſt vt inſignis portio aëris in loca A et B affluat, in regionibus D autem atmoſphaera minuatur, vnde in aere ſimilis motus reciprocus atque in mari oriri debebit neque tamen barometrum in A vel B hoc aëris augmentum indicabit, propterea quod ob vim ad E vrgentem grauitas aëris eo congeſti diminuitur. Quanta autem celeritate aër verſus loca A et B affluat, dum luminaria ab E promouentur, hinc minime definire, neque etiam probabili modo coniectare licet, cum iſta quaeſtio theoriam aequilibrii longe tranſcendat. Quae autem hactenus de aequilibrio fluidorum ſunt tradita omnino ſufficere videntur omnibus quaeſtionibus huc ſpectantibus euoluendis: neque propterea vlteriori explicationi immoror ſed potius progredior ad principia motus fluidorum ſtabilienda, quae multo maiorem curam ac diligentiam requirunt.

PHYSICA.

DE CALORE ANIMALIVM DISSERTATIO PHYSICA EXPERIMENTALIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Habent corpora terreſtria ſuum calorem, qui per orbem terrarum diſtributus, vti per totum Planetarum ſyſtema eſt, ita vt nullus locus et nullum corpus, quod omni calore et igne careat, eſſe videatur. Facile hinc iudicari poteſt, quid de frigore abſoluto, quod nonnulli ſomniant, ſit habendum. Fac dari eiusmodi locum et corpus quod omni calore et igne plane careat, quomodo igitur eiusmodi frigus abſolutum cognoſci poteſt et determinari? Summum frigus, quod in his terris adhuc innotuit, eſt illud, quod ego primus arte produxi, dum hydrargyrum congelare animum induxi, et reuera congelaui, non multum vltra ſexcentos gradus ſcalae Delilianae haberi poteſt; ſed multo maiorem frigoris gradum eſſe poſſibilem, nemo facile dubitabit, qui vero determinabilis non videtur. Eodem modo ſummi caloris et ignis gradus determinatio non eſt in poteſtate, ſed de hoc alias. Cete-

rum corpora orbis terrarum non aequalem habent calorem. Huc ſunt referenda corpora vita praedita, praecipue corpora animalia. Habent enim animalia, ſi non omnia, pleraque tamen, calorem quendam additiuum ſeu additititium, quem quoque vitalem, inſitum et innatum vocare ſolent. Hic calor omnino mirabilis, et omni attentione dignus merito reputandus eſt, vti quoque ſemper a viris eruditiſſimis eſt reputatus. Nam in diuerſis animalibus deprehenditur diuerſus, maior, minor et vix ac ne vix quidem ſenſibilis. Deinde hic calor admiratione et conſideratione dignus eſt quod conſtans ſit, ſcilicet idem caloris gradus diuerſo tempore et loco, cum hac tamen reſtrictione vt corpus animale ſanum ſit et maneat. Nam calor animalis non manet conſtans, ſi corpus in morbum et ſtatum praeternaturalem incidit, et extraordinarium. In animi deliquiis vix ac ne vix quidem calor eſt ſenſibilis, contra ea in febribus ardentibus calor hic incrementa maiora et minora ſumere ſolet, vt experimenta demonſtrarunt, vt alia attentione digna nunc taceamus. Progrediamur igitur ad ipſa experimenta, quae animalium calorem additititium demonſtrant. Hunc calorem eſſe exploratum thermometris ordinariis facile adparet, quum gradus caloris tanti non ſit, vt aliis inſtrumentis opus ſit, qualia ſunt Pyrometra, Machina Mortimeri, qua conſtat multo maiores caloris gradus metiri, quam thermometris ordinariis, quae praeterea etiam ad huius

ius generis experimenta inſtituenda non apta et adcommodata ſunt. Vſi ſumus thermometris vtplurimum Delilianis, in quibus vti conſtat o ſiue ziphra indicat aquae bullientis calorem, et numerus 150. punctum congelationis aquae. Longitudo thermometri erat mediocris, ſcilicet octo aut nouem pollices pariſienſes vix excedens, longiores enim minus commode tractari poſſunt. Bulbus thermometri erat ſphaericus, vt commode inſeri in cauitatem animalis factam poſſet, et generatim melius adplicari. Plerumque vno eodemque thermometro vſi ſumus, niſi neceſſitas illud mutare coegerit, v. c. dum fractum fuit, aut aliud vitium contraxit. Quum conſtet thermometra ceteris paribus ſub eadem barometri altitudine impleri debere ſi concordare debent; quae adhibui omnia, impleta ſunt ſub altitudine fere media 28. ſc. pollicum pariſienſium. Porro et haec cautio in explorando animalium calore eſt obſeruanda, vt ſufficiens adhibeatur tempus. Sin minus, gradus caloris quoque erit minor. Sufficiens tempus illud erit iudicandum, ſi mercurius non amplius adſcendat, ſed ſubſiſtat, qua cautela neglecta experimenta non poſſunt non fieri vitioſa, vti iam multa id genus vitia in obſeruationes et experimenta irrepſere, et diſſenſum in experimentis fecere.

Situs oculi quoque recte comparatus eſſe debet i. e. ne ſupra et infra punctum thermometri obſervandum ſit conſtitutus. Alias facile vnius alterius-que gradus error, vel in defectu committi poteſt, vel

in exceſſu. Quam exactiſſime igitur fieri poteſt, ſitus oculi cum puncto thermometri conuenire debet. His cautelis obſeruatis experimenta mea thermometro Delisliano rite conſtructo inſtitui. Notaui gradum, vbi ſubſiſtebat mercurius in thermometro, qui igitur ſummus caloris gradus caloris animalis erat. Primum experimenta fecimus ad hominis ſani calorem explorandum quam adcuratiſſime. Inſerui vtplurimum thermometrum vel in os meum vel in os aliorum, et tam diu ibi detinui, donec hydrargyrus in thermometro non amplius adſcenderet; quo facto obſeruaui mercurium circa numerum 96, et 95 ſtetiſſe ſcalae Delilianae. Conuenit numerus hic 95 cum numero 98, et 96 cum numero $97\frac{1}{7}$ ſcalae *Fahrenheitianae.*

Fahrenheitius iam calori humano attribuit ſc. 96° ſcalae thermometri ſui. Conuenit hic numerus cum gradu $96\frac{2}{3}$ thermometri Delisliani. Differentia igitur inter obſeruata mea et inter *Fahrenheitiana* non magna eſt, ſcilicet vnius gradus aut ad ſummum duorum graduum. Multo maior vero differentia reperitur inter mea et aliorum nonnullorum obſeruata, dum 91. 92. 93. 94 et 95. ſcalae *Fahrenheitianae* calori humano adſignarunt. Quum igitur hi gradus omnes multo minores ſint his, quos ego per innumera reperi experimenta: facile iudicari poteſt, tempus non ſufficiens eſſe adhibitum donec ſc. mercurius non amplius adſcenderet, et mercurius calorem perfecte adſumeret. Calor vrinae fere con-

conuenit, debitis cautelis adhibitis, cum calore indicato, vnum tamen gradum et ad ſummum $1\frac{1}{2}$ hic calor vrinae maior obſeruatus mihi eſt, qui gradus ſine dubio gradus caloris viſcerum adiacentium eſt. Nam a calore ſanguinis procul dubio pendet calor partium corporis humani et animalium calidorum; hinc mirum non eſt omnes corporis humani partes et animalium fere aequalem habere calorem. Cautio in calore vrinae explorando haec inprimis eſt neceſſaria, vt vitrum ſeu vas calorem vrinae iam fere poſſideat, vas enim nondum ſat calidum ſiſtit gradum caloris minorem. Obtinetur autem haec temperies optime, ſi experimentum demum inſtituatur, poſtquam iam vitrum ſemel vel aliquoties vrina recens miſſa, fuit imbutum. Quodſi igitur vrina animalis recens tam facile haberi poſſet, quam hominis, expedita eſſet methodus calorem viſcerum animalium adcurate explorandi. In quibusdam difficultas non adeo magna reperitur. Sunt haec experimenta inſtituta tempore diuerſiſſimo et loco in diuerſiſſimis ſubiectis; pueris, puellis, adultis, et ſemper calorem fere eundem obſeruaui, ſi vnum et ad ſummum $1\frac{1}{2}^{\circ}$ gradum ſed raro, excipias, poſita ſcilicet ſanitate hominis. Hoc quoque de diverſo ſexu intelligi debet. Nam differentia tam in ore, quam in vrina ſaepius vix ſenſibilis deprehendebatur. Eſt hic gradus caloris corporis humani minimus inter corpora animalia quadrupedia, vti experimenta mox adducenda demonſtrabunt. Calorem

rem animalium quadrupedum ſequentium fere exploravimus. Calorem vituli et bouis; porcelli et ſuis; capellae et caprae; agni et ouis; canis, felis etc.

Ad calorem vituli quod attinet vt ab eo incipiam, eum reperimus 90. graduum thermometri noſtri ſeu ſcalae delilianae, tam in ſanguine recens effluente, quam in abdomine ſecto. Hic gradus 90. conuenit cum numero 104. ſcalae *Fahrenheitianae*. Quod ſi igitur calor hominis ponatur aequalis 96. *Fahrenheitii*: ſequitur, vt hic gradus caloris ſuperet calorem hominis 8. gradibus, vel ſi ponatur 97. ſeptem gradibus maior erit calor vituli quam hominis.

Eundem caloris gradum quoque reperi in porcello ſcilicet aequalem 90° noſtrae ſcalae. Ergo et hic gradus caloris maior erit 8 vel 7 gradibus caloris hominis.

Calorem capellae tam in ſanguine recens effluente, quam in abdomine ſecto reperi = 92° ſcalae noſtrae, qui gradus conuenit cum numero $101\frac{1}{2}$ ſcalae *Fahrenheitii*. Eſt igitur hic caloris gradus minor, quam antecedens vituli et ferculi, maior tamen humano $4\frac{1}{2}$ gradibus Fahr. Calor agni et ouis a calore capellae et caprae parum aut nihil omnino differebat. Calorem canium et felium non exploraui per ſectionem viuam, vti in antecedentibus animalibus feci, ſed tantum inter femora. Inveni

veni calorem felis = 92 ſcalae noſtrae eoque = $101\frac{1}{2}$ Fahr. Eſt igitur et hic calor, vti capellae, $4\frac{1}{2}^{\circ}$ Fahr. maior humano. Sed ſolet calor internus viſcerum et ſanguinis 2. gradibus maior eſſe, ſi ſecentur; addendi igitur adhuc erunt duo gradus, ita vt calor ſanguinis et viſcerum felis maior humano cenſendus ſit $6\frac{1}{2}$.

Calorem canis vel canum inter femora reperi = 93. thermometri noſtri, qui caloris gradus conuenit numero ſcalae Fahrenheitianae $100\frac{1}{2}$. Quodſi et hic duo gradus addantur, calor internus viſcerum et ſanguinis canum erit cenſendus = $102\frac{1}{2}$ ideoque maior humano $6\frac{1}{2}$ vel certe $5\frac{1}{2}^{\circ}$.

Haec hic ſufficiant de animalibus quadrupedibus, quorum calorem exploraui et explorandi occaſionem habui, alia alio tempore.

Quodſi haec experimenta recte conſiderentur, et comparentur, patebit primum calorem hominis omnium quadrupedum exploratorum eſſe minimum. Nam minor gradus quam 96. et noſtri thermometri, et Fahrenheitii, calor horum animalium non eſt deprehenſus, ideoque non minor calore humano. 2). Porro gradum 90. noſtri thermometri eſſe maximum in animalibus quadr. quorum calor mihi exploratus eſt = ſcilicet 104. ſcalae Fahrenheitianae. Non autem exiſtimandum eſt hunc gradum 90. ſive 104. Fahr. caloris, eſſe maximum omnium quadrupedum, neutiquam, dantur ſine dubio maiores;

qui vero adcurate explorati non ſunt, vti quoque qui ſit maximus, nondum conſtat. Sed de his alias. Differentia caloris inter haec animalia non adeo magna eſt, ſcilicet tantum graduum 8. Fahr. a 96 ad 104. f.

At enim vero differentia caloris multo maior eſt in auibus. Hae enim ſuperant calorem quadrupedum, vti ex ſequentibus patebit experimentis. Aues varii ſunt generis, quarum calorem exploraui, vt anſeres, gallinae noſtrae et indicae, gallopaui, anates, columbae et varii generis aues minores. Calorem anſerum inueni in abdomine ſecto et ſanguine = 87 ſcalae noſtrae, qui numerus conuenit cum numero $107\frac{1}{5}$ ſcalae Fahr. Eſt igitur hic gradus caloris maior $10\frac{1}{2}^{\circ}$ F. calore humano, et calore quadrupedum, quos exploraui, maior $3\frac{1}{2}$ Fahrenh. Nam 104° F. maximus caloris gradus eſt, quem deprehendi inter animalia quadrupedia, qui numerus conuenit cum 90. ſcalae noſtrae. Eundem caloris gradum quoque inueni in diuerſis aliis ad auium genus pertinentibus, vt gallinis et gallis gallinaceis in abdomine ſecto et ſanguine.

Eundem quoque caloris gradum conuenire obſeruaui anatibus, gallopauis et gallinis indicis ſeu Africanis, columbis, ſcilicet in abdomine ſecto et ſanguine. Parua enim aut nulla differentia reperta eſt mihi inter calores harum auium maiorum. At enim vero mirandum videtur aues minores maiorem

rem poſſidere caloris gradum vtplurimum. Reperi nempe in duabus auibus minoribus rubeculis dictis, gradum caloris = 84 noſtri thermometri.

Conuenit hic numerus cum numero 111 ſcalae Fahr. aut propius $111\frac{1}{3}$. qui eſt maximus caloris gradus, quem inter aues adhuc obſeruaui. Superat igitur hic caloris gradus calorem humanum 15 fere gradibus, et quadrupedum qui eſt = 90 = 104 ſeptem gradibus. Sub alis auium duorum graduum minorem reperi, vtplurimum calorem, quam in ſanguine et abdomine ſecto, vti inter femora quadrupedum eſſe quoque ſolet.

Eſt igitur differentia caloris inter ipſas aues ſat parua, ſcilicet trium graduum noſtri thermometri, et inter aues maiores fere nulla, licet hic calor, ſi cum calore hominum et animantium quadrup. comparetur, omnium ſit maximus.

Sed veniendum nunc eſt ad animalia frigida ſic dicta, quae ſecundum experimenta noſtra, omni calore addititio carent, ſed tantum calorem habent medii ambientis, fluidi aquae et aëris. Huc pertinent primum potiſſimum piſces branchias agitantes, et pulmone carentes.

Piſces varii generis fuere, circa quos cepi experimenta, vt lucii, anguillae, bramae (Braxen) carpiones ſiue cyprini, lampretae et alii. Omnes hos piſces calore additiuo carere, innumeris reperi experimentis, adcuratiſſime inſtitutis. Immiſi piſces in

diuerſas aquas, diuerſae temperiei, et ſemper obſervaui piſcem eam temperiem aquae adſumſiſſe, in qua ſatis diu fuit detentus, quamuis differentia temperiei ſat magna erat.

Summa cautio eſt adhibita, quum piſces aperirentur, ne calor manus afficeret thermometrum; foramen feci tantum in ventre piſcium, vt bulbus thermometri inſeri poſſit, quo facto ſemper obſervaui eundem caloris gradum fuiſſe piſcis, ac aquae ambientis.

Non igitur videtur dubitandum, quin ſi piſces dicto calore interno plane non careant, is tamen certe non ſit ſenſibilis et obſeruabilis, vti in plantis, arboribus et ſucco arborum. Diuerſa autem ratio caloris animalium marinorum et piſcium pulmones habentium eſt. Haec enim aeque ac animalia terreſtria ſuum habent calorem additicium, vti delphinus, canis marinus. Phocae enim calor 103 tribuitur, ideoque 7 gradibus F. maior humano. Par eſt ratio inſectorum, licet congregata calorem quendam efficere poſſint, qui tamen ad calorem internum referendus proprie non eſt. Porro ad animalia calore additiuo carentia quoque pertinent ranae quas exploraui.

Circa ranas quoque plurima cepi experimenta, quae eodem modo inſtitui, quo circa piſces. Scilicet, aqua in quam immiſi ranas, erat diuerſae temperiei. Pro hac diuerſitate temperiei et caloris, ranae quoque diuerſum poſſidebant calorem, et ad-

adſumebant. Sed et hic, vti in piſcibus, magna opus eſt cautione, ne quid alieni caloris immiſceatur, et vitium ſubreptionis committatur, a quo procul dubio non ſunt immunes, qui ranis aliquot caloris interni gradus tribuere, independentes a fluido vel generatim medio ambiente, aëre et aqua etc.

Denique ad animalia calore additiuo carentia ſunt referenda animalia alias calida, ſed hieme ſomno ſepulta, eoque vita minima tantum praedita. Mures alpini, vti marmora hieme iacent. Sic in aliis quoque animalibus hieme dormientibus, nullum calorem vitalem obſeruare licet. Nullam hic quidem propriam experientiam et propria experimenta ſequi poſſum; ſtudebo tamen et meis obſervationibus et experimentis, ſi fieri poterit, haec confirmare. Alia nunc praeterimus, quae in poſterum forſitan addemus et cum aliorum obſeruatis, adcurate comparabimus. Nam facile intelligitur haec experimenta a me facta et recenſita, omnia plane noua, et primum a me inſtituta non eſſe.

Inſeruient tamen etiamſi antea facta, vti generatim experimenta de nouo inſtituta ſeu repetita 1) ad confirmanda antecedentia; 2) vel ad corrigenda et emendanda; 3) ad perficienda; 4) falſa et erronea refutanda, et infirmanda; 5) dubia et controuerſa certa reddenda, et decidenda, quaeque ſibi contraria, concilianda. Experimenta vero non repetita, ſemper minorem

habere fidem quam repetita cenſentur, idque iure meritoque.

Quae in antecedentibus adduxi experimenta, potiſſimum pertinebant ad hominem animaliumque ſanorum calorem internum inuariabilem. Calor vero eſt variabilis et diuerſus in hominum et animalium morbis, maior ſcilicet et minor pro varietate morborum; maior in febribus ardentibus, minorque in animi deliquiis. Hinc thermometra iam ab antiquis inde temporibus ad ſtatum valetudinis explorandum ſunt adhibita, vt a Sanctorio et aliis; variabilis tamen hic calor praeternaturalis ad certum tantum terminum deprehenditur adſcendere; praeſertim in febribus ſcilicet ad gradum 105 et 106. 7 et 8. thermometri Fahr. Hic notatu dignum eſt, in febribus exiſtente etiam paroxismo frigoris duos et tres caloris gradus reperiri plures, quam in ſtatu ſanitatis hominis. Sed haec ſunt diligentius adhuc excutienda, pauca enim adhuc ſunt huius generis experimenta genuina, in plerisque ingentia ſubreptionis vitia commiſere, dum non ad legem thermometri, ſed ad ſenſum, calorem determinare conati ſunt. Hinc gradus caloris tradidere tam magnos, vt manifeſto viuere homines et animalia non poſſent amplius.

Suntne igitur certi determinatique gradus caloris, quos tolerare poſſunt homines et animalia, et quos ferre nequeunt ſed moriuntur et pereunt calore

calore vel frigore? Sunt omnino; ſed in diuerſis ſubiectis diuerſi. Hominum alii maiores, alii minores caloris et frigoris gradus ſuſtinere poſſunt, prouti conſuetudo, altera natura vel ſuffragatur, vel minus.

Vtplurimum tanti caloris gradus tolerantia illis tribui ſolet, quantus eſt ille, qui eorum ſanguini conuenit.

At enim vero multo maiorem caloris gradum homines et animalia perferre poſſunt, certe ad breue tempus, et pro conſuetudine maiore et minore, tam in balneis, quam in locis calidioribus. *Richmannus* pro ſua conſuetudine ferre potuit in tepidariis gradum 125. Fahr. vti et mihi, quum hoc experimentum faceret dixit, et ſcripto quoque annotauit.

Calor in tepidariis ruſticis ordinarie eſſe ſolet 88 noſtri thermometri, qui eſt aequalis $106\frac{1}{2}$ Fahr. Et ſi ſunt calidiſſima calor deprehendi ſolet 80°, eſt hic gradus aequalis 116 Fahr. Gradus igitur caloris, quem *Richmannus* ſuſtinuit, maior adhuc eſt nouem gradibus. In calore tepidariorum recte indicando reſpiciendum eſt ad altitudinem, in quo thermometrum eſt ſuſpenſum. Nam quo maior haec eſt, eo maior quoque eſſe ſolet et debet caloris gradus, quum ſurſum tendat calor, vti conſtat. Bene tolerari ſaepius poteſt calor inferior, quum paullo ſupe-

ſuperior ſuſtineri nequeat vti ipſe expertus in caſis ruſticorum in Liuonia ſum. Non potui ibi erectus ſtare, ſed ſedere debui, quo modo calorem alias mihi intolerabilem facile toleraui. Par eſt ratio animalium. Poſſunt et haec maiorem caloris gradum perferre, quam eſt calor ſanguinis eorum. Canes in vaporariis incluſi vario caloris gradu periere 115. 120. 146. Cyprini viuere poſſunt in aqua calida 92 et 94. In gradu 111. Fahr. piſces mortui, ranae tamen adhuc viuere poſſunt.

In calore = 146. Fahr. paſſer mortuus eſt intra ſeptem minuta, et in eodem calore paullo poſt periere canis et felis. Multa hic ſuperſunt vel plane non determinata vel non adcurate. Difficilius multo determinari poteſt gradus frigoris, quem homines ferre poſſunt et animalia et quibus frigoris gradibus moriuntur et pereunt. Et hic conſuetudo multum facit. Pueri ruſticorum hic maiorem frigoris gradum facile ferre poſſunt, quam alibi. Diverſo frigoris gradu et homines et animalia moriuntur et pereunt, et ſub diuerſis circumſtantiis, quarum omnino ratio eſt habenda. Aues migratoriae et quae ſe occultant cum aliis animalibus hieme dormientibus, minimum frigoris gradum ſuſtinere poſſe videntur; id quod etiam de inſectis valet, quae quidem maximum caloris, ſed minimum frigoris gradum ferre poſſunt. Eſt et hic magnus campus nondum cultus et excultus. Pereunt plantae diuerſo

ſo frigoris gradu, pereunt homines et animalia, itidem diuerſo frigoris gradu, qui gradus aut nondum, aut non ſatis adcurate ſunt determinati, vti quoque re vera tam facile determinari non poſſunt. Plantae quoque poſſunt maiorem et minorem frigoris gradum ſuſtinere. Vnde diuiſio inter plantas calidas et frigidas nata eſt.

Denique quaeritur, vnde ſit hic animalium calor internus, additiuus, quum non pendeat a mediis ambientibus et circumſtantiis? Sententiae hic in magna ſunt poſitae varietate, quarum nulla ſua caret difficultate, hinc haec quaeſtio ſemper pro difficillima enodatu eſt habita. Alii potiſſimum ad fermentationem quandam in ſanguine prouocant, alii ad electricitatem, alii ad motum ſanguinis progreſſiuum. Alii ſufficere hic putant hunc animalium calorem addititium adpellare innatum, quaſi hac ratione intelligerentur ortus et geneſis caloris in ſanguine et partibus animalium. Eſt qualitas hoc ſenſu obſcura Scholaſticorum calor innatus.

Qui ad fermentationem prouocant ſibi videntur actionem caloris in efferueſcentia et conflictu partium ſanguinis potiſſimum inuenire. Philoſophari hi quidem non male viderentur, modo eiusmodi motus inteſtinus demonſtrari poſſet. Hunc vocare occultum rem non conficit, et decidit vtrum eiusmodi motus fictus ſit an realis.

Non melius hic philoſophari videntur qui cauſſam caloris huius in electricitate poſitam exiſtimant. Sed et hoc gratis aſſeri videtur, quod vero pluribus oſtendi poſſet, ſi ſpatium et ſcopus hic permitteret. Alias hypotheſes lubens praetereo.

Optime igitur omnium omnino philoſophari cenſendi ſunt, qui rationem caloris animalium in motu ſanguinis progreſſiuo quaerunt, attritu et frictione. Nam diminuto motu ſanguinis, diminuitur quoque calor ſanguinis et animalis partium, vti euidentiſſime, animae deliquia hominum, et, illa animalia oſtendunt et demonſtrant, quae hyeme dormire et ſomno ſepeliri ſolent. Nam in his vita minima tantum ineſt, et motus ſanguinis minimus, vix ac ne vix quidem ſenſibilis. Iacent enim quaedam, vt mures alpini ad inſtar marmorum. Par ratio eſt omnium aliorum in hibernaculis ſuis dormientium et ſomno ſopitorum animalium. Concludendum hinc omnino videtur, vt alias; ceſſante cauſſa caloris animalium interni, ceſſare et ipſum calorem tanquam effectum et ceſſante effectu, ipſam quoque cauſſam ceſſare debere. Si motus aquae celeris et aliorum fluidorum per canales ſenſibilem caloris effectum non producunt, videtur potiſſimum hoc inde eſſe, quod non ſatis ſint heterogenea, vti ſanguis animalium eſt, quae attritum et frictionem ſatis validam efficere queant. Sed ſubſiſtendum hic mihi eſt, plura et

ſupple-

ſupplementa dabo in poſterum. Ceterum, vti in tota ſtructura et conformatione machinae hominum et animalium, Dei omnipotentia, ſapientia, et bonitas eſt admiranda, ſic inprimis quoque in hoc, quod vitam, ſanitatem, quin ſuauitatem vitae dependentem a calore interno et motu ſanguinis per cor aequabili fecerit, turbato enim hoc motu, animi quoque tranquillitas turbari ſolet.

DE OSSIBVS SIBIRIAE FOSSILIBVS CRANIIS PRAESERTIM RHINOCEROTVM ATQVE BVFFALORVM, OBSERVATIONES.

Auctore

P. S. PALLAS.

Quamprimum Muſei Ill. Academiae curam gerere atque diuitias perluſtrare coepi, ſtatim adtentiore examine digna mihi viſa ſunt *oſſamenta foſſilia* animalium exoticorum, quae ex omnibus Imperii Ruthenici, praeſertim e borealibus Sibiriae regionibus aduecta, maximo hodie numero et infinita paene varietate Muſeum illud ornant. Sunt ea maximam partem Elephantorum variae magnitudinis ac aetatis reliquiae, numeroque ſatis probant immenſam horum animalium copiam, quae per vniverſam borealem Aſiam, a patria elephantorum hodierna remotiſſimam, ſparſim defoſſa iacent. Quanquam enim, poſterioribus maxime ſaeculis, increbreſcente curioſorum in conquirendis naturae miraculis induſtria, in Germania (*a*), Italia (*b*), Gallia

(*a*) Sic inclaruerunt oſſa foſſilia prope Canſtadium in Sueuia reperta, de quibus egerunt *Dav. Spleiſſius* in *Oedipo oſteologico*. *Scaphuſ.*

lia (*c*), Anglia (*d*), Polonia (*e*), imo extrema quoque Islandia (*f*) vario tempore variisque in lo-

 cis

Scaphuſ. 1701. 4. Io. Chr. Harenberg in tractatione *de Lilio lapideo ſ. Encrino Guelpherbit. 1729. 4. c. f.* et I. Sam. Carl in *Lapide Lydio philoſophico-pyrotechnico ad oſſium foſſilium docimaſiam analytice demonſtrandam adhibito. Franc. ad M. 1704.* Dein famoſum eſt ſceleton elephantinum in collis arenoſi intemeratis ſtratis repertum prope *Bergtonna* inter Erfurtum et Longoſaliſſam Thuringiae; de quo conſule I. Geo. Hogervm in *Miſcell. Nat. Cur. dec. 3. an. 7, 8. p. 294. obſ. 175.* praeſertim vero Gvil. Ern. Tentzelivm in *epiſtola ad Anton. Magliabecchium Goettingae 1696. 4.* poſteaque *Ienae 8.* germanico idomate edita; vt et in *Act. anglic. vol. 24. n. 234.* Vt alia praeteream, v. gr. oſſa et dentes veroſimillime elephantina Manhemii ex antiqua ripa Nicri fluuii effoſſa, de quibus Ioh. Dan. Geyer. in *Miſc. N. C. dec. 2. an. 6. p. 176. obſ. 85.* et imprimis celebrem cauernam ſyluae Hercyniae, prope Elbingerodam, cui Bavmannianae nomen, de qua Conr. Gesnervs in libello *de figuris lapidum p. 155. 157.* aliique.

(*b*) In Italia Auctores perpauci oſſium foſſilium memorias ſuppeditant; aliqua tamen habent recentiorum nounulli, qui nunc ad manus non ſunt, et Hier. Ambr. Langemantel in *Miſc. N. cur. dec. 2. an. 7. p. 466. obſ. 234.*

(*c*) Carolo VII. imperante, circa an. 1456. reliquias elephanti in Gallia effoſſas, aliaque Gallorum de oſſibus gigantum prodita eodem referenda, aſſerit Moanevs in *Act. angl. vol. 34. n. 403.* Recentiora Eboris in Gallia effoſſi, etiam in Turcheſiam mutabilis, exempla vide apud Ill. Bvffonivm *hiſt. nat. vol. XI. ed. min XXII. p. 209. ſeqq.* et oſſium aliorum *p. 208. 227.*

(*d*) In ducatu Northamptonienſi ex argilla effoſſa fragmina dentium elephantinorum exſertorum, nec longe ab eo loco inventum

cis eruta fuerint ſceleti elephantini, gigantea fragmenta et ebur foſſile in omnibus fere apud exteros Muſeis occurrat, nulla tamen vnquam regio tot tanta-

---

ventum molarem MORTONVS habet *nat. hiſt. of Northamptonſ. p. 252.* Et in Staffordiae comitatu in marga repertam maxillam elephanti ROB. PLOT *nat. hiſt. of Staffordſ. p. 78.* Vnaque cum iſtis Gloceſtriae et Londini repertas reliquias eiusdem belluae, e proprio Muſeo recenſet Ill. SLOANE l. c. In Hybernia quoque occidentali, quatuor pedibus ſub terra profunditate, ſupra ſtratum e ramis et herbis reperta fuerunt oſſa magna, friabilia, cum quatuor maximis dentibus veroſimillime elephantinis; obſeruantibus NEVILLE et TH. MOLINEUX in *nat. hiſt. of Ireland Dublin. 1726. 4. p. 128.*

(*e*) In Polonia lectum Ebur foſſile memorat CONR. GESNER *de fig. lapid. p. 157.* et circa Gedanum KLEIN *hiſt. nat. piſcium Miſſ. II. p. 29-32.* ad Viſtulam haud procul a Varſauia RZACZINSKI *hiſt. nat. cur. Polon. p. 1, 8.* qui etiam varia ex aliis auctoribus collegit, praeſertim circa antra ſic dicta draconum Liptovienſia Hungariae, oſſibus variis, etiam elephantinis, ſparſa, de quibus autopta narrat, et dentes ibi lectos vrſi vel leonis caninos celebrat BRVCKMANNVS *epiſt. itiner. cent. I. ep. 77. p. 12. ſeq.* Aliis quoque Pannoniae in locis reperta varia ex elephanto, coſtas, vertebras, dentes exſertos atque molares, tibiam, maxillam, recenſet et partim delineat, Ill. Comes MARSILLI in *Danub. Pannon. Myſici vol. II. Part. I. p. 73. tab. 28-31.* Contra *quem* vero et GOROPIVM in Belgio a Romanis elephantorum reliquias deriuantes pugnat, et diluuiana eſſe mauult SLOANEVS *l. c. p. 510. ſeq.*

(*f*) Exemplum rariſſimum reperti in Islandia molaris elephantini prodidit BARTHOLINVS *Actor. Hafnienſ. vol. I. p. 83. obſ. 43.* Forſan et huc aliqua faciunt ab OLIG. IACOBAEO recenſita.

tantaque in hoc genere grauiſſimarum et antiquiſſimarum telluris mutationum monumenta prodidit, ac Sibiria noſtra, cuius ſubterraneum Ebur, quamquam hodienum nonniſi caſu riparumque ad maiora flumina ruinis detegi ſolaet, ea tamen ſic quoque copia legitur, vt inter merces indigenas non vltimum obtineat locum, illud praeſertim, quod in terris hyperboreis aeterno gelu rigentibus repertum, plane incorruptum et tornatili operi adhuc aptum eſt.

Miraretur nemo, ſi in Italia, Hiſpania, Galliisque ſolis inuenta fuerint elephantina oſſa, quum in has regiones Punicis maxime bellis, et in Italiam Tarentino quoque, imo et ad luxuriam ſpectaculorum, inſignes horum animalium greges adductos fuiſſe, ibique periiſſe, ex hiſtoriis conſtet. Ad ſimiles itaque caſus, poſt explosam vulgi in Sibiria de bellua ſubterranea maxima (*Mamont*) fabulam (*g*), multi etiam docti viri oſſamenta elephantorum Sibirica referre haud dubitarunt: animalia illa modo a Iudaeis, quos *Rudbeckius* in borealem Aſiam migraſſe

(*g*) De his vulgi in Sibiria ineptiis imprimis euoluendi ſunt Ill. Basil. Nicetae fil. Tatischtschev in *Actis Vpſalienſibus* et Gmelinvs in *Itinerario Sibirico*. Deinde vero Ysbrandvs Ides atque Strahlenbergivs. Vocabulum *Mamont*, quod Belluae fabuloſae tribuitur, et vnde Ruſſi oſſa foſſilia *Mamontouaia koſt* appellarunt, veroſimillime Tataricae originis eſt, quorum lingua: *mama* terram ſignificare accepi.

graſſe ſomniauerat, modo ab Alexandro M. imo a recentioribus quoque Aſiae domatoribus, Tſchingischano et reliquis Mongalorum imperatoribus (*h*) in longe diſſitas haſce regiones deducta fuiſſe perhibentes; quorſum tamen illorum neminem vnquam penetraſſe, multoque minus tot Elephantos viuos deducere potuiſſe, ſatis conſtat. Quandoquidem vero in media Italia, vbi tot circenſibus maxime ludis elephantos periiſſe ſcimus (*i*), ſubterranea eorundem veſtigia nonniſi rariſſime detecta fuerint; contraque elephantina, cum ipſo, apud omnes tamen facile populos pretioſo, adeoque non defodiendo aut temere abiiciendo ebore, ſaeculi iam fere ſpatio, per vniuerſam, qua ad extremum orientem atque boream

(*h*) Cel. Bayervs hanc viam multis argumentis munire adlaborauit, et in Mungalorum quidem patriam et auſtraliorem Sibiriam elephantos facile perducit, per bella Mungalorum, ſi fides hiſtoriis, cum Indis et Tataris geſta. Conf. *Petersburg. Anmerk. über die Zeitungen an. 1730. n. 90. p. 359. ſeq.* Vbi tamen ſimul improbatur haec quoque ſententia, ob immenſum dentium eburneorum in Sibiria iam ab vltimo inde ſaeculo quotannis lectorum, cui numero elephantorum bellicorum vniuerſae Indiae exercitus ſufficere haud potuiſſet; nedum ſi perpendas multo maiorem oſſium vim in terris intactis vaſtiſſimis adhuc latere, quae poſteros manet, imo forte nunquam exhaurietur.

(*i*) Teſtis praeſertim Plinivs *hiſt. nat. lib. VIII. cap. 6.* vbi L. Metelli pontificis victoria 142. elephantos in Sicilia de Poenis captos et in Italiam transuectos, ibique periiſſe narrat; cap. 7. variis temporibus in circo exhibitos et confectos enumerans.

ream lat ſſime patet, Sibiriam ſeſe magna copia manifeſtauerint, longeque maiorem vim, non tantum prope flumina, vbi caſu, vti dictum, deteguntur, ſed per totam illam continentem terram latere credibile ſit; tantum belluarum exercitum in regiones illas inhoſpitas humana opera deductum non fuiſſe, ſed elephantinum forte genus, temporibus omni traditione humana anterioribus, in his ipſis terris, mitiore tunc certe coelo gaudentibus, atque, ſi dicere fas ſit, ſoli magis obuerſis, diu vixiſſe multiplicaſſe, et pereuntium cadauerum oſſibus ſolum ditaſſe, quidni potius concludamus? Nihil enim nunc moror ſententias eorum, qui vel voluntaria obcoecatione miraque pertinacia intra terram genita, cum petrefactis vulgo dictis omnibus, oſſa Sibirica putarunt, vel ſub diluuii vniuerſalis aliusue globi cataſtrophes tempus, profugos Elephantas, cum reliquis calidioris coeli animalibus, in has terras, ad aliquot millenas leucas ab eorum patria diſtantes, incredibili curſu contendiſſe, ibique merſos tandem periiſſe exiſtimarunt. Cui vltimae opinioni imprimis *I. G. Gmelinus* olim noſter fauiſſe videtur (*k*).

Et tale quidem fuiſſe quondam borealium regionum, imprimis Sibiriae clima, vt Elephas calidiſſi-

(*k*) GMELINVS in *Itinerar. Sibirica vol. I. p. 157.* a cuius opinione haud plane alienus videtur Ill. BVFFONIVS.

diſſimi coeli alumnus, et temperatius quoque clima nonniſi aegrius, cum plenaria foecunditatis exſtinctione ferens, ibi viuere atque multiplicare non recuſauerit, praeter eorum numerum hac terra obrutorum, de quo apud omnes conſtat, porro probat elegans BARTRAMII obſeruatio (*l*) de teſtaceis marinis nonniſi calidioris zonae in borealibus hodie terris petrificatorum ſtrata conſtituentibus, quam vndique confirmatam videmus; probant aut probare videntur elephantina ſceleta et hippopotamorum dentes noſtris temporibus in America ſeptentrionali non tantum a Gallico quodam duce (*m*), ſed nuperrime etiam ab Anglis (*n*) lecta. Quum enim certo ſciamus

(*l*) Nempe teſtacea petrefacta in ſeptentrionalis Americae montanis copioſe reperiunda, non ea eſſe, quae hodie in mari alluente ſub eodem latitudinis gradu viuunt, ſed in multo calidiore demum tractu, verſus auſtraliorem Carolinam et Floridam demum occurrere, obſeruauit Acutiſſ. *Barramius* eoque argumento, et repertis in Sibiria oſſibus elephantinis *Burneti* theoriam, de diuerſis antiquae terrae climatibus, confirmari putauit; teſte *Kalmio* in *Iſtnerar. Americ.* (ed. germ.) *vol. 2. p. 281.*

(*m*) Femur elephantinum maximae molis, in Canada repertum deſcribit, et plurimum ſimul ibi repertorum oſſium, interque alia molaris Hippopotami meminit BVFFONIVS *l. c. p. 230 - 233.*

(*n*) De ſceletis complurium elephantorum in montibus Americae borealis ab Anglis nuper inuentis relationem optimi COLLINSONI ad Amiciſſimum SCHLOSSERVM nuper accepi, et vt accurata oſſium in Angliam delatorum detur deſcriptio, valde opto. Famam de oſſibus gigantum immenſae ſtaturae in Penſyluania effoſſis iam acceperat KALM. *l. c. p. 250.*

mus Elephanti atque Hippopotami genus in tota hodie America non reperiri, neque magis, quam reliqua calidiorum Aſiae et Africae regionum animalia, nouo orbi communia eſſe; nulla alia via in Canadam animalia iſta tranſire potuiſſe video, quam ab extrema Aſiae orienti obuerſa extremitate, quam totam eorum pariter oſſamentis ſparſam eſſe videmus, quaeque olim minus forte lato ab America freto diremta fuit. Fateor tamen, rationem non poſſe reddi, quare nec Elephanti, quos in Americam vere transfretaſſe reperta ibi oſſa argumento ſunt, neque alia aeſtuantis zonae, quibus aeque facilis, atque illis erat tranſitus, animalia, frigeſcentibus Americae ſeptentrionalibus, in meridionales plagas receſſerint, ibique ſpeciem propagauerint, vt eorum ſaltem aliqua nouo orbi cum Aſia atque Africa inter tropicos comprehenſis communia hodie obſeruarentur, quod tamen ſecus ſe habet. Lubenter etiam fateor, neque in his, neque circa marina petrefacta per totam continentem terram copioſiſſime diſſeminata, nos certi vnquam quidquam aſſerere poſſe, imo ne hypotheſin quidem vllam fingere, niſi Deum e machina excitando, aut ingenioſa *Burneti*, *Whiſtoni*, *Buffonii* aliorumque de globi noſtri fatis commenta adoptando et ornando.

Ego illa acutioribus ingeniis enodanda relinquo. Ad retractandam vero materiam, a multis auctoribus diligenter agitatam, impulerunt me reli-

quiae in intima Sibiria repertae et in Muſeo noſtro depoſitae *Rhinocerotum*, *Gazellae* indicae, atque immenſae ſtaturae *Buffalorum*, quantos hodie nec Africa, neque calidiſſima India gignit, quique Tauroelephantum nomen, ab antiquis Zoologis immani Aethiopiae ferae tributum, iure ſibi poſcere videntur. Et has quidem exuuias deſcriptione tanto magis dignas eſſe credidi, quo luculentius id ſaltem euincunt, non elephantas modo, ſed alia quoque calidiorum regionum, etiam fera ac indomita, adeoque certe non humanis viribus adducta animalia in his olim terris, vbi nunc eorum oſſa ſuperſunt, vixiſſe et multiplicaſſe; vt dolendum omnino ſit nonniſi magnae molis oſſa hucusque per Sibiriam collecta fuiſſe, multoque maiorem minorum ſceletorum copiam forte negligi, quibus lites in hac re omnes dirimi dudum potuiſſent. Auctores certe, qui Elephantos, vt dixi, bello per Sibiriam ſparſos fuiſſe crediderunt, et tempus, ducem, exercitum, quibus deduci potuerint, adeo anxie quaeſiuerunt, vano deſtitiſſent labore, ſi praeter prius expoſita non ignoraſſent plurimorum calidiſſimi coeli animalium reliquias, in eadem Sibiria pariter reperiri (*o*). Sed praeter elephantina oſſa nihil adferri vide-

(*o*) De oſſibus Sibiriae foſſilibus, Mamonteis dictis, praeſertim egit Ill. TATISCHTSCEV in *Act. Vpſalienſibus*; Cf. etiam *Petersb. Anmerk. zu den Zeitungen* l. c. Deinde MESSERSCHMIDIO

viderunt, imo hodiernis quoque auctoribus vix alia innotuerunt. Nempe negliguntur a barbaris harum rerum collectoribus minorum animalium ossa, et ea solum mittuntur, quorum istis moles mira et commendabilis videtur. Non tamen dubium est innumera alia minoris magnitudinis ossa exoticorum animalium ibi passim supereſſe, quibus nobis ob insciticm atque supinam incuriam plebeculae carendum est; idque solo ossium in Sueuia canstadiensium exemplo discimus, vbi omnigena diuersissimae staturae animalium extraneorum ossa, elephantinis immixta fuisse dicuntur, vt antra draconum dicta Liptouiensia, et in Hercynia celebrem speluncam *Baumannianam* nunc non memorem.

De fossilibus *Rhinocerotum* in calidissimas Indiae atque Africae tractus hodie relegatorum, per aquilonares terras sparsis reliquiis, nemo, quod mirum, hactenus satis expressi quidquam memoriae prodidit. Refert quidem in itinerario suo Cel. *Gmelinus* (*) circa Lenam flumen inuentum aliquando

 fuisse

---

dio Breynivs in *Act. angl. vol. 40. n. 446.* Sloanevs l. supra citato, Ides, Stralenberg, Lavr. Lange, Le Brvn, Ioh. Bell. anglus, et Gmelinvs in suis itinerariis, tandemque, cum Bvffonio, D'Avbentonvs *l. c.*

(*) *Itinerar. vol. 3. p. 148.* Nempe miles *Spiridon Portniagin*, ad ossa mamontea conquirenda missus, 200 circiter stadiis russicis a promontorio sacro (*Swiatoi noss*) versus *Vstianskoi* hyberculum,

fuiſſe ignoti animalis caput, bouino ſub ſimile, cornua tamen ſupra nares gerens. Verum praeterquam quod illud non viderit ipſe, eiusque relatio e diuerſis videatur circa Taurorum atque Rhinocerotum reperta crania, relationibus coaluiſſe, ne in ſuſpicionem quidem Rhinocerotis ipſum perueniſſe apparet. Diſſertius quidem, et iure credo, ad Rhinocerotem refert maxillae portionem cum molaribus, haud procul a Cantabrigia repertam *Grewius* (*p*); ſed tamen is quoque, incredulis, ſola dentium comparatione fretus, minime perſuaſit. Certiora igitur hoc loco dabimus et minus ambigua futura. Habemus enim quatuor vera et ſatis integra *Rhinocerotum* in Muſeo *crania*, habemus quinque genuina, variae molis *cornua* eiusdem animalis. Eaque omnia in media Sibiria reperta fuiſſe certum eſt; quamquam locos, vbi ſingula inuenta fuere, non accurate conſignatos inuenerim, neque affirmare poſſim cornua iisdem cum craniis in regionibus eruta fuiſſe; cum de vnico tantum craniorum ex affixa ſchedula liquido conſtet, illud vna cum maiore, quod integrum habemus

naculum, circa Lenam in terra turfoſa reperit cranium elephantis cum cornibus, nec longe ab eo loco *animalis ignoti cranium* cet. — Videntur etiam Rhinocerotis oſſa fuiſſe, quae GMELINVS *p. 153.* vna cum craniis Tauro-Elephantis infra deſcribendis, reperiri dicit ad *Niſchnaia-Tunguska;* e quibus ſibi viſa, tibias, femora, in ſumma breuitate ſcribit craſſiſſima fuiſſe.

(*p*) *Muſei regal. Societat. pag. 32. tab. 16.*

mus cornu (fig. 4.) in tractu Iacutenſi anno 1727. oblatum fuiſſe. Quia ſceleton Rhinocerotis vllamue eius partem nondum ab vllo auctore deſcriptam invenio, in exponenda ſingulari fabrica cranii huius animalis paulo verboſiorem eſſe liceat. Tab. X. Fig. 4.

Rhinoceros, prouti ordine naturali proxime ad ſuillum genus collocari debet, eidemque multis ſtructurae momentis pariter ac vitae genere moribusque affinis eſt, imo apri quandam ſpeciem africanam, quae nuperrime innotuit (*q*) dentium quoque primorum defectu, corii natura, roſtrique cornea duritie proxime refert: ita et cranii conformatione nulli quadrupedum generi aptius conferri poſſe videtur. Ea tamen cranii pars, quae cornu Rhinocerotis ſuſtinet, cuius ille ſitu pariter atque natura ab animalibus cognitis omnibus differt, ipſa quoque ſtructurae et figurae plane peculiaris eſt, neque vlli inter reliquas quadrupedes exemplo comparabilis. Scilicet omnem vim animalis robuſtiſſimi in haec eius arma dum dirigeret natura, roſtrum, cui extremo innatum eſt eorum primarium, oſſea compage validiſſima ita firmandum erat, vt immanes indomiti animalis inque omnia coeca rabie ruentis impetus ſuſtinere queat. Hinc totum primo cranium, quod exſerendis belluae viribus quaſi vectem praebet

(*q*) Aper aethiopicus, quem in *Miſcellaneis Zoologicis*, et nuper, addita icone caſtigata, nouisque obſeruationibus in *Spicilegiorum Zoologicorum Faſcic. II.* nuper deſcripſi.

praebet, e ſolido fere oſſe robuſtiſſime fabrefactum eſt. Nulla enim, inaudito fere exemplo, apparent ſuturarum veſtigia; totaque cranii ſubſtantia, vbique craſſiſſima, parum intus raritatis, quam diploën dicunt, habet, imo per anguſta quoque et oblonga, pro encephalo recipiendo, olla cauatur. Nihil porro zygomat bus et illa quae inter roſtrum et ollam cranii comprehenditur, portione robuſtius eſſe poteſt. Deinde quum in animalibus reliquis omnibus oſſa naſi et maxillaria in regione hiatus naſalis late deficiant, et extrema roſtri mera cartilagine perficiantur, (quam in ſolo affini genere ſuillo, cui pariter inſignior promuſcide vis erat exſerenda, oſſiculum columnare fulcit,) Rhinocerotis contra cranium ſupra narium caua craſſo fornicatoque oſſe luxuriat, et hoc inſuper ſepto inter duo narium caua perpendiculari, craſſiſſimo, longitudinaliter ſuffulcitur. Si denique retro productum occipitis latum cacumen firmandis muſculis ceruicalibus, cranii leuatoribus, deſtinatum; ſi condylos maximos, fere ginglymoideos, capiti ſupra columnam vertebralem valide iactando, tanquam trochleas, deſtinatos conſideraueris, conſtans apparebit naturae ſollertia inſtrumenta vbique actioni et viribus exſerendis adaptantis.

Tab. IX. Fig. 1-3. *Olla* ſiue poſterior pars cranii, vt modo dictum eſt, irregulari ſubtetraëdra pyramide ſeu potius cuneiformi pectine (vt in ſuillo maxime genere) retrorſum adſurgit, quam circumſcribunt ſuperficies

ficies ſuperne tres, cum poſtica latis craſſisque marginibus concurrentes. *Superficies* haecce *poſterior*, inferne in medio *foramine occipitali* magno, ſuperius inciſo, et vtrinque *condylis* inde a foramine transverſis, ſubſemicylindraceis, extrorſum adſcendente conuexitate auctis praefinita, planiuſcula eſt, ita tamen, vt ſupra foramen occipitale leui conuexitate tumeſcat, hinc *foraminulo* ſurſum obliquo perforetur, et ſupra illud leuiter, at lateribus, ſupra condylos inſigniter deuexa cauetur. *Superiorum* facierum *media* plana fere eſt, poſteriusque latior in transuerſum occipitis pectinem deſinit, anterius autem decliuis et denuo lateſcens, in conuexiorem frontem ſenſim euaneſcit. Superficies *laterales* obliquiores, verſus orbitas ſenſim inſigniter cauatae deſcendunt, et plerumque, incerto quamuis loco, circa medium geminis *foraminibus*, calamum ſcriptorium admittentibus pertuſae ſunt, quorum ab altero latere in vno craniorum noſtrorum ſolitarium ſupereſt, et in alio vtrinque ambo oblitterata vix apparent. Non praetereunda quoque ſunt inſignia *foramina*, quae condylorum occipitalium baſin permeant, et digitum minorem facile transmittunt, arteriis vertebralibus veroſimillime deſtinata, introrſum verſus cranii cauum paulo anguſtiora, extrorſum et deorſum in ſemicanalem proceſſuum adſtantium effuſa.

Praeter *hos* ipſos *proceſſus*, qui maſtoideorum loco ſunt, *alii* habentur ſubter cranii ollam minores

et anteriores, adeoque ſtyloideis ſitu comparandi, figura autem, vti priores, pyramidati, et longitudine quoque iisdem ſubaequales. Supra geminos vtrinque proceſſus *meatus auditorius* patet, ſubtus et poſtice tubere angulato oſſeo munitus. Intra eosdem vero proceſſus notabilis vtrinque eſt *oſſis petroſi* anguloſa difformitas, in *hiatu* lacero vndique fere libere et abrupte prominentis. Medius inter foramina lacera *iſthmus* cranii inſigniter carinatus eſt, obſoleſcente tamen verſus palatum iugo.

Quanquam ipſa cranii olla antrorſum vere coarctetur, oſſea tamen eius ſubſtantia imis lateribus, mox ante meatus auditiuos lateſcit et in *zygomata* aſſurgit, poſtice depreſſo-ancipitia, dein per maiorem longitudinis partem triquetra, antice vero, vbi ſupra molarium baſin implantantur, obſoletius tetraëdra, atque extrorſum tuberculoſo-prominula.

Orbitarum cauitas perampla, vndique aperta, neque margine fere, niſi anterius, verſus zygomatis radicem *ſuggrundio* deſuper limitata tuberculoſiſſimo, quaſi lacero, et duplici plerumque foramine peruio. Vbi deficit ſuggrundium, notabilis eſt *ſpina* prominens, ſed magis introrſum poſita. *Foramen opticum* poſterius in fundo orbitae latum, antrorſum ſpectans, exterius veluti oſſea lamina valuatum, pollicem facile admittit. Anterius ex aduerſo optici foraminis ex orbita continuatur canalis digiti medii capax, magno *foramine zygomatico* paulo pone hiatum narium effuſus.

Frons

Frons inter orbitas atque antica crura zygomatum latiuſcula, tota, imprimis verſus latera, tuberculis crebra, ſcaberrima, et in vno praeſertim ſpecimine quam maxime hiulca; in omnibus vero *ſulcis* ramoſis, arteriarum, per foramina ſupraciliaria eſcendentium, et calamos ſcriptorios aequantium, veſtigiis, arata eſt. Videtur haecce front's in antiquiore ſpecimine notabilior inaequalitas orta fuiſſe ab incremento et ortu cornu ſecundarii, quod ſenioribus Rhinocerotum plerisque adeſſe arbitror, quodque, ſaltem in africanis (*r*), adoleſcentulis iamiam propullulat. Huius enim baſis totam ferme frontis aream paulo ante medias orbitas occupare ſolet.

(*r*) Vana eſt Rhinocerotum in vnicornes et bicornes diſtinctio. Vnicornes enim ſpecie diuerſi eſſe non videntur, quamquam re vera exiſtant, longiore et magis ſubulato cornu, ſaltem in Aſia. Cornua duplicia innumera vidi, et in tenera iam aetate, fere ſimul prorumpunt. In quinquennis capite Promontorio B. Spei ad Muſeum *Sereniſſ. Principis Auriaci* miſſo, ſecundarium iam inſigniter protuberabat, quamuis primarium palmo vix eſſet altius. Vidi, raro exemplo, *cornu ſecundarium* Rhinocerotis, ſemipedale, a baſi poſtice *apophyſin* acutam, conicam, ſeſquipollicarem exſerens, ſimillimum illi, quod Gleditschivs in *Materia Medica* celebrat, quodque pariter ſecundarium fuiſſe autumo. Per huiusmodi credo luſum explicandus erit locus Alex. Hamilton in *Account of the Eaſt-Indies (Edinb. 1727. 8.) vol. 1. p.* 7. vbi cornu Rhinocerotis africani triplex deſcribit, e quibus primarium erat 18 vnciarum, proximum 12″ et poſtremum 8″. — In capite Rhinocerotis capenſis cornu ſecundarium baſi vsque in frontem, inter oculos, extenditur, adeoque recte a *Kolbio* frontale dicitur.

Venio nunc ad extremitatem cranii, ſeu *roſtrum*, ad baſin, inter zygomata craſſiſſimum, et ſubtus aluearibus molarium dentium poſterius ampliſſimis auctum. Haec ipſa vero *aluearia* antrorſum ſenſim anguſtiora roſtri molem ſubtus paulatim contrahunt.

Palatum inter alueolares veluti vallos aequabile, leuiter excauatum, prope molares poſteriores vtrinque *foramine* pennam minorem vix admittente, et aliquot minoribus peruium, ad fauces deficit margine obtuſo, qui medio tuberculo, ad inſtar valuularum cordis lunarium, intercipitur. *Criſtae pterygoideae* a palato retrorſum clementer decreſcunt; et vbi fere euaneſcunt, adeſt vtrinque *foramen* inſigne, quod digitum minimum vix non admittit. Anterius ſub extremo roſtro, loco foraminum palatinorum plerisque animalibus ſolemnium, dehiſcit palatum *hiatu* triangulari, poſtice acutiſſimo, quem ſeptum naſale introrſum bipertit, et cuius poſtico angulo foraminulum adſtat ſolitarium, fere coecum.

Latera extremi roſtri vtrinque ampliſſima *narium* cauitate, antrorſum effuſa, late patent. Has interſtinguit *ſeptum* continuum, ſolidiſſimo et digitum fere, praeſertim verſus anteriora, craſſo oſſe conſtans, verſus fauces margine conuexe tumidulo praefinitum, marginem vero palati non exaequans, ſed citra eundem terminatum. Narium aperturas deſuper late obumbrat et roſtrum obtuſe terminat

teſtudo

teſtudo ſuboualis, conuexa, e craſſiſſimo oſſe facta et robuſta ſepti pariete longitudinaliter ſuffulta. Huius externa tota facies tuberculis longe, quam in fronte, prominentioribus exaſperata eſt et confragoſa, in medio tamen longitudinaliter laeuigata magis, et veluti *raphe* quadam inſcripta; margines iisdem tuberculis quaſi laceri apparent. Camerae narium compreſſae ſunt et retrorſum maxime verſus ethmoideos anfractus dilatantur, quorum tamen minime inſignis eſt apparatus. Prope aperturam narium anteriorem intrinſecus e ſuperiore cuiusuis camerae fornice deſcendit lamina oſſea craſſa, inuoluta, ſiue *os conchoideum* ſpongioſum.

Ex alueolorum reliquiis apparet, animalia quorum foſſilia deſcribimus crania, *molares* ſuperioris maxillae *dentes* vtrinque habuiſſe ſenos, ſeu forte ſeptenos: adeſt enim in vno ſpecimine dens ante alueolorum ſeriem minutus, a quo reliquorum, qui in omnibus noſtris ſpeciminibus deſunt ſolis radicum veſtigiis relictis, moles ſenſim creſcebat, ita vt poſtremi omnium maximi fuiſſe videantur; penultimorum vero aliquem eſſe a *Grewio* delineatum ex illius cum alueolis craniorum noſtrorum comparatione ſatis fit veroſimile.

Non parum miratus ſum, in omnibus quatuor craniis nullum omnino ſupereſſe veſtigium *dentium primorum*, quos grauiſſimi auctores, *Parſonius*,

et cum eo *Linnaeus*, *Buffonius*, *Chardin* (*s*) aliique Rhinoceroti tribuunt, a molaribus remotos et in vtraque maxilla ſolitarios. Quamquam enim nullos huiusmodi dentes olim in ſiccato capite Rhinocerotis circiter quinquennis, Promontorio Bonae Spei in Muſeum *Sereniſſimi Arauſionis Principis* miſſo, deprehendiſſem, tamen ſubdubitabam, et aetate prouectioribus demum erumpere putabam. Poſteaquam vero in ſpeciminibus adultis Muſei noſtri ne veſtigium quidem apparere video, vbi dens talis inſitus fuiſſe, vel firmari poſſe credatur, non poſſum non ſuſpicari, auctores qui primores dentes Rhinoceroti tribuunt omnes, hallucinatos fuiſſe, et primum e molaribus conoideum voluiſſe: Idque tanto magis credibile erit, ſi perpendamus, qui Rhinocerotis hiſtoriam dederunt, omnes nonniſi viuum animal examinaſſe, in quo difficile ſane et fallax eſſe debet dentium ſcrutinium. Accedit, quod interuallum inter primos molares et apicem maxillae ſuperioris in craniis non admodum prolixum ſit, quodque palatum mox ante molarium alueolos in anguſtum iugum et veluti carinam ſenſim contrahatur, vt nec alueolo locus ſit vllus, neque dentes illi primores, ſi adfuiſſent, tam magno ſpatio, quam auctores illi dicunt, ab inuicem diſtarent. Adde etiam, quod

(*s*) *Chardin voyage en Perſe (edit. 8va Pariſ. 1723.) vol. 8. p. 132.* Bovffon. *l. cit. p. 241. et 275.* Parsons in *Act. angl. n. 470.*

quod Rhinoceros, cui accuratiſſimus alias *D' Aubentonus* primores dentes fuiſſe ſcripſit, e data magnitudine etiam iunior videatur fuiſſe illo, cuius ipſe ſiccatum cum pelle caput diligenter in *Muſeo Auriaco* luſtraui, et cui itaque dentes illi per aetatem adeſſe omnino debuiſſent. E quibus omnibus iure concludi poſſe credo Rhinocerotem conſormatione dentium cum Bradypode atque Daſypode conuenire. Neque ſolum hoc eſt affinitatis, praeſertim cum Daſypode momentum; namque huius cutis pariter atque pedes non exiguam ſtructurae ſimilitudinem cum Rhinocerote produnt, quanquam hunc nihilominus ſuillae genti magis propinquum eſſe putem.

Crania illa Muſei noſtri, etſi vix determinandae antiquitatis dicenda ſint, et monumentis humanis forte omnibus anteriora, tamen corruptionem tanto temporis ſpatio, etiam in ſpongioſiore parte, vbi molares fuerant infixi, parum ſenſerunt. Nempe, vt ſupra de Ebore foſſili monuimus, glacies regiones illas continuo adſtringens, neque per aeſtatem in terrae profundo reſoluenda, animales haſce reliquias contra edacis aeui dentem quaſi loricat atque firmat. Itaque craniorum etiam, quae deſcripſimus, ſubſtantia fuſca quidem, ſed praedura adhuc eſt, nec niſi in ſuperficie calcinata atque ochraceo vel limoſo terrae, in qua ſepulta iacuerunt, colore inquinata atque imbuta. Imo in vno nitor etiam et odor, quum raditur, oſſeus paſſim ſupereſt. Illud vero, quod antiquiſſimum, hiulca fronte prae-

praeſigne ſupra memorauimus, corruptius eſt et tota ſuperficie ad inſignem ſatis profunditatem calcinatum, vngue facile raditur. Duo alia paſſim in ſuperficie leues ſecuris, vt videtur, ictus paſſa ſunt, iis maxime in locis, vbi cornua haeſerunt; non autem affirmauerim cornuum adhaeſionem hiſce ictibus anſam repertoribus dediſſe. In horum tandem vno frons a dextro latere, proxime ſupra oculum, maiuſculo foramine, ſed rotundato perrupta eſt, quod viuo animali inflictum fuiſſe videtur.

Vt aliqua proſtet craniorum noſtrorum menſura, liceat hic inſerere tabulam comparatiuam omnium ſpeciminum, ſecundum menſurae Pariſinae normam expreſſam; in qua notari velim terminos omnes filo, ſecundum ſuperficiem adplicato exploratos fuiſſe:

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Longitudo tota ab extremo roſtro, ad prominentiſſimam partem occipitis - - - - - - -	33. 0	31. 3	30. 9	29. 5
—— palati inde ab angulo carinae ante hiatum palatinum notabil	12. 0	8. 0		
—— aluearium pro dentibus -	9. 3	0. 0	11. 3	0. 0
—— tuberis cornigeri ſupra nares circiter - - - - - - -		10. 6	10. 6	0. 0
—— hiatus narium - - - -	11. 3	7. 10	9. 8	10. 0
—— zygomatis a meatu auditorio ad foramen zygomaticum exteriorem arcum menſurando	8. 3		7. 0	7. 0
	9. 9	9. 6	8. 9	9. 9

Longi-

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Latitudo ſumma cranii inter tuberoſitates zygomatum anteriores	11. 9	10. 6	10. 3	11. 5
—— inter proceſſus orbitales -	11. 4	0. 0	11. 1	10. 3
—— tuberis cornigeri - - -	7. 9	7. 6	6. 6	7. 6
Profunditas ollae cerebri ſtylo explorata - - - - - -	7. 0	6. 10	6. 9.	6. 6

Procedo nunc ad *Cornua Rhinocerotum* Sibirica, quorum, vt monui, quina in promptu ſunt. Et haec quidem omnia primaria fuiſſe e magnitudine, proportione et figura facile apparet. Minora ſiue frontalia cornua vel ob minus inſignem molem a collectoribus neglecta, vel Rhinocerotes qui haſce plagas quondam occupabant vnicornes fuerunt, quod in Aſiaticis hodienum frequenter obſeruari auctorum aliqui aſſeruerunt. Duo e quinis Muſei noſtri cornibus foſſilibus integerrima ſunt; eaque mole, figura et proportione nihil inſolenti habent. *Vnius* nempe longitudo eſt 33′. 3″′, circumferentia imae baſeos, quae tamen filorum extimorum et breuiſſimorum ſtratum amiſit, 23′. 6″′. et paulo ſupra baſin 17′. 6″′ vnde ſenſim in ſubulatum acumen adtenuatur, retrorſum clementer curuatum. *Alterius* longitudinem deprehendi 2′. 1″. 4″′ circumferentiam infimam 1′. 7″. 9″′ et quinorum pollicum ſupra baſin diſtantia 1′. 2″. 6″′ figuram autem omnino priori ſimilem. Vtriusque ſubſtantia nonniſi in ſuperficie antiquata fiſſuris hinc inde fatiſcit, qua- Tab. X. Fig. 4.

les et recentia ſpecimina ſiccatione non raro contrahunt.

Dolendum eſt in tribus reliquis cornibus e Sibiria miſſis, quorum vel figura vel magnitudo minus vulgaris fuit, ab ignaro et rudi populo ſecuri, vt videtur, ablatam fuiſſe ab vtroque latere ſubſtantiam; cuius rei nullam aliam mihi fingere poſſum rationem, niſi hanc, quod vel ea ſubſtantia corrupta atque in fibras ſuas reſoluta fuerit, vel ſimilitudinem acicis, cornuumue caprinorum conciliare iis voluerit vulgus. *Vnum* ex his mutilatis et cornuum Ibicis ad inſtar planis cornibus longitudinem aequat 4 pedum et vnius fere pollicis. Curvatur illud arcu inſigni, et maiore quam hactenus in Rhinocerote obſeruatum eſt. *Alterum*, quod itidem, ob ſingularem circumcaeſuram, icone expreſſum eſt, altitudine eſt 2′. 8″ rectiuſculum; ſingulari autem ratione anterius verſus baſin craſſeſcit, ſituque magis reclinato conſtitutum fuiſſe videtur; ita vt tota figura a ſolita inſigniter abludat. *Tertium*, cuius icon minus neceſſaria viſa eſt, vti primum, paulo magis, quam vulgaria, incuruatur, et arcuatam fere figuram vnguis Ardeae exprimit, longitudine 2′. 11″. 6‴ proportione fere eadem, quae in cornibus integris ſupra indicata eſt.

Tab. X. Fig. 6.

Subſtantia horum cornuum duriſſima quamuis et rigida, adhuc, tamen ita in ſuperficie praeſertim reſoluta eſt, vt *fila* cornea longitudinalia, paral-

parallela, quae in recentibus firmiter compacta aegerrime apparent, egregie conſpiciantur et facili opera ſeparari queant. Itaque cornu Rhinocerotis e talibus filamentis ſiue ſetis corneis totum compoſitum eſſe, longeque alia ſtructura gaudere, atque cornua perſiſtentia, lamellata animalium plerorumque ruminantium, recte D' AUBENTONUS expoſuit. Similem fere craſſiſſimae epidermidis conſtitutionem, e fibris ad cutem perpendicularibus, in Manato ſ. Vacca marina STELLERVS olim noſter deſcripſit. Subſimilem etiam ſtructuram inuenias teſtarum Mytuli margaritiferi ſole vel igne calcinatarum. Verum in Rhinocerotis cornu hoc praeſertim mirabile eſt, quod media praeſertim ſubſtantia adultioribus excreſcat. Figura enim cornuum adtenuata imprimis debetur numero fibrarum ſuperiora verſus imminuto: extimae ſcilicet varia a baſi diſtantia veluti praetritae et ſeneſcentes deſinunt; vnde in plerisque recentibus Rhinocerotum cornibus ſuperficies verſus baſin muſcoſa quadam hiſpiditate horret. Hoc autem phaenomenon a ſola belluae actione, cornu ad arbores continuo adterentis, derivari haud poterit; ſic enim cornuum cacumen, quod maiorem vim patitur, minus creſceret, parique modo detritum et ſenio quaſi conſumtum obſeruaretur; quod ſecus euenit. Extremitas enim cornuum ſemper ſolidiſſima ac ſaniſſima deprehenditur; et natura animalium partes exterius iniuriis praecipue obnoxias, cornua, vngues, roſtro auium

(praeſertim Picorum), inſita vi quadam vegetatiua, iis maxime in locis vbi maiorem adtritum patiuntur, continuo ſupplet, nec feneſcere patitur. Hinc neceſſario ſtatuendum eſt, fibras in cornu Rhinocerotis extimas, ſuccreſcentibus e nucleo ſenſim interioribus, inutiles et effoetas non amplius creſcere, ſed velut emortuos capillos apicibus deteri atque reſolui.

Praeterquam quod in cornibus Rhinocerotum foſſilibus ſtructuram fibroſam confirmatam inuenerim, ſingularem quoque obſeruaui fibrarum per interualla coaleſcentiam quandam, in iis maxime ſpeciminibus, quorum ſubſtantia lateralis ſecuri dedolata eſt, conſpicuam. Haec ideo quaſi articulata aut inſcriptionibus transuerſis ſolidioris texturae vndata diceres; neque aptius comparari poteſt huius ſtructurae ratio et adſpectus, quam cum muſculis rectis abdominis in humano cadauere, quorum laxiores fibrae muſculoſae, inſcriptionibus transuerſis in tendineam albedinem et ſubſtantiam denſatis, interruptae ſunt. Atque vti hos muſculos per tendinea interualla firmari intelligimus, ita quoque cornuum ſubſtantiam compactioribus illis ſpatiis inſigniter contineri, nemo non videt.

Poſt deſcriptas Rhinocerotum reliquias praecipuam in Oſteophylacio noſtro adtentionem merentur

tur *crania Buffalorum* gigantea, quorum integrum vnum et complurium fragmenta e Sibiria adlata habemus. Gigantea dico, quum maxima vrorum noſtratium in Muſeo ſeruata crania, omnesque Buffali Capenſis aut Indici, quas viderim aut deſcriptas inuenerim, reliquias tantum ſuperent, quantum illa a craniis boum domeſticorum, iſta a Buffalorum Italicorum mole diſtant, quae prioribus collata pygmaea certe dicenda ſunt. Animalia, quorum crania illa fuere, hodie tanta, in rerum natura, quod ſciam, nullibi exſtant. Neque enim Buffali calidiſſimarum regionum, quibus hocce animal natura deſtinatum eſt, nec vri noſtro aeuo maximi, armenta Hungarica atque Podolica iſtis ſaepe vix minora, et vaſtior iisdem Biſon Americae ſeptentrionalis, qui poſt Rhinocerotem et Hippopotamum quadrupedum omnium certe maximum eſt (*t*), ad Buffa-

(*t*) Ill. Bvffonivs, neſcio quo argumento, Biſontem Americanum minorem eſſe credidit, quam ſunt Aſiae atque conterminae Europae feri Tauri *(hiſt. nat. vol. XI. edit. min. XXIII. p. 104.)* a quibus tamen iſtius originem iure deducit. Putauit ſcilicet, Vir Illuſtriſſimus, omnia animalia, quae ex antiquo orbe in Americam transmigrauarint, minora et debiliora euaſiſſe. Et tamen Alcem, Rhangiferum, Damam, Leporem, Vulpem nigram (quae eſt Lupus niger Bvffonii), in America boreali potius maiora eſſe, quam in Aſia orientali, certis mihi conſtat documentis. Similiter Bison americanus, quem ſecundum praeconceptam hypotheſin et ex male intellectis, vt videtur, itineratorum relationibus, minorem Aſiatico ſtatuit, re vera Vris vel

lorum, quos frigidam nunc totam Sibiriam olim aluiſſe e lectis oſſibus conſtat, molem nequaquam adtingunt.

Loca in quibus huiusmodi crania reperta fuere *Cel.* GMELINVS in *itinerario* ſuo nominat: extremam Sibiriam, circa Anadyr fl. et regiones ad Neo - Tunguskam. Integrum vero, quod Muſeum noſtrum ornat, cranium illud eſt, cuius ad Ilgenſe munimentum (*Ilginskoi Oſtrog*) effoſſi meminit idem (*itinerar. vol.* 3. *p.* 753.). Idque *Celeberr.* MVLLERO noſtro deberi, qui illud a ſacerdote illius loci acceperat, in catalogis rerum naturalium a GMELINO transmiſſarum inuenio. Fuit autem in ripa Ilgae fluminis vernalibus aquis ſubruta inuentum; nec alia prope oſſa adfuiſſe dicuntur. Extra Sibiriam inuentorum craniorum taurinorum tam vaſtae magnitudinis duo tantum exempla habemus; quorum alterum in *Actis anglicis vol.* 37. *pag.* 427. *tab.*) KLEINIVS, alterum *Ill.* BVFFONIVS in aureo ſuo opere (*hiſt. natur. ed. minor. vol.* 23. *p.* 261.) communicarunt. Prior deſcribit atque delineat occiput tauri, vel potius *Buffali*, cum cornibus deter-

vel maximis vaſtior eſt et procerior; vti ex viſis adultorum craniis, et viuo Biſonte, Philadelphico, an. 1766. in Belgio exhibito didici, quem nondum ad adultam tamen aetatem peruenisſe cornuum paruitas arguebat, etſi mole iam Vrum inſigniter ſuperaret. Neque ſane vllam inuenio rationem, quae in pinguiſſimis feliciſſimae Americae paſcuis, armenta fera minuere debuiſſet.

detruncatis, vix inferius noſtris magnitudine, et figura iisdem ſimillimum, prope *Dirſchau* in Gedanenſi regione effoſſum; in eoque diſtantiam inter baſes cornuum 1 pedis et $1\frac{1}{3}$ pollic. latitudinem inter orbitarum margines $1'.4''$ et circumferentiam cornuum ad baſin $1'.6''$ poſuit. E paulo minore animale fuit nucleus cornu bouilli, quem in Galliae quodam flumine inuentum recenſuit BVFFONIVS, cuiusque circumferentiam $1'.1''.8'''$ eſſe ſcripſit.

Crania *noſtra*, cum quibus KLEINIANVM cornibus et orbitarum conformatione omnino conuenit, Vri vel Biſontis non fuiſſe, ſed ad Buffali genus, hodie calidioris Indiae inquilinum, referri debere inſignis latitudo et conuexiuſcula planities frontis atque bregmatum, prominentia orbitarum tubuli formis, latitudo oſſium maxillae ſuperioris, et ſitus denique cornuum magis, quam in Vro, transverſus et reclinatus, neque non corneae vaginae figura externe angulata, atque inſigniter rugoſa, arguunt. Quae diſcriminis momenta vt melius appareant, in tabula noſtra altera, praeter integrum illud cranium e Sibiria foſſile a fronte et a latere expreſſum (fig. 1. 2.) etiam vri maximi noſtratis cranium duplici item icone expoſui (fig. 3. 4.). Quae cum icones ſumma cura, ſeruatis, ad appoſitam diminutam menſurae in pollices diuiſae ſcalam, cunctis proportionibus, exactiſſime delineatae fuerint, ſine vlteriore verborum apparatu inde et vera

Tab. XL. XII. Fig. 1. 2. 3. 4.

vera vtriusque forma, et differentiae, atque insignis cranii fossilis magnitudo satis superque intelligi poterunt. Adferam tamen mensuras vtriusque generaliores, filo exploratas; quamquam et haec opera, ob iconum perfectionem superflua fere videatur.

	In Buffali Cranio foss. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Longitudo cranii a fine ossium nasi, qua fronti committuntur ad cristam transuersam occipitalem -	21. 0	16. 6
Longitudo ossium nasi, quorum in cranio fossili dextrum breuius 3'''	9. 0	
Longitudo aluearium pro molaribus, quae in cranio fossili, ob defectus, satis accurate mensurari haud potuere - - -	7. 6	5. 9
Eadem ratio impedimento fuit, quominus longitudo ossium maxillae superioris comparari potuerit -	— —	— —
Longitudo nuclei cornuum ossei, exterius secundum arcum adplicato filo, a corona baseos ad apicem - - - - - - -	13. 6	6. 3
Latitudo summa occipitis inter angulos mastoideos, vt ita dicam,	11. 3	9. 9
Circumferentia arcus occipitalis, inter hos ipsos angulos mastoideos	18. 9	15. 6

Alti-

	In Buffali Cranio foſſ. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Altitudo occipitis a margine foraminis occipitalis ad criſtam transverſam ſeu arcum occipitalem -	4. 2	3. 9
Latitudo cranii inter cornuum radices - - - - -	13. 11	10. 0
Latitudo inter extremas orbitarum oras - - - - -	14. 1	11. 9
Latitudo inter foramina ſupra-orbitalia - - - - -	8. 9	6. 2
Latitudo maxillae ſuperioris ad molares poſtremos. - - -	8. 0	2. 2

Nucleus cornuum oſſeus in giganteo noſtro Buffali cranio 14 pollices circumferentia explet, quum in maximo Vro vix 8 poll. excedat. Corneae vaginae, quae nucleos oſſeos loricat, craſſities, in vtroque cranio non potuit exacte comparari. Quod in foſſili cranio ſupereſt corneae ſubſtantiae, nouem, vbi media craſſities, lineas aequat. Dextrum *huius* cornu, (cui fere integra ſupereſt vagina, externe longitudinaliter angulata et verſus baſin rugoſiſſima,) cum corneo inuolucro commenſuratum vix 15 poll. craſſitiem dedit; quum in Vri cornibus eadem deprehenſa fuerit 10″. 2‴. Vnde maius corneae ſubſtantiae in Vro volumen apparet. Vaginae iſtae corneae, in cranio foſſili antiquitate

in lamellas reſolutae, ſtructuram cornu bouilli per ſtrata accreſcentem et a textura cornu Rhinocerotis ſupra expoſita diuerſiſſimam elegantes exhibent. Illam autem corneam ſubſtantiam, quae alias facillime putreſcit, in cranio per tot ſecula ſolo, ſed frigore adſtricto, condita magna pro parte adhucdum ſupereſſe mirum videri non debet, cum ipſum quoque cranium paſſim nitorem oſſeum ſeruauerit.

Praeter cranium iſtud integrum dicendum, habemus ex tribus aliis fragmenta; occipitis nempe portiones, cum vno alteroue cornu ſuperſtite. Horum vnum, quamuis quibusdam menſuris priori cedat, (interualla cornuum 12″. 3‴ et longitudinem nuclei oſſei 21″. 8‴ praebens,) ob latitudinem tamen occipitis inter angulos maſtoideos menſurati maiorem (12″. 10‴) et inſigniorem nuclei cornuum craſſitiem ſeu circumferentiam (13″.) ſenioris animalis videtur fuiſſe. Fragmenta illa, ſub mitiore forte coelo e terra eruta, corruptionem multo magis ſenſerunt.

Tantos olim Buffalos (*u*) in Sibiria vixiſſe ex eorum reliquiis videmus. Hodie vero ne in Indiis quidem pares gigni minus habebit miraculi, ſi ponderaueris, quantum noſtris ſub oculis paſſim addant anima-

(*u*) Poſſet huc referri locus Plinii *hiſt. nat. lib. VIII. cap. 37.* „Vrorum cornibus barbari *ſeptentrionales* potant: vrnasque binas capitis vnius cornua implent.

animalibus domeſticis incrementum clima et pabuli largioris atque pinguioris qualitas, quantulosque eaedem cauſſae alibi producant earundem ſpecierum pygmaeos. Quis non nouit inſignem inter armenta Podoliae et macros ericetorum boues, quis inter puſillos arietes ſeptentrionalium regionum et Indicos vel Capenſes proceros ignorat differentiam. Imo maior adhuc eſt inter pygmaeos Indiae orientalis vel Inſularum ſeptentrionalium equos, illosque quos Friſia aut Anglia generat; maior inter Vrum aut Biſontem Americes, et bouem paruulum, gibboſum, Zebu dictum Africae et Indiae. Et vt propius ad effectus climatis Sibirici etiam hodiernos accedamus, quantum non diſtant Musmones Corſicae ab ariete fero ſeu Argali orientalioris Sibiriae, quamquam hic vere ſit vnum idemque cum iſtis animal. Si vero olim calidiorem fuiſſe Sibiriam et feliciore coelo gaudentem inſuper ſtatuamus, ſine qua conditione frigoris impatientiſſimi Buffali ibi viuere haud potuiſſent, ratio in propatulo eſt, quae eosdem in pinguiſſimis tunc paſcuis ad tantam molem potuit auxiſſe, quam foſſilibus craniis videmus; quum etiam hodie Americae ſeptentrionalis, quam magnam cum Sibiria ſimilitudinem habere omnes fatentur, mitiore in climate, Virginiae, Penſyluaniae Canadae in ſyluis, Biſontes cum Europaeis et Aſiaticis certe congeneres, et ex antiquo in nouum orbem olim migraſſe credendos, in ſtupendam excreſcere molem certo conſtet.

Credo ſic etiam climatis habendam eſſe rationem in explicanda gigantea ſtatura *ceruorum*, quorum in Hybernia praeſertim effoſſa miramur cum vaſtiſſimis cornibus bipedalia crania. Quamquam enim aliqua ex illis alcium et tarandorum fuiſſe concedam, imo affirmem; vidi tamen et ab auctoribus nonnullis memorantur reliquiae, quae ad giganteam quandam, hodie nullibi reperiundam cerui vel ſpeciem vel varietatem pertinuerunt; idque praeſertim de eo affirmare auſim cranio, cuius meminit TH. MOLYNEUX (*v*).

* *

Supereſt animalium exoticorum calidi climatis in Sibiria olim viuentium tertium monumentum, nempe cornu foſſile *Gazellae recticornis* (*x*), quam hodie

---

(*v*) De cornibus ceruinis maximis in Hybernia frequenter effoſſis euolue TH. MOLINEUX *nat. hiſt. of Ireland p. 137.* vbi cranium praeſertim deſcribit 2′. longitudine, cuius cornua in latitudinem 10′. 10. ſpargebantur, ramis lateralibus duobus inſtructa et extremitate latiſſima, palmata. Conf. etiam TH. KNOWLTON in *Actis Anglic. vol. 44. p. 124. tab. 1.* et I. HOPKINS *Act. Angl. n. 472. p. 257.* Quae autem deſcribit IAC. KELLY *ib. n. 394. p. 122.* vera Alces cornua ſunt, et Rhangiferorum quoque cornua in Hybernia reperiri monet CR. MORTIMER *id. n. 444. p. 389.* Quae vero MOLYNEUX obſeruauit ob cranii magnitudinem, ad Rhangiferum referri nequeunt.

(*x*) Volo Antilopen bezoarticam *Spicil. Zoolog. Faſcic. I. p. 14.* quae eſt Capra Gazella LINNAEI, et Paſan BVFFONII, In huius

hodie ſola, quantum ſcimus, Africa alit, quaeque mihi, poſterioribus curis, nomen *Orygis* antiquorum, ad aliam olim Gazellae Afrae ſpeciem a me relatum, merere videtur. Conuenit enim huic, quod de *pilo contrario* Orygis PLINIVS refert; cuiusmodi miram velleris conſtitutionem in nulla huc vsque animalium ſpecie, praeter Gazellam iſtam et Zebram africanam obſeruare potui. Conuenit etiam quod de cornibus Orygis, apud nonnullos Africae populos haſtarum loco vſitatis prodiderunt AGATHARCHIDES, STRABO, et LAMPRIDIVS. — Cornu iſtius foſſilis rectiſſimi, 27″. 6‴ longi et valde corrupti figuram ideo adponere non placuit, quia nullo modo a vulgaribus huius ſpeciei, plerumque item rectiſſimis cornibus, in curioſorum muſeis paſſim occurren-

ius nuper pelle eleganter ſeruata, miram illam obſeruaui pilorum diſpoſitionem. Nempe in lumbis *vortex* eſt pilorum, proxime ante maculam quandam rhombeam nigram, quae caudae baſin ſtipat; ab hoc vortice per ſpinam longitudinaliter pilus antrorſum tendit, vsque ad verticem capitis, a media vero ſpina vtrinque transuerſim defluit, verſus abdomen et imprimis hypochondria ſenſim refluus, ita vt pilis ab inguine adſcendentibus occurrens in imo vtrinque hypochondrio alium efficiat inſignem vorticem. Idem fere notatur in *Zebra* africana, ſed minore gradu, etenim vortex lumbaris longius a cauda remotus eſt, neque reflui per latera pili vorticem in hypochondriis conſtituunt, ſed verſus aluum aequaliter deorſum tendunt, ſecundum directionem faſciarum. Singulari autem modo vtrinque ad ſpinam vndulati huic ſunt pili, maxime verſus iubam-

currentibus differunt, horumque optimas icones propoſuit Ill. BVFFONIVS (*y*). Nolui autem hac occaſione praeterire aliud *Gazellae* cuiusdam *Indicae*, quae apud Zoologos plane non occurrit, cornu ſingulare, generali quidem forma prioris cornibus perſimile, gracilitate vero, annulorumque conuexitate ac glabritie diuerſiſſimum, cuius ideo iconem in Tab. X. Fig. 5. Tabula X. adiiciendam curaui.

Hoc itaque *cornu* longiſſima quae viderim Gazellae prioris cornua proceritate ſuperat, etſi longe tenuius ſit, maxime ad baſin. Quum nempe vulgaria Gazellarum cornua tantum 25 ad 30 pollicum longitudine, circumferentia vero ad baſin 5″ plus minus vulgo inueniantur, noſtrum contra in longitudine 33 proxime pollicum, circumferentia ad baſin ſeu craſſitie vix 3″. 7‴ explet. Deinde non, vt vulgaria, rugis acutis, inaequalibus, poſtice veluti ſurſum terſis annuloſum eſt; ſed *annulis* aequalibus, conuexis, diſtinctis, 3″ circiter latis, ſubarticulatum, quorum inferiores paulo latiores, ſummi ſenſim obſoletiores ſunt, vt tandem vltimus ſeu quadrageſimus verſus extremitatem cornu laeuiſſimam prorſus euaneſcat. Horum annulorum *primus et viceſimus* ad poſterius cornu noſtri latus in duos aequales annulos diſcedit. Inter ſingulos annulos inferiores, apparet *ſtria* gemina eleuata, obſoletiſſima.

(*y*) BVFFON. *hiſt. nat. XII. t. 33. f. 3.*

ma. Notandum quoque eſt non omnino rectum eſſe cornu illud, ſed verſus extremitatem leuiſſime falcatum; ſubſtantiam autem eſſe nigerrimam, et extus glabram, quamuis nulla certiſſime arte polita. Apparet ex his cornu noſtrum etiam ab iis differre, quae Ill. BVFFONIVS tabulae ſupra citatae fig. 1. et 2. tamquam diuerſa a vulgaribus, expreſſit.

Expoſita iam ſunt, quae huic commentationi anſam dederunt. Antequam vero coronidem ſcripto imponam, liceat ditiſſimam *oſſamentorum* et *dentium elephantinorum foſſilium* ſeriem, qua muſeum noſtrum exterorum vniuerſa cimelia longe ſuperat, breuiter exponere. Loca vbi iſta omnia reperta fuerint prodere neque poſſum, neque noſtra intereſt. Sufficit noſſe, non tantum ad omnia fere Imperii Ruſſici maiora flumina aliquando lectas fuiſſe elephantorum reliquias, et Tanaim, Volgam, Iaikum, Dvinam, Obyum, cum Tobolio, Tom et Irtiſch fl. neque non vlterioris Sibiriae Ieniſeam, Angaram, Chatangam, Lenam, Indigirkam, Kolymam, imo verſus extremum orientem effuſum quoque Anadyr fluuium, ripas ſuas lambendo atque cauando gigantea paſſim detexiſſe ſceleta; ſed paſſim etiam in locis ab omni fluento remotis, occaſione puteorum aut fundamentorum pro aedificiis, complura paſſim eruta fuiſſe, magno teſtimonio totam hanc telluris partem innumeris elephantorum reliquiis ſcatere. Reperiuntur oſſa illa vsque ad ipſa oceani glacialis littora, et

ibi

ibi praeſertim integerrimum et ab omni corruptione ſeruatum eruitur Ebur, quod alibi vel calcinatum, exeſum, et in lamellas cretaceas reſolutum, vel ſaltem tinctura terrae flaueſcente, caſtanea, imo livido-coeruleſcente inquinatum offendunt.

Habemus in Muſeo *tria* integra elephantorum foſſilia *crania*, quorum et aliquot dentes ſimul adlati, et vnius maxilla adſunt, praeter ſex alias, quarum crania non habentur, maxillas. E craniis vnum permagni elephantis fuit; quippe quod parciſſimo modulo, ab occipitis inciſura media, ad alveolorum marginem 3′. 5″. 6‴ aequare inueni, quum in maximis Petropolin olim adductorum cranium vix 2′. 10″ excedat. Alueolorum ſingulorum roſtri diameter in eodem cranio eſt 5″. 10‴ et ebur vnius lateris, quod in Muſeo ſimul adeſt, in longitudinem curuatur 8′. 11″ ſolidiſſimum atque ex albo flauicantis coloris. Repertum fuit hocce cranium in arenoſo, montis cliuo, ad ripam orientalem Indigirkae fluuii praeruptam, ex aduerſo ripae quam *Sztanoi-jahr* vocant, et ab accuratiſſimo MESSERSCHMIDIO olim Petropolin miſſum. Plura ibi ſimul ſceleti oſſa occurrebant, quorum et aliqua ſimul aduecta ſunt; praeſertim *femur*, quod inter cuncta Muſei noſtri foſſilia oſſa eminet, et longitudinem, quamuis carie temporis abſumto capite, 40 pollicum excedit; itemque humerum ſiniſtrum 2′. 11″. 6‴ longum.

Alterum

Alterum ex iſtis craniis, curante item MESSERSCHMIDIO Petropolin delatum, haud inſolitae molis eſt, et cum plerisque ſceleti oſſibus, coſtis etiam, ſcapulis et verteoris, e ripa Lenae fluuii, non longe ab eius ſem oſtio effoſſum fuerat. Vnde *tertium* erutum ſit, non ſatis conſtat.

Longum eſſet innumeros Muſei noſtri *dentes foſſiles eburneos* variae molis atque curuaturae, ſecundum figurae et magnitudinis ſingula momenta proſequi. Dextri partim ſunt, partim ſiniſtri lateris. Quidam, praeter colorem, quem flauum, ferrugineum, fuſcumue contraxerunt, ebori recenti ſoliditate ſimiles; alii vel tota ſubſtantia, vel aliqua ſui parte calcinati ſunt, vt pulchre appareat lamelloſa, et ſimul a centro radiatim fibroſa eboris textura. Duos ſolummodo ex his adtingam, quorum *alter* ob inſignem molem notabilis, octopedalis fere, quanquam alueolari portione atque mucrone orbatus, circumferentia explet ad baſin 1′. 7″. 6‴ et in medio 1′. 7″. *Alter* Archangelopoli in Muſeum miſſus et ſolidiſſimus non modo pro inſigni longitudine gracillimus eſt (longit. 4′. 10″ circumferentia in medio maiore 9″. ad alueolum 7″. 3‴), ſed etiam miro modo in laxam ſpiram veluti manibus tortus, accedit ad dentem elephantinum recentem a GREWIO (muſ. regal. ſociet. tab. 4.) delineatum.

Praetereo plurimos *molares* elephantinos vario tempore e Sibiria aduectos. Innumera praetereo con-

confractorum ossium fragmenta. Integros vero *humeros* octo habemus, *vlnas* quatuor, *scapulas* fractas tres *ossa*, *peluis* duo, *femora* integra quinque; sed *vertebras* tantum binas fossiles. Haec omnia, vna cum craniis, aliquam quidem intra terram superficietenus calcinationem passa sunt, et linguae acriter adhaerescunt, osseum tamen etiamnum rasa odorem, imo quaedam passim et nitorem seruarunt; colorem vero plane sordidum, fuscum vel buxeum, ocreolimosum, acquisiuerunt.

Ex enumeratis ossibus (quae ad elephantos pertinere dudum, ante D'AUBENTONUM, cui hoc tribuit BVFFONIVS, accurata eorum secundum figuram et proportionem, cum sceleto elephantino recenti comparatione demonstrarunt e nostris Celeberrimi Viri MESSERSCHMIDIVS, DVVERNOY, GMELINVS,) egregie confirmatur D'AUBENTONI obseruatio circa incrementum ossium in iunioribus animalibus maxime in longitudinem, post adultam vero aetatem magis in crassitiem luxuriantium. Didici etiam e numerosis Musei nostri craniis et maxillis elephantinis, varietatem aliquam in situ dentium exsertorum obseruabilem, quorum alueoli modo tota longitudine paralleli et arcte contigui sunt, modo leuiter diuergunt, vel tandem paralleli inter se distant, spatio saepe quatuor aut quinque vnciarum; et tunc interiecto pariete osseo et cellulositate coadunantur. — Demum

ex

ex iisdem craniis et maxillis apparuit vera dentium molarium conditio, quos modo ſolitarios, modo geminos elephanto tribuerunt auctores, in vtroque veraces. Iuniores enim elephanti molares quidem extus in qualibet maxilla habent vtrinque ſolitarios, oblonga atque detrita corona prominentes; verum adſunt ſimul intra cauernas maxillarum, in imis faucibus repoſtas, latentia ſingula germina. Eaque ſucceſſu temporis excreſcunt, e cellulis ſuis oblique antrorſum prorumpunt, antiquorum dentium faciem poſticam planam trudunt, eosdemque loco ſuo ſenſim depellunt, vt hi tandem toti extra ſenſim obſoleſcentes alueolos aſſurgant et denique ſponte excidant. Tunc iam anteriore ſui parte, quae latior eſt et prominentior, exſurgunt noui illi molares, atque manducatione conuexum primo eorum iugum in planitiem ſenſim adteritur; creſcunt dein praeſertim ſecundum diametrum longiorem, dumque ex antiqua ſede antrorſum veluti progerminant et protruduntur, priorum molarium alueolos, quaeque horum ſuperſunt veſtigia, comprimunt, obruunt et oblitterant; acquiſitaque demum per totam longitudinem area molari plana, oblonga, in ſeram animalis aetatem perſiſtunt. Omnes fere huius incrementi gradus in Muſeo noſtro demonſtrari poſſunt, vbi ſimul apparet conſtans haec, inter molares primae aetatis et ſuccedentes illos, diſtinctio, quod priores non ſolum multo minus in longitudinem exporrecti ſint, ſed et complures habeant radices

conicas; cum ſecundarii contra toto corpore in longitudinalem carinam et veluti cuneum coarctentur, quo alueolo ſuo inhaerent; vnde extra alueolos etiam figura tota facillime diſtinguuntur.

Quum ſupra probabiliorem eſſe dixerim ſententiam illorum, qui elephantos olim in Sibiria multiplicaſſe ſtatuunt, ne huic opinioni ſoli fauiſſe dicar, pro coronide adiiciam obſeruationem primo Ill. TATISTSCHEV, qui maxillam elephantinam, vna cum *Ammonitis* et *Belemnitis*, prope pagum Woldina repertam in Muſeo noſtro depoſuit; aliamque STELLERI, qui reliquias elephantinas, et ſimul Ichthyodontes ſeu vulgo dictas *Gloſſopetras* in Tura fluuio reperta memorat. Nonne haec autem iis ſeruiunt, qui omnia diluuio tribuere auent. Sed quis non potius credat petrefacta illa marinorum corporum, in verum lapidem mutata, oſſibus elephantinis, quibuscum reperta ſunt, quorum tamen natura alterata non eſt, longe antiquiora eſſe, atque tum iam iis in locis ſparſa iacuiſſe, vbi natus forte et educatus occubuit tandem elephas. Quicquid ſit, non diſputo, neque vllam hypotheſin tenaciter defendo. Qui vero omnia explicare amant, quantum lubet hypotheſibus indulgeant, atque ante omnia explicent, quanam ratione *maxilla Rosmari* a IOSEPHO MONTI obſeruata in agrum Bonienſem, cornua monodontis ſeu Monocerotis marini in mediam paſſim Sibiriam, immenſa vis coralliorum exoti-

exoticorum et magna pro parte incognitorum in Gothlandiam eique vicinos maris balthici tractus, aut in montem S. Petri prope Traiectum ad Mosam, itemque conchylia marina indica in elatas mediterraneas regiones, et in montes sub ipsa arcto mari glaciali vicinos, inter Piasidam et Ieniseam fluuios, vbi ista corpora hodie petrefacta reperiuntur, delata fuerint?

DE
FORMATIONE INTESTINORVM
OBSERVATIONES IN OVIS INCVBATIS INSTITVTAE.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna, vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, Abdominis, Alarumque et Pedum agitur.

Auctore

C. F. WOLFF.

§. 119.

Primordium canalis inteſtinorum in Diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ita comparatum eſſe dixi, vt ſit tubus ſimplex, rectilineus, anterius apertus, cuius membranae, vtrinque reflexae, continuarent in amnium ſpurium, quod amnium verum, ex embryonis abdomine continuatum, aeque ac embryonem ipſum, includit. Inteſtina igitur exterius in amnio ſpurio integro in conſpectum veniunt, adeo tamen, vt ſola eorum ſuperficies interna ſeu cauitas ſub ſpecie qui-

quidem foueae cardiacae, rimae et foueolae inferioris appareat. Si igitur externam conſiderare velis ſuperficiem, quo ex habitu, figura et connexione inteſtina cognoſcantur; amnium ſpurium aperiendum eſt. Phaenomena igitur, quae intra hoc apparent, quae interna appello, huius Diſſertationis obiectum conſtituent. Vt, quantum fieri poteſt, breuiſſime ad demonſtrationem eorum peruenïam, quae in ſuperioribus diſſertationibus adfirmaui; foueam cardiacam ventriculi cauitatem, rimam inteſtini medii et foueolam inferiorem inteſtini recti cauitatem eſſe; primum exponam ſubiectum III. dies duodecimque horas incubatum, quod autem non minus in omnibus ſuis partibus perfectum eſt, quam embryones eſſe ſolent IV. dies incubati. Hac enim aetate inteſtina adhuc in illo ſtatu primordiali ſunt, et ita tamen ſimul comparata ſunt, vt pro inteſtinis facile agnoſcantur. In embryonibus aetate ſuperioribus ſtatus ille et phaenomena iam euaneſcunt; in inferiobus inteſtinorum primordia, niſi ex perfectioribus ſubiectis iam nota fuerint, vix cognoſcuntur.

§. 120. In embryonibus igitur, quatuor dies incubatis, vel in ſubiecto praeſenti (Tab. XIII. Fig. 1. 2.), perfectione illis aequali, ſi membrana areae inferior (fig. 1. *r*) quae bullam (fig. 1. *a. b. c.*) producit, a ſuperiori membrana (fig. 1. *r.*) ſoluitur et ad anteriorem partem embryonis reflectitur, quo ipſo ſcilicet facto bulla deſtruitur, amnium verum in conſpectum

Embryo IV. dierum. Limbus et apertura abdominis; primordium vmbilici. Tab. XIII. Fig. 2. *i. i. i.*

ſpectum venit (fig. 2. *b. b.*) quod, niſi laeſum eſt, ſubtiliſſimae veſiculae inſtar expanſum et pellucidiſſimo humore repletum apparet, in praeſenti vero ſubiecto collapſum erat. Primum, quod hic notabile occurrit, limbus abdominis eſt, (fig. 2. *i. i. i.*) ex quo amnium verum continuatur, cuiusque in ſuperioribus mentionem iam feci. Ille a regione pubis anterius incipit, inde retrorſum vtrinque recta procedit ad paruam a ſpina dorſali diſtantiam vsque. Tum incipit adſcendere parallelus ſpinae dorſali, quacum faſciam ſeu laminam intercipit abdominis lateralem (H. H.) ſatis anguſtam adhuc, quae vix quartam partem exhibet abdominis perfecti et integri. Ad regionem cardiacam vel paulo ſuper hanc regionem limbus antrorſum curuatur et cum limbo alterius lateris coniungitur. Limbus iſte oram conſtituit cauitatis totius, quae abdomen, peluim et thoracem complectitur, quae ſatis longa et lata, ſed minus profunda eſt propter anguſtiam laminae lateralis abdominis (H. H.). Apertura huius cauitatis, quae non minor eſt, quam cauitas ipſa in ſuo ambitu, primordium eſt vmbilici; ea enim, prout parietes cauitatis, praecipue lamina (H. H.), increſcunt, imminuitur et conſtringitur; donec vltimum paruum inde orificium pro largiſſimo ſacco abdominis euadit, quod auibus pro vmbilico eſt. Hoc tempore de toto ſacco abdominali ſola regio lumbaris, quam lamina (H. H.) exhibet, et aliqua pars regionis hypochondriacae vtrinque adeſt.

§. 121.

§. 121. Ex ipſo hoc limbo membrana amnii veri continuatur, ſed aliter, quam in quadrupedibus hoc fieri ſolet. In his enim abdominis cutis ad regionem vmbilicalem in longum funiculum vmbilicalem producitur, qui vaſa vmbilicalia continet, et ex eius funiculi fine demum membrana reflexa amnium conſtituere incipit. In auibus nullus vnquam funiculus exiſtit; ſemper mera eſt apertura abdominis loco vmbilici, maior priori tempore, deinde anguſtior, et ex huius aperturae limbo membrana orta continuo retrorſum flectitur et amnium verum conſtituit, quo ergo caput, dorſum, cauda et tubercula alarum pedumque teguntur. Loco ventris magna, quam dixi, apertura eſt, quam ergo non modo abdominis ſed ſimul ipſius amnii veri quoque aperturam eſſe, facile intelligitur.

Amnium verum Fig. 2. *b. b. b.*

§. 122. Ante hunc limbum abdominis membrana apparet, ex inteſtinis continuata, reſecta in hac figura ad aliquam vsque partem (*n*) quae ſurſum et retrorſum reflexa in ſtatu naturali amnium ſpurium producebat (fig. 1. *a. b. c.*), quae etiam nunc in hoc praeparato, vbi reflexa in ſitum naturalem reſtituitur, eadem rurſum phaenomena, foveam cardiacam, rimam foueolamque inferiorem offert. (fig. 1. *f.* N.) Idem quoque limbus inteſtinalis in hac interiori membranae bullae ſuperficie apparet (fig. 2. *k. k.*) quo exterius in bulla integra fouea et rima cingebantur (fig. 1. *e.*) adeo, vt facile

Rimam, exterius in amnio ſpurio apparentem, cauitatem inteſtini medii; futuram ipſum marginem inteſtini meſenterium; foveolam inferiorem cauitatem

recti esse, ostenditur. Fig. 2. et 3.

cile sit easdem membranae huius partes, quas exterius in bulla integra vidimus, interius quoque, in huius membranae superficie interna recognoscere. Quodsi nunc examinare velis, quaenam partes sint, quae retro limbum intestinalem sequuntur, quae exterius in bulla integra foueam cardiacam, rimam et foueolam inferiorem constituebant, quas cauitatem intestinorum esse dixeram; nihil opus est, quam vt limbum abdominis, vna cum eo, quod de abdomine et de thorace adest, simulque pedem et alam remoueas, quo hae membranae partes, tum quatenus extra abdominis cauitatem eminent, tum quatenus intus reconduntur, plenius in conspectum veniant, quo facto hae partes ita apparent, quemadmodum in figura 3. delineatae sunt, vbi vides, immediate post limbum intestinalem intestinum ipsum sequi, adeo vt, si nunc membrana (*n.*) in pristinum situm naturalem reflectitur, ita quidem, vt limbus ipse vna cum membrana reuoluatur, quemadmodum in situ naturali se habet, manifesto appareat, labium marginis rimae exterius (fig. 1. *e.*) a limbo; interius a parte intestini (fig. 3. M. *m.*) anteriori formari; rimae cauitatem reliquam esse ipsius intestini cauitatem, et formari a media posteriori parte intestini (fig. 3. M. *m.*); futuram autem, siue fundum rimae esse postremum intestini marginem, quo laminae vtriusque lateris cohaerere et mesenterium constituere incipiunt. Saepius et variis in subiectis hoc experimentum institui; neque aliter, quam vti dixi,

dixi, ſe rem habere, inuenire potui. Dum in tali praeparato, quod figura 3 exhibet, membrana (*n.*) antrorſum reflexa eſt, ventriculum vides (*i.*) inteſtinum medium (*m.* M.) et rectum (*p. q.*); vbi hanc membranam reuoluis, vti eſt in ſitu naturali; in loco inteſtini medii rimam vides priſtinam, in amnio ſpurio integro viſam, ſuperius in loco pylori fere, ex quo duodenum deſcendit, fouea nunc cardiaca apparet, et inferius loco principii inteſtini recti foveola eſt. Caeterum de figura, quam conſideramus ſecunda notandum eſt, videri, quaſi limbus inteſtinalis (*k. k*) in parte media ab omni retro continuatione liber eſſet et ſeparatus a partibus, quae itidem extra abdomen eminent, (*m.*) quae partes eleuatiores ipſius inteſtini medii ſunt. Hoc inde euenit, quod inteſtinum medium, maxime in parte ſua media valde depreſſum ſitum, et verſus latus embryonis dextrum inclinatum eſt. Dum modo autem membrana (*n.*) antrorſum paulisper trahitur, vt inteſtinum plicatum extendatur, totum inteſtinum a parte ſuprema (*o.*) vsque ad rectum (*p.*) tanquam vnum cum limbo continuum, quemadmodum in figura 3 apparet (fig. 3. *o. m. p*), in conſpectum venit. Malui tamen phaenomena, vti ſponte apparent, et partes maxime in ſuo ſitu naturali delineare. Licet enim ruditer ſatis meas delineationes ſculptor reddiderit, accurate tamen reddidit vt explicationi phaenomenorum et deſcriptioni ſufficiant, neque quidquam veritati detrahant. Caeterum inte-

ſtinum medium accuratius, quomodo ſe habeat in huius aetatis embryonibus ad §. 126. et inteſtinum rectum ad §. 127. definietur; fouea autem cardiaca quod cauitas ſit ventriculi certo tempore in explicatione embryonis trium dierum ad §. 146. demonſtrabitur.

Scholium de ſitu cordis in huius aetatis embryonibus. Fig. 1. 2. 3.

§. 123. Caeterum inteſtinum hoc medium extra abdomen non modo ſed etiam extra amnium prominere totum, ſatis manifeſtum eſt et ex ſola conſideratione figurae patet. Quod cor autem attinet, non negauerim, hoc tectum eſſe in huius quidem aetatis embryonibus. Apparet interim in figura 1. vbi partes omnes in ſitu naturali, et embryo totus valde compreſſus per membranam bullae, qua includuntur, transparent, limbum abdominis, eundemque amnii veri limbum (C.) accurate tangere marginem inferiorem auriculae ſiniſtrae (*k.*). Quodſi ergo cor hoc tempore ita ſitum eſt vt ventriculo ſuo recta deorſum et potius paulum retrorſum (in figura 3 enim ſpina dorſalis extenſa eſt) ſpectet, neceſſe eſt, vt totus ventriculus cum canale auriculari (fig. 3. *a. b.*) extra thoracem, abdomen et amnium verum promineat, et in interſtitio illo (fig. 1. *m.*) inter amnium verum et ſpurium ſitus ſit, tectus in hac figura a parte ſuperiori transparente inteſtini (fig. 1. *d*). In figura 2 vbi embryo amnio ſpurio exutus, erectus eſt, auricula (*g.*) vna cum corde ſurſum ſe retraxit. Verum cum tamen thoracis primordium hac aetate adſit, quod auricu-

las

las anterius et *lateraliter* tegit, et ad eorundem marginem inferiorem in amnium verum reflectitur; hoc sufficit, vt aliquatenus cor thorace tectum esse hac aetate dici possit. In iunioribus autem embryonibus aliter comparatum est; quemadmodum in inferioribus patebit.

§. 124. Detectis autem visceribus ad modum fig. 3. in suprema et anteriori regione thoracis cor se offert, adeo situm, vt apice suo obtuso deorsum, basi sursum respiciat. In eo in hoc latere sinistro ventriculus sinister (*a.*) auricula sinistra (*c.*) et arcus aortae (*d.*) apparent. Ventriculi sinistri pars inferior dilatata et rotunda, superior (*b.*) versus auriculam angustior est, quam partem Perill. *Hallerus* primus, ni fallor, distinxit et canalem auricularem merito vocauit. Auricula sinistra, dextra maior, collapsa et corrugata tenuibus plicis fere circularibus apparet, et in media sui parte fere semper guttam sanguinis coagulatam, per tenuem auriculae membranam transparentem fouet. Aortae principium in hoc latere non apparet; emergit in latere dextro cordis; inde antrorsum adscendit et retrorsum porro curuatur, arcumque producit descendendo. Retro auriculam sinistram appendix quasi apparet (*e.*) vtriusque auriculae, ex qua vena caua descendit, quae collapsa plicas itidem producit varias. Vena caua se in hepar immergit, cuius lobus sinister (*f.*) in hoc latere apparet, angustus, ventriculo et duodeno incum-

Tab. XIII. Viscera in latere sinistro. Fig. 3. Cor *a. b. c. d.*

Hepar (*f.*)

Ren (*s. s.*) cumbens. Miram figuram renes habent, qui proxime ad ſpinam dorſalem vtrinque ſiti ſunt, eiusque ductum ſequuntur. Lineares fere ſunt et longiſſimi; incipiunt in regione thoracis retro pulmones et deſcendunt ad infimam inteſtini recti extremitatem vsque, cui vtrinque inſeruntur. Neque vretheres diſtinguuntur neque in parte ſuperiori vaſorum conglomeratorum quid ſimile obſeruatur, ſed toti reni vniformis, eaque aliena a ſolita, ſtructura eſt, lamellata ſcilicet, lamellis transuerſaliter poſitis diſtinctis et vere ſeparatis, quae praeſertim in anteriori ſuperficie diſtincte euolui poſſunt, in parte poſteriori vero quaſi funi cuidam affiguntur. Poſt diem ſeptimum denique et octauum ex his lamellis glomeres vaſorum complicatorum euadunt.

Ventriculus Fig. 3. I *i.* et Duodenum *i. l.*

§. 125. Inter renem et hepatis lobum ventriculus ſitus eſt, qui ex loco, connexione aliisque ſignis non agnoſci non poteſt (fig. 3. I. *i.*). Ille ex oeſophago ortus recta deſcendit in duodenum (*i. l*), quod retro membranae partem (*o.*) porro in inteſtinum medium (*m.*) tranſit. Adeoque hac aetate ventriculus ipſe non apertus, ſed integer iam eſt et quod (fig. 1.) adhuc ſupereſt foueae cardiacae veſtigium non immediate in ventriculum ſed in duodenum et inde in ventriculum ducit, huiusque igitur duodeni cauitas eſt. Tertio autem die finito, quo tempore fouea cardiaca in ſuo ſtatu perfectionis eſt, eadem ipſius ventriculi cauitas eſt, vti ad

§. 146.

§. 146. videbimus. Quae ſub ventriculo et duodeno ſequitur membranae pars (*o.*) ea eſt, in qua venae adſcendentis, idemque vitellariae vtriusque truncus haeret, qui ſi ſanguine depletus eſt, vti hic contigit, quaſi limbis vtrinque cinctus et tenuiori membrana factus eſſe videtur. Ad inteſtinum tamen pertinet, idemque ſupplet in hac facie laterali ſiniſtra.

§. 126. A duodeno (*l.*) inteſtinum medium incipit et deſcendit vsque ad rectum (*p.*). Hoc medium comprehendit in ſe rudimentum totius inteſtinorum tractus, qui in adulto corpore duodeno et principio recti, vbi caeca oriuntur, intereſt. Efficitur, quemadmodum §. 120. iam dixi, a membrana partium bullae lateralium, eaque eius parte, qua rima formatur, vtpote quae ipſa inteſtini medii cauitas eſt. Vidi in aliis ſubiectis, non totum inteſtinum intra rimam reconditum fuiſſe, ſed eius partem tantum poſteriorem, minorem; anteriorem, eamque maiorem partem reuolutam fuiſſe et contribuiſſe ad formandum limbum, qui exterius in bulla integra apparet (fig. 1. *e.*). Vidi inteſtinum eo vsque reuolutum, vt totum dicas inteſtinum medium inuerſum fuiſſe. Tum rima eo anguſtior eſt et minus profunda, et limbus eo latior. Quo autem rima profundior eſt, eo quoque limbus ſemper anguſtior, eoque pars minor de inteſtino reuoluta eſt, quod facile intelligitur. In ipſo quoque hoc ſubiecto aliqua omnino pars de inteſtino reuoluta eſt. Quantum

Inteſtinum medium quomodo in huius aetatis embryonibus comparatum ſit accuratius deſcribitur (*l. m.* M. *p.*)

tum enim limbus (fig. 1. *e.*) latior eſt limbo (fig. 3. *k.*), tantum illi de inteſtino acceſſit. Conſiſtit igitur inteſtinum medium totum in duabus laminis, in marginibus ſuis poſterioribus coniunctis et in meſenterium continuatis, marginibus autem anterioribus ſeparatis reuolutis et in bullae partes laterales continuatis.

Inteſtinum rectum quomodo ſit comparatum in embryonibus 4 dierum accuratius exponitur. Fig. 3. *p. q.*

§. 127. Inteſtinum rectum (fig. 3. *p. q.*) integrum eſt, infundibuliforme, vtrinque complanatum. Incipit ſuperius hiatu ſurſum oblique et antrorſum ſpectante; inde curuatum retrorſum deorſum in cylindricam partem verſus anum excurrit. Eius laterales partes planiores (*p.*) continuationes ſunt laminarum (M) ex quibus inteſtinum medium conſtat. Hiatus limbo cingitur, a limbo inteſtini medii deriuato. Pars anterior immediate ex ea membranae bullae parte continuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit. Margo poſterior eſt continuatio futurae inteſtini medii, quae in hoc quidem inteſtino exterius in amnio ſpurio integro obſeruatur, in inteſtino recto vero apparet, dum anterior eius pars ſectione longitudinali aperitur, quod non difficile experimentum aliquoties inſtitui. Hiatus inteſtini recti in praeparato huius figurae patet, dum membrana (*k k.*) in ſitum naturalem reflectitur, et eſt ipſa foueola inferior (fig. 1. N.). Margo nempe hiatus limbo cinctus ora eſt foueolae; cauitas inteſtini recti pro eadem foueolae cauitate facillime et manifeſto recognoſcitur. Atque hic quoque idem, quod

quod de inteſtino medio notaui, obtinet; non totum inteſtinum rectum intra foueolam reconditum eſſe, ſed partem eius ſuperiorem (fig. 3. *p.*) quae prope oram eſt, reuolui in ſitu naturali vna cum membrana (*k.*) et contribuere multum ad augendum foueolae limbum (fig. 1. N.).

§. 128. In dextro latere remotis membranis et partibus thoracis abdominisque lateralibus vna cum ala et pede, viſcera huius conditionis in conſpectum veniunt. In ſuprema et anteriori thoracis regione cor apparet, eiusque quidem ventriculus ſiniſter maior, minor dexter, arcus aortae et auricula dextra. Ventriculus ſiniſter (*a.*) dextro longe maior, neque ideo tectus ab hoc, figurae globoſae eſt, cum in latere ſiniſtro ob canalem auricularem, in quem ille abit, oblongior eſſe videretur. In eius dextra ſuperficie paulo ſuperius ventriculus dexter ſub ſpecie protuberantiae ei adhaeret (*b.*) qui fere ſemiglobo ſam figuram habet, tamen verſus aortam paulo longior excurrit. Ex hoc aortae arcus (*c.*) adeo oriri videtur, vt non mirum ſit, ſi *Malpighius* hoc phaenomenon pro veritate accepit, quem *Malpighii* errorem Perill. *Hallerus* correxit. Retro arcum aortae auricula dextra ſita eſt. Haec vti ſiniſtra ſaepe ſanguine diſtenta, ſaepe tamen collapſa inuenitur, ſoletque figura eſſe fere rotunda et ſuperficie gaudere leuiter conuexa, margineque anteriori crenato incumbere ventriculo dextro et aortae. Pone hanc

Viſcera in latere dextro. Fig. 4.

Ventrieuli cordis (*a.b.*)

Aorta (*c.*)

Auricula dextra (*d.*)

Pulmo (*e.*)

pulmo apparet (*e.*); corpuſculum oblongum fere cylindricum. Tenerrima inter omnes partes ſubſtantia gaudent pulmones fere pellucida. Inferior pars mammillaris ſubtiliſſimae veſiculae inſtar primum in conſpectum venire ſolet. Inter cor et pulmonem ſub ipſa auricula hepatis lobus dexter ſitus eſt (*f. f.*) oblongus curuatus ſuperficie anteriori concaua, cui cor incumbit; a parte eius ſuperiori vena caua recipitur. Ren (*g. g.*) conſueta ſua figura lineari iuxta ſpina dorſalem decurrit, in rectum inteſtinum inſeritur. Sub ipſo pulmone arteria vitellaria dextra prodit, deſcendit, in membrana bullae continuat. Vena vitellaria ex trunco venoſo communi (fig. 3. *o.*) orta deſcendit ſimilique modo in membrana continuat.

Hepar (*f. f.*)

Ren (*g. g.*)

Arteria vitellaria (*h. h.*)

Lamina inteſtini medii dextra (Fig. 4. *i. i.*)

§. 129. Lamina inteſtini medii dextra, ab extremitate inferiori duodeni (fig. 3. *l.*) orta, a primo hoc ortu in latere dextro apparet (*i.*) ſub ipſo lobo hepatis dextro (*f.*) inde aequali latitudine deſcendit. In hoc autem latere dextro nullo limbo anterius lamina inteſtinalis a reliqua membrana bullae ſeparatur, diſtinguitur autem ab eadem vti et a poſteriori membranae parte, quae meſenterium conſtituit, maiori aliqua craſſitie et opacitate. Inteſtinum rectum nulla alia phaenomena offert in hoc latere, quam quae in latere ſiniſtro iam obſeruata ſunt.

Embryo II dies incubatus. Fig. 5. Caput cor.

§. 130. Conſideratis hactenus inteſtinorum primordiis quomodo ſe habeant in embryonibus IV. dierum;

dierum; eadem primordia nunc repetenda sunt ex primis, quantum fieri potest, embryonibus, vt, vnde haec quoque, quae hactenus vidimus, primordia suum ortum duxerint, pateſcat. Primum in hunc finem inquiramus subiectum illud idem, quod in prioribus dissertationibus in figura 6. quoad externum habitum integrum et amnio spurio inclusum expoſui; nam in iunioribus nihil aliud de intestinis intus deprehenditur, quam quod etiam in integra bulla sponte in conſpectum venit. In hoc subiecto igitur bullam aperui, vaginam capitis a parte embryonis supracardiaca detraxi omnemque membranam bullae ad interiores sui limites prope limbum reſecui, ipſamque, quae adeſt de amnio vero, partem supracardiacam remoui, vt nudus embryo remaneret. Tum iſte apparuit ad modum figurae 5. In eo notari merentur synciput (*a.*) ex lobis anterioribus cerebri compoſitum, permagnum; deinde occiput (*b.*) et pone illud medullae oblongatae tubercula (*c. d.*) quae partes sub ſpecie quator vel quinque tuberculorum in vnam seriem diſpoſitorum in primis embryonibus XXIV. horarum, qui plane erecti sunt et proni cubant, iam obſeruari ſolent. Deinde cor singulari situ ſe offert, quod baſi retrorſum et ea parte in qua apex poſt haec oritur, antrorſum recta reſpicit. In eo corde auricula siniſtra (*b.*) maſſulam sanguinis coagulati in sua cauitate habet; figurae fere rotundae eſt; tenuiſſima membranula conſtat. Inde canalis auricularis (*i.*) breuis antror-

ſum et paulo ſurſum producitur, qui magis dilatatus in ventriculum ſiniſtrum (*k*) vnum nempe eundemque canalem continuatum abit, tum iſte curvatur paulum deorſum et maxime ſimul dextrorſum; iterumque ad locum (*l.*) retrorſum et ſurſum curvatur et nunc ab ipſo termino (*l.*) aorta eſſe incipit.

Lamina abdominalis, primordium abdominis.

Fig. 5.

§. 131. In parte embryonis infracardiaca lamina exterior (*o. p. q. s. t. z.*) rudimentum abdominis exhibet, quod autem magis multo diſtare a perfecto abdomine, quam illud in ſubiecto IV. dierum (fig. 2.), facile patet. Mera ſiquidem lamina eſt oblonga, anguſta, leuiter concaua, neque cum ſacco abdominis, qui largiori cauitate, anguſtiori orificio gaudet, vllam ſimilitudinem habet. In ſubiecto quatuor dierum ambitus cauitatis, niſi maior ambitu aperturae, aequalis ſaltem erat eidem. In hoc embryone leuior concauitas laminae pro cauitate abdominis et peripheria laminae ſeu margo loco aperturae eſt. Haec caeterum peripheria limbo inſtructa eſt tenuiſſimo, qui limbo (fig. 2. *i. i.*) reſpondet. Partes vtrinque laterales laminae (*u. u. v. v.*) referunt laminas (fig. 2. H. H.) quae regionem abdominis lumbarem conſtituunt. De tota regione epigaſtrica, de vmbilicali, de toto hypogaſtrio, de ipſa pelui nihil adeſt. Probe enim notandum eſt, partes, quae in adulto corpore in poſtremis locis abdominis reconduntur, renes, laminas meſenterii, et meſorecti, in hoc embryone nudas eminere ante oram

oram laminae abdominalis. Laminae ſcilicet interiores (*f. f. r. r.*) laminas meſenterii repraeſentant, quae renes ſibi exterius applicatos habent, adeo vt ren a lamina meſaraica diſtingui nequeat. Pars autem harum laminarum infima meſorectum exhibet. Quodſi igitur nihil eſt, quod meſorectum aut locum futuri inteſtini recti, neque coccygis rudimentum anterius tegit, peluim adeſſe dici non poteſt. Ex marginibus lateralibus laminae abdominalis, (*s. t.*) ex quibus in ſubiecto quatuor dierum (fig. 2.) nec minus in embryone trium dierum (fig. 6.) amnium verum continuatur, quod in praeſenti ſubiecto II dierum in tota regione infracardiaca deficit, membranula continuatur tenuiſſima, quae ſe applicat ad membranam areae inferiorem, ex laminis (*f. f. r. r.*) continuatam, et tanquam huius membranae lamella ſuperior ſeu exterior conſideranda eſt.

§. 132. Partes laminae abdominalis laterales (*u. u. v. v.*) ſuperius ad regionem (*p. q*) vbi lamina magis, quam in parte inferiori concaua eſt, anguſtiores euadunt et denique in regione cardiaca ipſa plane euaneſcunt, adeo vt margines laminae abdominalis ſurſum in immediatos ſpinae dorſalis margines anteriores (*h. f.*) tranſeant, valde ſibi propinquos, et faciem ſpinae anteriorem anguſtiſſimam inter ſe includentes; pars enim ſpinae dorſalis (*f. d. e.*) regionem eius thoracicam refert. Ex his marginibus ſpinae dorſalis anterioribus (*h. f.*) vtrinque membrana

Quid loco thoracis ſit? Thorax ipſe deficit.

brana amnii veri oritur ſupracardiaci, quae, dum oritur, ilico retrorſum reflectitur circa ſpinam thoracicam, eiusque vaginam, ipſi ſpinae conformem, cylindricam, conſtituit. Membranae autem amnii veri ſuperior pars, quae caput inuoluit, ex processibus (*g. f.*) oritur et actutum inde circa ſynciput (*a.*) reflectitur et ſuper occiput porro in partem amnii dorſalem continuat. Amnium hoc ſupracardiacum, anguſta capitis et ſpinae dorſalis thoracicae vagina eſt, quae in dorſo ad regionem cardiacam terminatur plica ſemilunari. Ex quibus nunc facile patet, nullas hoc tempore thoracis partes laterales, quae in adulto a coſtis efficiuntur neque partem eius anteriorem, quae a ſterno formatur, generatim nullum thoracem adeſſe. Nimirum in foetu, propediem in lucem prodituro, amnium oritur ex apertura vmbilicali abdominis et continuatur ex cute, quae prius pectoris faciem anteriorem, deinde abdominis regionem epigaſtricam, et vmbilicalem denique, obduxerat. In quadrupedibus quidem cutis, ex apertura continuata, in longam prius funiculi vmbilicalis vaginam, attenuata, producitur, et tum demum in amnium abit. In auibus vero immediate ex apertura vmbilicali in amnium cutis reflectitur. In auibus igitur in ipſa apertura vmbilicali, vbi cutis in amnium reflectitur, finis abdominis ſimulque principium amnii ponendum eſt. Nunc in embryone IV. dierum (fig. 2.) iam vidimus, aperturam vmbilicalem maiorem eſſe quam in foetu;

tu; extendere ſe ſurſum ad regionem vsque circiter cardiacam. Ibi ergo immediate ex fine thoracis amnium oriebatur in parte ſuperiori; et regio de abdomine epigaſtrica nulla aderat. Lateraliter amnium oriebatur ex parte abdominis lumbari; pars iliaca et vmbilicalis ſimiliter deficiebant. In praeſenti denique embryone II. dierum apertura vmbilicalis iterum maior eſt; extendit ſe ſurſum ad regionem primae vertebrae dorſi vsque (fig. 5. *f.*) quae eadem ſimul regio maxillae inferioris (g.) eſt; (nam quae pro collo ſumatur, pars ſpinae dorſalis, non datur hactenus; circa diem octauum illa in collum elongatur). Atque in eodem hoc loco ad regionem primae vertebrae dorſi amnium quoque oritur immediate, et reflectitur, vbi ortum eſt, immediate circa ſynciput embryonis. Lateraliter autem oritur vtrinque ex marginibus anterioribus ſpinae dorſalis et ſimiliter actutum reflectitur. Oritur ergo amnium in ipſis iis locis, vbi thorax oriri deberet; idemque in parte ſuperiori punctum (fig. 5. *f.*), prima ſcilicet vertebra dorſi et eadem linea lateraliter (*h f.*), latus vertebrarum dorſalium, quae in corpore adulto principium thoracis exhibent, in hoc embryone principium amnii veri, adeoque finem thoracis ſuppeditant, id eſt, vt paucis, quod res eſt, dicam verbis, thorax hactenus nullus adeſt; nam ſi quis diceret, thoracem tamen adeſſe, ſed inuiſibilem, ſed pellucidum &c. eum alias res agere, facile patet.

§. 133.

Et cor nudum eſt, nec, niſi extimo embryonis involucro tegitur.

§. 133. Cor, quod ad faciem anteriorem ſpinae dorſi thoracicae ſitum eſt, nullo thorace hactenus tectum eſſe hoc tempore, non opus eſt, vt moneam, ſiquidem thorax hoc tempore nullus adeſt. Sed neque amnio vero tegitur, niſi in poſtrema forte ſui parte, adeo nempe, vt dimidia circiter poſterior auriculae (*b.*) pars vtrinque ab oriente membranae amnii parte laterali tangatur, anterior vero eius dimidia pars, porro canalis auricularis (*i.*) totus, et totus ventriculus (*k.*) nec non aorta (*l.*) nudae promineant extra hoc amnium thoracicum. Hoc enim dum lateraliter ex marginibus anterioribus ſpinae (*b. f.*) oritur, vix antrorſum producitur, quin actutum reflectitur retrorſum ad formandam vaginam cylindricam circa ſpinam dorſi. Superius autem membrana amnii orta ex proceſſibus (*g. f.*) multo minus cor tangit. Atque hoc valet de corde dum in ſyſtole eſt et contractum. Vbi vero idem in area viua, ſanguine in ventriculum impulſo, diſtenditur, ſaltim ad alteram tantam, quam nunc in hac figura habet, longitudinem antrorſum ſagittae inſtar proſilit. Sic igitur cor nullo thorace, nullo amnio vero, ſed ſolo ſpurio, et quidem ea eius parte, quam vaginam capitis dixi; immediate tegitur. Ita ergo omnino mirum eſt, cor non modo intra embryonem non exiſtere, ſed neque eius proximo inuolucro, amnio vero contineri, ſed ſolo exteriori demum inuolucro, amnio ſpurio nempe, includi. Quod quidem eo magis notan-

notandum mihi fuit, cum Perill. *Hallerus*, princeps harum inquisitionum Autor, cor omni tempore a thorace tectum esse, adfirmauerit (Phys. Tom. VIII. pag. 364.).

§. 134. Si haec lamina abdominalis (§. 131.), rudimentum sacci abdominis in embryone duorum dierum, cum abdomine in embryone IV. dierum, et cum adulto sacco abdominis, comparatur; facile apparet, quomodo successiue eiusmodi perfectum abdomen formetur. In primis, qui obseruati sunt, embryonibus lamina abdominalis plana est, caeterum longa et angusta. Inde incipit marginibus suis lateralibus adeo antrorsum curuari, vt lamina fiat concaua, qualem in praesenti subiecto habemus. Denique margines contrahuntur magis magisque et parietes contra increscunt. Sic species sacci nunc primum oritur, orificio in parte anteriori magno instructi; quae fere conditio est in embryone (fig. 2.). Denique auctis magis continuo sacci, aut conuolutae laminae, lateribus, marginibusque continuo magis constrictis, tandemque concretis, perfectum inde et clausum abdomen euadit. Schol. de formatione abdominis.

§. 135. Thoracem autem oriri, manifestum est, dum membrana quam ex marginibus vtrinque spinae dorsalis thoracicae (*h. f.*) et superius ex processibus (*g. f.*) continuari, et ad amnium verum pertinere dixi, incipit adeo prolongari, vt a processibus (*g. f.*) versus cor descendat, a marginibus vero Scholium de formatione thoracis.

vero (*h. f.*) antrorſum verſus idem producatur, prius quam ſurſum ſuper caput et retrorſum ſuper ſpinam dorſalem reflectitur. Tum ea membranae pars, quae a proceſſibus et marginibus verſus cor producitur, quaeque interior eſt, ad thoracem pertinet, eiusque primum rudimentum refert; illa vero, quae poſt reflexionem ſurſum et retrorſum continuat, quaeque exterior eſt, ad amnium pertinet et ipſa membranae reflexione ſuperior thoracica pars aperturae vmbilicalis efficitur. Quo igitur longius membrana, prius quam reflectitur, deorſum et antrorſum producitur, eo maior de thorace pars adeſt. In praeſenti embryone a primo ortu immediate reflectitur; ideoque nullus thorax adeſt, et tota membrana ad amnium pertinet. In embryone trium dierum (fig. 6.) ad notabilem iam longitudinem illa deſcendit tum in parte anteriori (fig. 6. *m.*) quae ſterni primordium refert, tum etiam in parte laterali (fig. 6. *n.*) cuius aliquam in hac figura partem reſecui, vt auricula cordis detegatur. Sic ſucceſſiue deſcendit haec membrana per regionem thoracis, per epigaſtricam regionem ad regionem vmbilicalem vsque, et formatur ea ratione paullatim thorax, regio abdominis epigaſtrica et vmbilicalis. Videtur autem conſtrictio embryonis et capitis depreſſio aliquid ad hunc deſcenſum membranae et formationem thoracis contribuere. Semper enim ſuperior membranae pars, quae ex proceſſibus (fig. 5. *g. f.*) continuatur, ſynciput (*a.*), circa quod illa

adſcen-

adſcendit, tangit. Dum igitur embryo conſtringitur, et caput deprimitur, neceſſe eſt, vt membrana ſimul deprimatur. Tamen non vnicam, neque praecipuam cauſam eſſe, quin, etiamſi caput erectum teneretur, tamen thoracem forte productum iri, facile largior. Siquidem mechanicis eiusmodi cauſis parum tribuo in formandis corporibus organicis, quae viribus potius, materiae inditis, mea quidem ſententia debentur.

§. 136. In anteriori laminae abdominalis facie concaua ſimilis fere continetur lamina anguſtior et magis conuoluta (*f. f. r. r.*) cuius in deſcriptione aperturae amnii ſpurii (§. 100.) ſub nomine fiſtulae inteſtinalis mentionem iam feci. Ea vero non inteſtini primitiui ipſius ſed meſenterii primordium eſt, huiusque duas laminas, a ſe inuicem adhuc dum ſeparatas, et late patentes, exhibet, adeo vt inter vtrasque has lamellas, quae fiſtulae parietes conſtituunt, nuda ſpinae dorſalis facies anterior appareat, fundumque fiſtulae huius ſeu laminae concauae efficiat. Vti igitur fouea cardiaca ſuo tempore, die ſcilicet tertio finito, ventriculum; vti rima poſt diem tertium inteſtinum medium; vti denique foveola inferior die tertio finito inteſtinum rectum refert; ita apertura amnii ſpurii ſeu fiſtula inteſtinalis meſenterii primordium exhibet. Margines conuolutae huius laminae anteriores limbi illi ſunt (Diſſ prior. fig 6. *n. n. m. u.*) interiores ſeu inteſtinales, qui, dum ſucceſſiue conſtringuntur, futuram

Aperturae amnii ſpurii die II. exterius apparentis explicatio.

Primordium meſenterii ex duabus laminis diſtantibus conſtans.

efficiunt (Tab. prior. Diff. fig. 7. *l.*). Hinc ergo patet, futuram proprie esse marginem posteriorem intestini medii, seu coniunctionem posteriorem laminarum intestinalium (fig. 3. *m.* M.) vbi hae laminae coniunctae incipiunt mesenterium constituere. Dum igitur futura formatur, partes huius laminae laterales vniuntur, et mesenterium hac ratione oritur, simulque intestinum medium formari incipit. Illud ergo simili fere modo, vt intestinum, fit, dum duae laminae, quae separatae prius fuerunt, coniunguntur et concrescunt. Et patet igitur, si ad formationem intestinorum respicimus, ea non modo laminas fuisse meras planas certo tempore die scilicet quarto, quae marginibus anterioribus separatis reuolutisque pateant, solisque posterioribus in mesenterii laminas continuatis, cohaereant, sed adeo fuisse repraesentata, prius quam ad hunc statum perveniunt, scilicet secundo die finito, per laminas, quae neque marginibus posterioribus cohaerent, sed a primo principio separatae sunt et late a se inuicem distant. Hoc modo de his laminis mesenterii separatis notandum est, eas adhucdum renes sibi exterius adiectos vtrinque habere, adeo vt laminae (*f. f. r. r.*) renum aeque ac mesenterii primordia referant.

Quid loco intestini medii hoc tempore fit. Nullum eius

§. 137. Quid nunc de intestini medii, primordio hoc tempore sentiendum sit, facile patet. Cum margo fistulae apertae margo intestinalis mesenterii sit, et intestinum igitur in parte membranae

nae exteriori quaerendum ſit; ea membrana vero ab ipſo margine fiſtulae immediate extrorſum reflectatur, adeoque bullam conſtituere incipiat et ab eo termino igitur ad bullam ipſam pertineat; nullus locus et nulla particula in hac membrana ſupereſt, quae pro inteſtini primordio haberi poſſit; conſequenter nullum hoc tempore inteſtini primordium adeſt. In embryone IV. dierum (fig. 3) inteſtinum pars quidem eſt membranae bullae, ſed diſtincta tamen a reliqua bullae membranaa aliqua opacitate, cum reliqua membrana tenuior et pellucidior ſit. In hoc autem embryone nullum non modo ſignum datur, quo interior huius membranae pars, quae inteſtinum referat, ab exteriori diſtinguatur, quae ad bullam pertinet; ſed neque locus datur, vbi inteſtinum exiſtere dici poſſit, neque particula in membrana eſt, quam ad laminam inteſtini referre, vel pro ea ſumere liceret. Eſtque accurate cum inteſtino medio, veluti cum thorace hoc tempore comparatum. Producitur autem lamina inteſtinalis, quemadmodum de thorace dictum fuit, dum membrana bullae proxime ad terminum laminae meſaraicae per nutritionem augetur, et ſic noua membranae pars inter laminam meſenterii et eam membranae partem, quae ad bullam pertinet, producitur. Hoc vero poſt diem tertium denique fit, quando laminae meſenterii iam vnitae ſunt. Diſtinguendum igitur eſſe, videmus, inter productionem et formationem inteſtini medii. In embryone qua-

rudimentum hactenus adeſt.

tuor dierum vidimus illud inteſtinum nondum formatum eſſe. Erant enim loco inteſtini duae laminae marginibus poſterioribus cohaerentes, anterioribus autem patentes et reuolutae. Dum poſthaec hae laminae etiam anterius coniunguntur; inteſtinum ex his laminis formatur. Hactenus ergo nondum formatum eſt in embryone IV. dierum. Sed laminae tamen adſunt, ex quibus formatur. In praeſenti embryone II dierum iſtae laminae nondum adſunt. Ergo prius laminae producuntur; deinde ex iis inteſtinum formatur.

Primordii ventriculi conditio. (Fig. 5. *n*.)

§. 138. Ventriculum non ſatis diſtincte vidi quidem in hoc embryone; aliquid tamen reperi membranae (*n*) quod eius locum occupabat, ſed ita non erat comparatum, vt pro eiusmodi ventriculo, qualem in embryonibus, aetate ſuperioribus inueni, haberi potuiſſet. Figura conſueta deerat. Erat autem (*n*) membranula ſimplex transuerſa, ex ſuperiori laminarum meſenterii parte continuata. Sicuti laminae meſenterii in partes bullae laterales, ita haec membranula in vaginam capitis producebatur, quemadmodum hoc ipſum in externa bullae facie (Tab. Diſſ. prior. fig. 6.) apparet. Haec itaque cum primordii ventriculi ſit conditio, pro vero quoque primordio eius hanc membranulam agnoſco, ſed tamen diuerſo ab illis (fig. 3 et 6.) et gradu perfectionis inferiori ideo, quod ſolita figura externa conoidea non gaudebat.

§. 139.

§. 139. Euidentius autem inteſtini recti primordium, quomodo comparatum ſit hac aetate, conſtat. Laminae meſaraicae, quae ſuperius latiores ſunt, deorſum continuo anguſtiores euadunt, donec in regione (*y.*) praeter limbum nihil adſit. Hic ſolus limbus ergo ad finem vsque extremitatis medullae vtrinque decurrit, ibique ex vtroque latere coniungitur (*z*) extremitatemque globoſam ſpinae dorſalis (*y.*) cingit. Haec inferior itaque limborum coniunctio (*z.*) primordium inteſtini recti eſt. Ex comparatione enim non modo cum embryone ſequenti (fig. 6.) vbi huius inteſtini primordium infundibili forme iam eſt; ſed etiam ex connexione partium facile patet, hanc limborum coniunctionem eſſe marginem illius inteſtini, quale (fig. 6) exiſtit, ſuperiorem, ſeu oram, qua id terminatur, et quae ſimul limbum foueolae inferioris in bulla efficit, quae quidem non meſorectum ſed ipſum inteſtini primordium eſt.

Quid loco primordii inteſtini recti adſit. Sola limborum interiorum coniunctio. (Fig. 5 *z.*)

§. 140. Inteſtinum rectum igitur primam ſuam originem inuolucro caudae debet et inde formandae foueolae inferiori; quemadmodum thoracem vidimus pendere a parte ſuperiori amnii veri, qua vagina circa caput formatur; vtrique enim ſimilem eſſe rationem facile patet. Dum membrana areae inferior circa extremitatem embryonis inferiorem in ſpeciem bullae eleuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit, huius bullae margo ſuperior ipſa haec

De formatione inteſtini recti Scholium.

haec pars limbi eſt, vel coniunctio limborum, quam pro recti primordio agnoſcimus. Margo nempe ille ſuperior inuolucri efficitur, dum membrana ad hunc locum reflectitur et rugam producit, cuius lamina interior adſcendens inteſtini recti primordium eſt, exterior deſcendens ad inuolucrum pertinet. Simili modo vidimus thoracem fieri, dum membrana a proceſſibus (*g. f.*) deſcendens primordium thoracis, ſaltem aetate paullulo ſuperiori, eademque reflexa adſcendens amnium verum referret, eaque ratione ſimilem rugam produceret. Deinde tota haec ruga dum per nutritionem pars interior aeque ac exterior elongatur, magis magisque adſcendit ad regionem pubis vsque; ſic lamina interior, quae inteſtini recti paries anterior eſt, perficitur; ſimulque eiusdem parietes laterales et poſterior creſcunt et inteſtinum infundibuliforme oritur.

De formatione pelvis Schol.

§. 141. Hinc peluis ortus intelligitur, cui omnino iterum eadem inteſtini recti et thoracis conditio eſt. Quemadmodum inteſtinum continuatio inuolucri caudae eſt, et cum eo inuolucro rugam producit, ita peluis primordium, vti thorax, amnii veri continuatio eſt, et ſimilem rugam cum eo conſtituit, quae inter vtrasque laminas rugae inteſtini recti continetur, ſimulque cum hac ruga creſcit et adſcendit in ſolitam foueolae inferioris altitudinem. In hoc quidem embryone peluis nondum obſeruatur, ſed in adultioribus eius primordium ſub

ſimilis

ſimilis limborum abdominalium coniunctionis ſpecie primum apparet; qui limbus marginem oſſium pubis tum in ſpecie refert. Iſte ſenſim eleuatur et in eam denique formam abit, quam in figura ſequenti conſiderabimus.

§. 142. Generatim, quemadmodum in Diſſertatione praecedenti, analogiam eſſe vidimus in ſtatu embryonis primordiali inter totum truncum, tubum cibarium, ſyſtema neruoum areolamque pellucidam; ſingularem magis ſimilitudinem obtinere facile patet, inter truncum embryonis in ſpecie et tubum cibarium. Thoraci quippe ventriculus, abdomini inteſtinum medium, peluique inteſtinum rectum reſpondet. Tubus cibarius in amnium ſpurium continuatur, eiusque principium eſt, adeo vt ex ventriculo in ſpecie vagina capitis, ex inteſtino medio partes bullae laterales, et inuolucrum caudae ex inteſtino recto propagentur. Similis conditio trunco eſt reſpectu amnii veri, in quo easdem facile, quas in ſpurio notaui, partes diſtinguas, vaginam capitis, partes laterales, et inuolucrum caudae. Simili igitur modo analogae trunci partes in analogas partes amnii veri continuantur, iisque principia ſuppeditant. Ex thorace, vel in iuniori embryone ex radice thoracis vagina capitis in amnio vero oritur. Ex faſciis abdominalibus, quae regionem lumbarem referunt, partes laterales amnii veri, ex pelui inuolucrum caudae in amnio vero producitur. Porro autem vidimus (§. 135.) in exemplo thoracis

Scholium de Analogia inter truncum embryonis in ſtatu primordiali et tubum cibarium.

et in peluis exemplo, ita esse cum harum partium trunci formatione comparatum, vt prius existat amnium verum, quod in ipsis iis locis, ad spinam nempe dorsalem immediate, oritur, in quibus partes illae trunci, si adessent, oriri deberent. Tum ipsum harum partium amnii veri principium ad spinam dorsalem prolongatur, et hac ratione partibus trunci, veluti thoraci, pelui, formandis ansa praebetur. Eandem vero conditionem respectu formationis vidimus quoque in intestino medio (§. 137.) cuius locum in embryone duorum dierum (vbi amnium verum quoque thoracis locum occupat,) partes bullae laterales occupabant, adeo vt hae immediate ex marginibus anterioribus laminarum mesaraicarum orirentur, vbi laminae intestini medii oriri debuissent. Similem quoque in intestino recto conditionem vidimus (§. 139.). In ventriculo (§. 138.) non ita distincte quidem vidi, sed nullum dubium est, simili quoque modo cum hoc esse comparatum. Denique abdomen in primo initio lamina explanata est, quae sensim conuoluitur, marginibusque constrictis et lateribus auctis in saccum mutatur, tandemque clauditur (§. 134.). Idem de intestino medio valet. Imo de toto trunco affirmare licet, eum fuisse laminam planam, quae margine superiori deorsum voluto thoracem, margine inferiori sursum curuato peluim, et marginibus lateralibus ad se inuicem antrorsum conniuentibus abdomen producat. Atque idem omnino de tubo cibario valet.

let. Neque negligendum eſt, ſicuti caput embryonis depreſſum formationem thoracis adiuuat (§. 135.), ita ſimili modo, conſtricto rurſum per thoracem corde, et deorſum compreſſo, adiuuari formationem ventriculi; cui formando vagina capitis ſimili modo, ac amnium verum thoraci, anſam praebet.

§. 143. Dum lamina abdominalis, conuoluta, marginibus conſtrictis, tandemque concretis in ſaccum vltimum abit clauſum, et eam formam perpetuo retinet; lamina vero inteſtinalis conuoluta cylindricum tubum apertum prius, deinde marginibus conſtrictis clauſum efficit, et denique, formam tubi retinendo, in longiſſimum canalem extenditur, multifariam curuatum et complicatum: an diuerſi huius euentus phaenomenorum, in ſtatu primordiali ſimilium, cauſa, vel aliquid cauſae in eo conſiſtit, vt abdomen inteſtinum continens, ab eo dilatetur in latum ſaccum? inteſtinum vero in abdomine contentum, non dilatatum retineat ideo tubi ſpeciem, et cogatur, dum in minori ſpatio comprimitur, in plexus ſe complicare? Non multum me credere his explicationibus mechanicis, ſuperius iam dixi. Thoracem, abdomen, peluim, ventriculum, inteſtina, formari, non perpetuo adfuiſſe, id vidimus. Qua ratione formentur, id vidimus quoque; cauſas efficientes non vidimus, neque de iis ſermo mihi eſt in his diſſertationibus.

Scholion. De cauſa differentiae inter abdomen et tubum cibarium in adulto.

Renum primordia (*f. f. r. r.*)

§. 144. Denique renes quoque laminis meſenterii adhaerere, iam monui, quibus igitur non ſolum meſenterii, ſed renum quoque primordium repraeſentatur, adeo, vt interior ſuperficies laminas meſenterii, exterior renes exhibeat. Non quidem ſeparaui has partes a ſe inuicem, vt vtraque haec primordia diſtincta viderim; ſed multa tamen ſunt, quae de vera exiſtentia renum, his laminis applicatorum, dubitare non ſinunt.

Phaenomena interna in embryone III. dies incubato. fig. 6. Caput (*a. b. c.*)

§. 145. Ad ſubiectum denique tranſeo, cuius in prioribus diſſertationibus externa inuolucra expoſui, vltimum, quod in figura ſeptima ibidem delineaueram, quod nonniſi duos dies duodecimque horas incubatum quidem fuit, ſed ſubiecto tres dies incubato facile tamen aequale erat. Inuolucris itaque omnibus exutis, praeterea laminis abdominalibus lateralibus, inferiorique parte laterum thoracis remotis partes interiores ſecundum fig. 6. in latere ſiniſtro hoc modo in conſpectum veniunt. Caput, quod eleuaui, vt cor et ventriculus diſtincte videri poſſint, adeo erat poſitum, vt occiput (*b.*) antrorſum, ſynciput (*a.*) verſus cor proſpiceret. In anteriori parte thoracis cor, vt ſolet, comparet, adeo ſitum, vt ventriculo ſuo, qui die ſecundo (fig. 5.) antrorſum directus erat, oblique deorſum nunc proſpiciat, quemadmodum die quarto finito idem ventriculus recta deorſum et potius retrorſum paulisper ſpectat (fig. 3). Egregie hanc ſitus cordis mutatio-

Cor *o. p. q.*

tationem intelligere licet ex incremento thoracis (§. 135.) explicato. Cum die secundo nullus adsit thorax, qui possit cor continere et comprimere, ventriculus sanguine dilatatus recta antrorsum prosilit, eundemque situm in statu, vbi neque agit, neque patitur, inter systolen et diastolen medio, conseruat (fig. 5.). Tertio autem die finito dum thorax in parte superiori formari incipit, cor ex priori situ deorsum paullatim premitur; denique die quarto, vbi thorax magis increuit illud magis quoque versus corpus embryonis coercetur. Ex solis his phaenomenis, nisi loco thoracis amnium verum a spina dorsali oriri et sursum abire vidissem die secundo, colligeret forte, nullum thoracem existere, Perillustris Vir, qui cor nudum esse negat. Auricula sinistra (*o.*) massulam sanguinis fouet, vt solet, coagulati, tenuisque vesiculae instar transparens est, et figuram globosam habet. Inde paulo angustior canalis auricularis (*p.*) oblique antrorsum descendit et in protuberantem ventriculum sinistrum (*q.*) dilatatur, ex quo canalis cordis in dextrum latus curuatur ibique in arcum aortae adscendit. Retro cor hepatis lobus sinister apparet oblongus, tenuis, deorsum in membranam (*r.*) continuatus et retro hunc lobum hepatis ventriculus (*s.*). Hepar.

§. 146. Iste nunc iam ea figura et habitu gaudet, quo satis manifesto cognosci possit, figura nempe oblonga, fere conoidea, extremitate superiori angu- Ventriculus cuius cauitatem foueam cardiacam

esse in hoc embryone ostenditur.

angustiori, ex oesophago continuata, quae rudimentis pulmonum tegitur. Inde paulo antrorsum curvatus descendit et apertura inferiori denique terminatur. Haec apertura ventriculi (*v*.), quae eadem fouea cardiaca est, tenero limbo cingitur, qui deorsum in limbum intestini continuat, et sicuti in facie externa bullae vena adscendens recta in foueam cardiacam intrare obseruatur, ita in hac quoque superficie interna haec vena egregie apparet (*t*.), sanguine distenta, quae adeo in ventriculi cauitatem recta intrat, vt totam hanc cauitatem occupet, et ventriculus sanguine venae turgere, eique quasi externum inuolucrum seu vaginam praebere videatur. Tamen proprie non in cauitatem ventriculi, sed potius in eius membranam transire dicenda est haec vena, licet totam cauitatem fere occupet. Ventriculus enim continuatio est membranae bullae; iam vero hactenus in ea membrana intraque eius substantiam, quasi inter duas laminas vena processit; ergo in ventriculo quoque in ipsa eius membrana procedere pergit. Videtur autem in cauitatem introire, quia vena sanguine turget et super parietem internum ventriculi tantum eminet vt parua ventriculi cauitas ea occupetur. In aliis subiectis, vbi vena sanguine minus distenta fuit, vena quoque minus cauitatem ventriculi tenere visa est. Caeterum, foueam cardiacam esse cauitatem ventriculi in hoc embryone, ex sola consideratione huius figurae eiusque comparatione cum (fig. 7. Diss. praec.) patet.

tet. Vidimus exterius in amnio ſpurio integro (fig. cit.) venam adſcendentem in foueam cardiacam intrare et ſe abſcondere. In membranae ſuperficie interna (fig. 6.) recognoſcimus eandem venam in eodem loco, vbi exterius in foueam cardiacam intrabat, in ventriculum intrare. Orificium igitur foueae cardiacae orificium ventriculi, illius cauitas huius cauitas fuit. In ſubiecto illo IV. dierum (fig. 3.) quod aptum quidem erat ad demonſtrandum primordium inteſtini medii, eiusque ortum, non adeo euidenter conditio ventriculi apparebat, qui hoc tempore cum parte inteſtini duodeni integer iam eſt et perfectus. Rima nimis iam conſtricta et orificium foueae cardiacae a ventriculo remotum eſt; adeoque fouea cardiaca ad ventriculi cauitatem ducit quidem in illo IV. dierum embryone, non autem ad ipſum ventriculum pertinet, ſed ad duodenum potius. In hoc autem III. dierum embryone fouea cardiaca ab ipſo ventriculo efficitur.

§. 147. Retro ventriculum meſenterium incipit et deorſum inter limbum inteſtinalem et renem ad inteſtinum rectum vsque continuat (*y.*). Hoc nunc idem eſt, quod (fig. 5.) laminis, ex quibus conſtat, ſaparatis a ſe inuicem et patentibus fiſtulae apertae ſpeciem prae ſe ferebat, et cuius laminae anguſtiores renibus tegebantur, quod nunc laminis extenſis et vnitis membranam vnam refert. Ad limbum ſcilicet inteſtinalem (*w.*) vsque laminae cohaerent, et

Meſenterium nunc formatum integrum (fig. 6. *y.*)

et idem locus futurum arcum minorem inteſtini, vel marginem poſteriorem laminarum inteſtinalium refert; cum ipſo vero limbo illae laminae incipiunt ſeparari et in bullam reflecti. Caeterum arteria (B) inter renem et meſenterium prodit et in membrana bullae porro continuat.

Laminae inteſtini medii, vix inchoatae. (*v. w. z.*)

§. 148. De inteſtino medio nihil praeter limbum (*w*) adeſt, qui adeo tenuis et debilis quidem eſt, vt vix diſtinguntur. Incipit a limbo aperturae ventriculi, continuat deorſum et in inteſtinum rectum abit. Hic ergo ſola membranae pars eſt, quae ad inteſtinum pertinet, eiusque primordium refert. Quicquid retro hunc limbum eſt ad meſenterium, quicquid ante eundem eſt ad membranam bullae pertinet. Laminae enim a ſpina dorſali vsque ad limbum connexae ſunt et meſenterium igitur referunt. Limbum autem marginem anteriorem eſſe laminae inteſtinalis patet ex comparatione figurae tertiae, et quae anterius ſequitur membrana (*x.*) manifeſto eadem eſt (fig. 3. *n.*). Pro lamina igitur inteſtinali nihil reſtat praeter ipſum limbum. Caeterum limbum hunc eundem eſſe qui (Diſſ. praec. fig. 7. *n.*) exterius apparebat et ſuturam igitur marginem poſteriorem eſſe inteſtini medii, quilibet facile videt, adeo, vt de laminis inteſtini medii hoc etiam tempore nihil adſit praeter marginem eorum poſtremum, quo illae coniunctae meſenterium conſtituere incipiunt.

§. 149.

§. 149. Inteſtinum rectum in latere hoc ſiniſtro infundibuliforme (*z. l.*) apparet, apice oblique deorſum retrorſum, hiatu ſurſum antrorſum poſito. Ille in anum abit; hic aperturam et foueolam inferiorem conſtituit. Dum enim membrana (*x.*) reflectitur; in eo loco, vbi nunc inteſtinum eſt (*z. l.*) foueola apparet, adeo vt foueola ſit inteſtini recti cauitas. Ex comparatione autem huius cum priori figura apparet, quomodo inteſtinum rectum increſcat. Dum ſutura formatur, laminae meſenterii a renibus vtrinque ſoluuntur, vniuntur et conſtituunt meſenterium. Interim limbus ille inuolucri caudae et rudimentum inteſtini recti (fig. 5. *z.*) dum nutritur et increſcit, adſcendit, et euadit ex ſimplici ruga paries inteſtini anterior; ſic tubus hic infundibuliformis oritur. Inteſtinum rectum eiusque formatio (*z. l.*)

§. 150. Similis inteſtini recti conditio pelui (*l. i.*) eſt Hic priori tempore ſimiliter ſub plicae ſpecie, exterius circa plicam inteſtinalem (fig. 5. *z*) poſitae, apparet et coniunctio inferior limborum abdominalium eſt, marginemque pubis refert. Tum ſimili modo iſte margo nutritione auctus adſcendere, globoſamque extremitatem ſpinae dorſalis, quam hactenus cingebat (fig. 5. *y.*) inuoluere incipit (fig. 6. *k.*). Deinde porro vsque in regionem foueolae inferioris adſcendit (fig. 6. *i.*). Sic paries anterior peluis, ſimulque craſſum inuolucrum producitur, quo inteſtinum rectum, interea formatum, aeque ac finis globoſus (*k.*) includitur, quodque peluim conſtituit. Peluis (*l. i.*) eiusque formatio.

ſtituit. Hoc peluis primordium in media parte conſtringitur ibique regionem perinaei efficit. Inferius eadem adhuc ſpinae dorſalis extremitas globoſa ſed inuoluta carne peluis apparet (*k*) et primordium vropygii conſtituit, ſoletque cauda vel apex caudae vocari. Superius idem adhuc (fig. 5. *z*.) margo ſed craſſior ex quo amnium verum deriuatur, et qui regionem pubis nunc refert, apparet (fig. 6. *l. i.*).

Renes (A). §. 151. Renes ſub ſolita figura laminarum anguſtarum longitudinalium apparent (A.) ſoluti autem ſunt a laminis meſenterii, quibus hactenus adhaerebant.

De pedibus et alis. §. 152. De pedibus et alis quaedam adhuc addam. Apparere eas primum ſub tuberculorum figura in theoria generationis dixeram. Videmus haec tubercula in embryone IV. dierum (fig. 2) per amnium verum transparentia. Ala (fig. 2. *f.*) ſuperficie externa conuexa glabra gaudet. Superficies interior, quae ad thoracem applicata eſt, plana eſt, glabra, inaequalis, impreſſionibus eminentiisque inſtructa. Ad marginem poſteriorem, quae pars craſſiſſima totius tuberculi eſt, qua idem corpori adhaeret, ſuperius inferiusque productiones carneae excurrunt, quibus ſimiliter ala corpori adfigitur. In pede ſimiles ſunt ſuperficies; margo vero qui in hoc ſitu inferior eſſe videtur, embryone extenſo, poſterior eſt, quo pes corpori adhaeret, ex quo ſimiles quoque productiones excurrunt. Margo anterior,

rior, in hoc ſitu ſuperior, acutus eſt. Sic quarto die finito haec rudimenta ſe habent. In praeſenti embryone aliter comparata ſunt, vti ex ſolo pede (fig. 6. *b.*) patet. Totum abdomen hoc tempore apertum eſt et limbo craſſiuſculo terminatur. In ipſo hoc limbo ad ſolita loca ſuperius alarum, inferius pedum tubercula propullulare incipiunt vtrinque. In embryonibus (Diſſ. praec. fig. 5 et 6) nulla prorſus in limbis tubercula diſtinguebantur. In illo quidem (fig. cit. 5.) lamina abdominalis a lamina inteſtinali nondum plane ſeparata erat; limbi tamen in regione alarum ſeparari incipiebant. In hoc (fig. cit. 6.) limbi abdominis toti ſeparati ſunt, ſed nulla veſtigia tuberculorum in iis deprehenduntur. Quando haec primum apparent, vix a limbo ipſo diſtinguuntur et merae eius incraſſationes ſunt, quae pedum et alarum prima rudimenta referunt. Poſtea vero, dum ex labio interiori limborum lamina abdominalis antrorſum prolongatur, tuberculum in ſuperficie exteriori abdominis exiſtere incipit, quod hactenus in ipſo margine eius ſeu limbo collocatum erat. Interim continuo figuram meri tuberculi, qualem in praeſenti quoque ſubiecto (fig. 6. *b*) habent, conſeruant; denique die quarto fere finito eam ſingularem formam induunt, (fig. 2.) quam deſcripſi.

§. 153. Dixeram in libro, germanico ſermone ſcripto, de generatione (§. 70.), quo tempore prima

Scholion. De primis rudimentis digitorum.

prima rudimenta digitorum nondum videram, fore, vt haec, si deprehenderentur, simili tuberculorum sub specie in conspectum venirent. Saepe post haec embryones eius aetatis offendi, vbi prima digitorum initia videre licuit. Recte quidem tubercula dixi esse. Nam vidi vbi vix eminebant; vidi vbi successiue magis protuberabant, accurate rotunda in ambitu suo. Eatenus vero erraui, quod credidi, ex margine anteriori acuto ipso fore vt prodeant, quae potius in superficie interiori prodeunt prope marginem anteriorem, et repraesentant in specie extremos apices digitorum. Retro haec tubercula rotunda longitudinales totidem eminentiae in hac interiori superficie apparent, ex anterioribus rotundis versus marginem pedis posteriorem deriuatae, quae digitorum phalanges referunt. Vix eminent in superficie interiori, quae inferior pedis futura est, et marginem anteriorem non attingunt; successiue autem elongantur, vt ante marginem prominere incipiant, tandemque in digitos excrescunt. Margo vero ille pedis anterior acutus; in plicam paruam cutaneam abit, quae in adultiori pede supremam articulationem digitorum tegit partimque in eam, quae digitis intermedia est. Facile patet, in auibus aquaticis fore, vt idem margo in illam similem sed longe maiorem plicam interdigitalem natatoriam abeat, quae his animalibus propria est.

§. 154.

§. 154. Ex hoc ſtatu embryo in illum, quem ſub initio huius diſſertationis deſcripſi, (fig. 2. 3.) ſolo partium incremento tranſit. Pars membranae, quae oram foueae cardiacae eandemque ventriculi efficit, increſcit. Sic orificium deſcendit, ventriculo permanente in ſuo loco; oritur ergo hac ratione pars duodeni. Limbus inteſtini medii, contiguus in hoc embryone margini meſenterii, per incrementum membranae ab eodem antrorſum remouetur; oritur ergo inter limbum et marginem meſenterii pars membranae noua, quae laminam inteſtini medii conſtituit. Denique, dum inteſtinum rectum creſcit, eius orificium adſcendit, adeo, vt totum inteſtinorum orificium, foueа nempe cardiaca, rima et foueola contrahantur magis magisque, et ventriculus contra et inteſtina interius increſcant. Sic ſtatus (fig. 2. 3.) oritur. Idem hoc negotium nunc porro continuatur. Foueа cardiaca exterius et rima magis conſtringuntur, adeo, vt denique ad paruum orificium redeat haec inteſtinorum apertura; ſicuti in prioribus diſſertationibus iam dixi; quo ipſo effici, facile patet, vt totum inteſtinum medium denique in integrum tubum transmutetur, relicto tantummodo paruo foraminulo in parte eius media anteriori, ex quo membrana areae inferior, ſeu interior vitelli tunica, continuatur. Pars huius tunicae, quae anguſtum illud orificium conſtituit, ipſa denique elongatur et in ductum abit breuem, qui ductus communicatorius eſt inter ſaccum vitelli et

Quomodo inteſtina ex hoc ſtatu, quo II. die gaudeat in illum tranſeant in quo ſunt die IV. Qua ratione porro perficiantur.

inteſtina. Interim, dum haec exterius aguntur, dum inteſtinum clauditur, hoc quoad longitudinem, figuram et ſitum interius ſimul mutatur. Ventriculus, hactenus perpendiculariter ſitus, vt cardia ſurſum, pylorus deorſum ſpectet, in ſitum transverſalem tranſit. Duodenum (fig. 3. *i. l.*) in arcum incipit intumeſcere, anterius verſum, qui inteſtini arcus ſuperior et minor eo tempore eſt. Tota media et inferior inteſtini portio (*m.* M.) ſecundum maiorem arcum producit, antrorſum ſpectantem, ſed adeo ſitum, vt ſuperior eius pars, a portione (*m.*) formata in latere embryonis dextro in conſpectum veniat, in ſiniſtro ſe fere ſubducat; inferior autem arcus pars, a portione (M.) producta magis in ſiniſtra regione verſetur, et minus inde in dextro latere appareat. Haec die ſexto et ſeptimo fiunt. Denique plures eiusmodi arcus et flexiones canalis inteſtinalis producuntur.

§. 155. Loco plurium corollariorum, quae ad dilucidandam theoriam generationis ſpectarent, vnum tantummodo ſubiungam, quod epigeneſin confirmet. Vidimus varias corporis partes, veluti thoracem (§. 132.) certo tempore nondum exiſtere, et exiſtere eo tempore non poſſe; neque concludimus, thoracem non exiſtere, eo argumento, quod obſeruatus non eſt; ſed vidimus in eo loco, vbi thorax oriri deberet, oriri amnium verum, quo notum eſt, terminari in foetu anterius totum truncum;

cum, atque hinc concludimus, quod iſte thorax, qui non apparet, non exiſtere poſſit, adeoque non exiſtat. Idem de pelui obſeruatum eſt, cuius locum pars inferior amnii occupat (§. 141.) ſimiliter vidimus in eo loco, vbi lamina inteſtini medii vtrinque incipere deberet, aut limbum inteſtinalem, qui terminus huius laminae anterior eſt, (§. 148.) aut immediate partes bullae laterales incipere (§. 137.) certo teſtimonio, has laminas inteſtini medii hoc tempore adeſſe non poſſe. Idem de inteſtino recto valet (§ 139.). Hoc primum argumentum eſſe puto epigeneſeos; vnde nempe colligi poteſt, partes corporis non ſemper exſtitiſſe ſed ſucceſſiue productas eſſe; quomodocunque caeterum haec productio fiat; nam non dico per concurſum particularum; per modum fermentationis; per cauſas et rationes mechanicas; per vires animae partes produci; produci vero dico. Si illae partes in ſtatu paulo adultiori conſiderantur, nouo argumento anſam praebent. Nunc primordia earum adſunt, ſed ita comparata, vt facile cognoſcas, nondum eſſe partes integras, iamiam formatas, ſed talia rudimenta, quae in eiusmodi partes transformanda ſunt. Loco inteſtini medii, id eſt totius tractus inteſtinorum, quae inteſtino duodeno et recto intereſt, duas ſimplices laminas vides, marginibus anterioribus reuolutas, caeterum planas, ſeparatas et diſtantes a ſe inuicem (§. 126.), immo priori tempore per totum meſenterium ſeparatas (§. 136.). Quaero igitur, an hae lami-

laminae ſint integrum inteſtinum? Nemo ſane affirmabit. Hinc concludo igitur, partes integras et formatas non ſemper exſtitiſſe, ſed certo tempore poſt conceptionem formatas eſſe. Nolo vberius loqui de ſtatu embryonis XXIV· horarum, vbi ſimpliciora multum omnia ſunt; nam non credo, validiora his, quae iam dixi, dici poſſe.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Pars areae, cui embryo inhaeret, exſciſſa, in ſuperficie inferiori; quo amnium ſpurium cum transparente embryone appareat, ex ouo IV. dies incubato. Pertinet haec figura ad ſeriem obſeruationum in diſſertationibus prioribus deſcriptarum, quibus amnium ſpurium eiusque phaenomena externa exponuntur; ſequitur immediate poſt VII. figuram Tabulae prioris et explicatur §. 113. 114.

r. r. Pars areae vaſculoſae exſciſſa, inuerſa, cui bulla incumbit.

a. b. c. Bulla ſiue amnium ſpurium curuatum fere reniforme.

g. h. i. l. Embryo ſimiliter contractus transparens. *h.* occiput. *g.* ſynciput. *i.* ſpina dorſalis. *l.* ala ſiniſtra.

k. Au-

k. Auricula cordis ſiniſtra, in qua maſſula ſanguinis coagulati.

B. Thoracis pars lateralis ſiniſtra.

C. C. Limbus orificii abdominis, idemque orificii amnii veri limbus (fig. 2. *i. i.* Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *x. x.*).

e. Limbus inteſtinalis, idemque orificii amnii ſpurii limbus (Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *n. n.*).

m. Spatium in regione abdominali inter amnium ſpurium et verum, vt quae partes in eo continentur, extra abdomen vel thoracem et extra amnium verum ſitae ſint. Sunt autem ſitae in eo ſpatio inferior pars cordis, totum inteſtinum medium et ſuperior pars recti.

d. De inteſtino medio aliquid transparens. Reliquae partes, compreſſae, non diſtincte transparent.

f. Fouea ſubrotunda; ex fouea cardiaca, rima et foueola inferiori orta, adeo tamen comparata, vt in parte eius ſuperiori fouea cardiaca, in media rima in inferiori foueola ſatis diſtincte adhuc cognoſcantur.

N. Foueola inferior cum ſuo limbo.

p. Vena vitellaria dextra. *o.* arteria eiusdem lateris. *n.* arteria vitellaria ſiniſtra. *s.* vena adſcendens.

q. Veſicula vmbilicalis, a membrana areae tecta.

Fig. 2. Idem ſubiectum, in eodem ſitu, membrana amnii ſpurii a ſuperiori areae membrana ſoluta, antrorſum reflexa, reſecta ad partem vsque *n.* relictam (vid. §. 120.) quo embryo apparet ſolo amnio vero inuolutus.

a. Particula membranae areae ſuperioris, in ſolo hoc loco amnio vero adhaerentis.

b. b. b. amnium verum collapſum. (§. 121.).

c. Embryonis occiput. (*d.*) Synciput. D. Tuberculum medium, quod poſt diem VI. euaneſcit.

e. e. Spina dorſalis E regio oſſis coccygis.

f. Ala ſiniſtra. F. pes ſiniſter (§. 152.).

g. Auricula ſiniſtra cordis (§. 123.).

h. Thoracis pars lateralis. Rugae et plicae ab amnio vero productae.

i. i. i. Limbus orificii abdominis, ex quo membrana amnii veri continuata immediate reflectitur ad amnium formandum, adeoque aperturam relinquit in abdomine (*i. i. i.*) ambitu abdominis ipſo non minorem (§. 120.).

H. H. Regio abdominis lumbaris, quae ſola faſciae longitudinalis inſtar ſpinae dorſi vtrinque adhaerens de abdomine adeſt, et anterius limbo terminatur. (§. 120.)

I. Huius faſciae poſterior pars gibba, a ſubiecto rene (fig. 3. *s. s.*).

k. l. m. n. o. p. partes extra abdominis cauitatem prominentes.

k. k.

k. k. Limbus inteſtinalis (fig. 1. *k.*) ex quo membrana amnii ſpurii *n.* continuata ilico reflectitur ad formandum amnium ſpurium relinquendo tanquam orificium eiusdem foveam illam (fig. 1. *n.*) (§. 122.).

l. Quod videtur eſſe interſtitium inter limbum (*k.*) et partes (*m.*) eſt profundior inteſtini plica (vid. §. 122.).

m. Inteſtini medii, paulum complicati partes eminentiores eaedem, quae transparebant per membranam amnii ſpurii (fig. 1. *m.*) (§. cit.)

n. Pars membranae amnii ſpurii antrorſum reflexa plicata (§. cit.).

o. Eiusdem membranae pars quae verſus ventriculum continuat per foueam cardiacam, quae truncum venoſum continet (§. 125.).

p. Superior pars inteſtini recti ipſius (fig. 3. *p.*).

Fig. 3. Idem ſubiectum; deſtructo amnio; remotis partibus lateralibus thoracis, faſciisque abdominalibus vna cum limbo, cum alis pedibusque et capite; remanente ſola de trunco ſpina dorſali; quo viſcera in conſpectum veniant (§. 124.).

a. Ventriculus ſiniſter cordis. *b.* canalis auricularis. *c.* auricula ſiniſtra. *d.* arcus aortae (§. 124.).

e. Saccus venarum, in quo orificium venae abſciſſae. (ibid.).

f. Hepatis lobus ſiniſter. (ibid.) *g.* membrana inde deducta ad membranam amnii ſpurii applicata; membranoſi, quod auibus eſt, diaphragmatis primordium.

h. Oeſophagus. *i.* ventriculus. (§. 125.)

k. k. Limbus inteſtinalis, quo membrana amnii ſpurii (*n.*) ab inteſtinali lamina (*m.* M,) cuius illa continuatio eſt, diſtinguitur, qui, ſi vna cum membrana (*n.*) conformiter ſitui naturali reflectitur, foueam illam (Fig. 1. *n.*) eandemque cauitatem inteſtini reſtituit. (§. 122.)

l. Duodenum, retro membranae partem (*o.*), cui adhaeret, deſcendens (§. 125.).

m. M. Inteſtinum medium. Eſt mera lamina inteſtinalis ſiniſtra, quae cum ſimili, dextra, ſibi contigua, inteſtinum medium refert (§. 126.).

n. Pars membranae amnii ſpurii, ex lamina inteſtinali continuata, plicata.

o. Huius membranae pars oblique ſurſum ſuper inteſtina decurrens, quae truncum venoſum continet (§. 2. *o.*).

p. Pars ſuperior inteſtini recti infundibuliformis; eadem, quae (fig. 2. *p*) extra peluim et extra amnium eminebat, quae in ſubiecto integro fig. 1. foueolam inferiorem conſtituit (§. 127.).

q. In-

q Inteſtini recti pars inferior integra cylindrica, vt ipſe ventriculus hac aetate eſt, reliquo inteſtini tubo, his intermedio, toto anterius aperto. (ibid.)

r. r. Meſenterium; eadem membranae amnii ſpurii (*n.*) et inteſtinalium laminarum continuatio, in quo vero ambae laminae cohaerent, quae huc vsque ſeparatae ſunt.

s. s. Ren ſiniſter (§. 124.) *t. t.* ſpinae dorſalis pars.

u. Arteria vitellaria ſiniſtra.

Fig. 4. Idem praeparatum figurae 3. in latere dextro. (§. 128.).

a. Ventriculus cordis ſiniſter. *b.* dexter. *c.* Aorta (ibid.).

d. Complectitur hic ab arcu aortae auricula dextra, quae in hoc ſubiecto depleta non diſtincte apparet. (ibid.)

e. Pulmonis dextri primordium *f. f.* hepatis lobus dexter (ibid.) *g. g.* Ren dexter (ibid.).

h. h. Arteria vitellaria dextra (ibid.).

i. i. Lamina inteſtinalis ad inteſtinum medium formandum dextra. (§. 129.).

k. Inteſtinum rectum. *l.* meſenterium.

m. m. Lamina dextra membranae amnii ſpurii.

n. Vena vitellaria dextra. N. truncus venoſus.

o. o. Spina dorſalis.

Fig. 5. Idem ſubiectum, quod priori tabula fig. 6. integrum exhibitum erat; amnio ſpurio et membranis reliquis exutum, extenſum. (§. 130.).

a. Synciput, lobos cerebri anteriores continens.

b. Occiput, quod lobos cerebri poſteriores continet. (ibid.)

c. d. Regio nuchae, ex tuberculis ſimilibus compoſitae. *d. e.* Regio thoracis *e. z.* reliqua ſpina dorſalis, regionem abdominis exhibens.

g. Pars maxillae inferioris ſiniſtra.

f. Proceſſus; an prima coſta? Inter hanc et maxillam (*g*) anterius amnii veri membrana oritur, et immediate circa ſynciput adſcendit. (§. 132.).

h. Auricula ſiniſtra cordis *i.* canalis auricularis (§. 130.).

k. Ventriculus cordis vnicus ſiniſter. *l.* Aorta (ibid.).

m. Membranula eadem, quae (*g.* fig. 3.).

n. Pars membranae amnii ſpurii ea, qua fouea cardiaca formatur, idemque ventriculus. (§. 138.)

o. p. q. s. t. z. Rudimentum abdominis. Mera lamina concaua, a ſpina dorſali et lamellis lateralibus (*v. v. u. u.*) formata (§. 131.).

o. Pars laminae abdominalis ſuperior concaua dextra (ibid.).

p. s. Margo laminae abdominalis ſuperius introrſum, inferius paullatim extrorſum vergens,

gens, acutus adhuc, deinde in limbum intumeſcens (fig. 2. *i. i.*) idem, qui Tab. prior. (fig. 6. *l. l.*) (ibid.

q. Pars laminae abdominalis ſuperior, ſiniſtra maxime concaua. In hoc loco tuberculum alae propullulat.

t. Margo laminae abdominalis, vbi haec magis patet et planior eſt, craſſior dextro margine; idem (Tab. prior. fig. 6. *q.*); rudimentum illius (fig. 2. *i. i.*).

v. v. Lamella abdominis lateralis dextra (ibid.).

u. u. Eadem in latere ſiniſtro. Efficiunt hae lamellae, limbis vel marginibus ſuis terminatae foſſas illas laterales (Tab. prior. fig. 6. *r. q.*) (§. 100.) et ſunt primordia faſciarum, quae quarto die abdomen conſtituunt (fig. 2. H. H.) (§. 131.).

ſ. ſ. r. r. r. z. Fiſtulam inteſtinalem dixi (Diſſ. prior. §. 100.) Proprie meſenterii rudimentum exhibet, cuius laminae ſeparatae ſunt, et late patent, exterius autem renes ſibi applicatos habent. (§. 136.) (144.) *ſ. ſ.* Lamina meſaraica dextra cum rene dextro. *r r. r.* ſiniſtra. Horum margines anteriores iidem (Tab. prior. fig. 6. *n. n. m. u*) et primordia limborum (fig. 2. *k. k.*).

w. Interſtitium inter vtramque laminam meſenterii, in quo nuda ſpina dorſalis in conſpectum

ſpectum venit; idem (Tab. prior. fig. 6. *p.*) (§. 136.).

x. Spina dorſalis.

y. Vropygii ſeu coccygis primordium.

z. Peluis primordium quod diſtinctum eſſe debet a ſimili interiori inteſtini recti primordio (vid. Tab. prior. fig. 6. *u.*) (§. 139. 140. 141.).

Fig. 6. Idem ſubiectum, quod (Tab. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vaſculoſae exhibetur, membranis exutum (§. 145.).

a. Synciput *b.* tuberculum illud (fig. 2. D.) (ibid.).

c. Occiput. *d.* principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

e. Spina dorſalis thoracica. *f.* Rudimenta coſtarum?

g. Pars thoracis. *h.* auricula cordis ſiniſtra.

i. Canalis auricularis. *k.* Ventriculus cordis (§. 145.).

l. Lobus ſiniſter hepatis (ibid.) *m.* Ventriculus (§. 146.).

n. Limbus ventriculi, quo iſte a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii ſpurii (*p. q.*) diſtinguitur, idemque ipſe limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. *k.*) in ſuperficie poſteriori viſus (conſer. §. 146.).

o. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *k.* fig. 3. *l.*).

p. Vena

p. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

q. Pars vaginae capitis in eaque ſurculi venoſi (Tab. prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

Fig. 6. Idem ſubiectum, quod (tabul. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vaſculoſae exhibetur, membranis exutum (§. 145.).

a. Synciput. *b.* occiput. *c.* tuberculum illud (fig. 2 D.) (ibid.).

d. Spina dorſalis thoracica. *e.* regio nuchae.

f. Rudimenta coſtarum?

g. Alae primordium reclinatum.

h. Primordium pedis (§. 152.).

i. Regio pubis. *k.* vropygium.

l. Cauitatis peluis primordium (§. 150.).

m. Principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

n. Pars thoracis. *o.* auricula cordis ſiniſtra.

p. Canalis auricularis. *q.* Ventriculus cordis (§. 145.).

r. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *m.* fig. 3. *g.*) ex lobo hepatis ſiniſtro continuata.

ſ. Oeſophagus a pulmone tectus.

s. Ventriculus (§. 146.).

t. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

u. Pars vaginae capitis in eaque ſurculi venoſi (Tab. prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

v. Limbus ventriculi, quo iſte a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii ſpurii (*t. u.*) diſtinguitur, idemque ipſe limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. *k.*) in ſuperficie poſteriori viſus (confer. §. 146).

w. Limbus inteſtinalis idem, qui (Tab. prior. fig. 7. *n*) et primordium ipſius (fig. 2. *k. k.*) (§. 148.).

x Pars membranae amnii ſpurii, antrorſum reflexa, quae, ſi vna cum limbo in ſitum naturalem reflectitur, ſuturam reſtituit. (Tab. prior. fig. 7. *l.*) (§. 148.).

y. Meſenterium, nunc formatum (§. 147.).

z. Superior pars inteſtini recti, infundibuli formis, quae, reflexa membrana in ſitum naturalem, foueolam inferiorem reſtituit (Tab. prior. fig. 7. *m.*)(§. 149.).

A. Ren ſiniſter, a meſenterio nunc ſeparatus.

B. Arteria vitellaria.

DE-

DESCRIPTIO
LEPORIS PVSILLI.

Auctore

P. S. PALLAS.

Multa dantur in Imperio Rutheno, eiusque vaſtiſſima praeſertim parte Aſiatica, quadrupedum e cenſu animalia, quorum notitia hactenus vel plane caruit naturalis hiſtoria, vel quae, poſt celeberrimorum etiam virorum *Meſſerſchmidii*, *Gmelini*, *Stelleri*, in his labores, obſcura tamen, nec rite illuſtrata eſſe Zoologi conqueruntur. Sufficiat pro exemplis nominaſſe Moſchum, Antilopen orientalem, (джерень). Ferorum in deſertis Mungalicis et Transiaicenſibus Equorum ſpecies, Canem Alopecem (карсакъ), et Melanotum (караганъ), Muſtelam lutreolam (норка); Tandemque Murino e genere Citillum, Murem leucoſtictum (суслikъ), et Iaculum Aſiaticum (земляно зайецъ); vt reliqua mira, tenebrisque praeſertim condita Orientalioris Sibiriae atque Camtſchatcae animalia taceam, quae vtinam in natali ſolo ſcrutari poſſe olim largiatur fortuna. Ne igitur poſt peracta, quae diuinus AUGVSTISSIMAE in ſcientias amor per vaſtiſſimi Imperii feliciſſimas prouincias inſtitui iuſſit, itinera phyſica, horum maxime animalium in hiſtoria deſiderari

quidquam poſſit, mihi praeſertim ſedulo curandum eſſe duco, omnique deligentia adlaboro.

Neque ſucceſſu hactenus caruiſſe me, curioſi gaudeant. Vix enim Trans-volgenſes modo campos attigi, et iam plus multo, quam ſperaueram, in Zoologicis noui et notatu digni occurrit. Obſeruaui hac ipſa hyeme, et *auium* aliquas pulcerrimas, incognitas, neque deſcriptas antea ſpecies, et *quadrupedia* varia, parum vel plane non Zoologis nota: quae praeſertim hyberno ſubinde otio illuſtrare animus eſt.

Primum erit ex his, quod *Leporem puſillum* appello, animalculum, quale in rerum natura dari ne quidem ſomniaſſem vnquam: vera *leporini generis* ſpecies, ſed minutiſſima, variisque externae et internae ſtructurae momentis admiranda. In campis circa volgam, imo et vltra Rhymnum ſiue Iaicum diſſitis minime infrequentem illam eſſe audio, ita, vt etiam vulgari nomine et peculiari inter Tataros nota ſit, quorum a plerisque vocatur *Sulgan*, aliis, communi fere cum muribus Campeſtribus nomine, *Kir-ſickan*. Apertos campos (степь) ſolitaria colit, ibique, vti Citillus et mus leucoſtictus, cuniculis ſub terra latet, quibus plerumque noctu exire conſueuit. Hanc ob cauſam, et quod etiam hyeme vagatur, ſeſeque veſtigiis pariter, cuniculique apertura ſupra niuem prodit, haud raro capitur decipulis, quas illo ipſo tempore venatores, ſupra eius-

modi

modi antra, Ermineis vulgo habitata, ſtatuunt. Infeſtatur tunc et a feris minutis campeſtribus, Putorio, Ermineo, Muſtela, quibus hyeme, ob torpidas in cuniculis Murium campeſtrium varias ſpecies, parcior praeda venit, facilisque eſt de imbelli animalculo victoria.

Aeſtate variis herbis ſucculentis paſci ſolet animalculum; vbi vero has oppreſſit hyems, et omnia niue tecta ſunt, excrementis animalium maiorum phytiuororum, praeſertim equorum et ouium, contentum victitat, quibus ventriculum quoque in diſſecto ſpecimine repletum inueni. De prolificationis et geſtationis tempore, deque catulorum numero nondum conſtat; ea vero vernis menſibus ſuppleri poterunt. Digna interim viſa eſt ſtructura *Leporis puſilli*, quae Zoologis citius communicetur.

Dentium ſuperiorum duplicatione et figura, *digitorum* numero quinario in palmis, et in plantis quaternario, *hirſutie* pedum, *velleris* colore et indole, *internaque* partim *ſtructura*, cum congeneribus, Lepore vulgari atque cuniculo, conuenit illi. Contra: *Capitis* figura, breuitate *auricularum* et *artuum* poſteriorum, *caudae* vero plenario detectu ab vtroque inſigniter diſcrepat. *Coli* ſtructura varia non minus, quam in lepore vulgari admiranda eſt; et numero *coſtarum* lepus puſillus omnia nota animalia, ſuperat praeter Cauiam Capenſem a me primum deſcriptam in *Miſcellaneis Zoologicis* et *Spicilegiorum*

giorum Zoologicorum secundo fasciculo; cuius animalis solum cranium in fonte quodam Sidonis antiquae repertum nuper memorauit *Illustr.* BVFFONIVS in hist. natur. vol. XV. pag. 205. Huic 22. enim ab vtroque latere numerantur, Lepori pusillo tantum 17.

Tab. XIV. Fig. 2. In crasso intestino dissecti speciminis *Ascarides* circiter decem inueni praecise tales, quales in equis, sed triplo vel quadruplo maiores, plerumque sesqui pollicares inueniuntur, quae tamen figura et, nisallor, specie conueniunt cum minutis Ascaridibus hominum intestina infestantibus, inque gallinis, quae fimeta frequentant, vulgaribus. Vix dubium est, has ex ouulis vel vermiculis cum Equino ventre ab animalculo comestis natas, ideo parentum fere in magnitudinem excreuisse; nullam enim aliam causam video, quare in tantillo animalculo vermiculus ille in tantum luxuriauerit, quum tamen in ipso homine semipollicarem longitudinem vix vnquam attingere obseruetur. Ascarides istae omnes in parte coli coeco proxima et trifariam cellulosa haerebant.

Vellus *Leporis pusilli* nostri ad tolerandam hyemen satis largum est, et e praelongis pilis compositum, lanugine etiam corpus molliter fouente. Quamquam omnium fere animalium recentia maxime vellera, calido loco siccata, frictione electrica fiant, in nullo tamen phaenomenon istud facilius, leuissimoque adeo tactu effici, et pilos versus appro-

propinquantem digitum promptius aſſurgere vidi, quam in hoc et vulgari Sorice. Imo in Lepore minuto, fortiori frictione, nuda manu inſtituta, in loco tenebroſo copioſae etiam ſcintillae eliciuntur; quod in Erminei quoque cauda obtineri poteſt.

Deſcriptio.

Magnitudo Ratti; Habitus ſingularis. Tab. XIV. Fig. 1.

Caput oblongius, quam in Lepore vulgari, vellere largiter veſtitum.

Naſus Leporinus, totus villoſiſſimus, vix angulo inter nares nudiuſculo.

Labium ſuperius bilobum, ad ſeptum narium vsque obſolete bipartitum, *inferius* dentes vaginans, vt in congeneribus, gliribusque omnibus.

Dentes primores (Tab. XIV. fig. 3. 4. quae ſunt naturali magnitudine) albi, *ſuperiores* duplicati; horum *exteriores* ſulco canaliculati, extremoque argute emarginati, ita tamen, vt communis acies tantummodo ſit tridentata, interiori nempe vtriusque dentis angulo contiguo et quaſi coadunato. *Denticuli pone* baſin maiorum minuti, obtuſi (Fig. 4. *a.*). *Inferiores* dentes ſimplices, oblique truncati, plani. Fig. 3. 4.

Myſtaces per roſtri tumidula latera ſparſi, pilis ſuperioribus nigricantibus, inferioribus reclinatis, praelongis, albidis (Fig. 3. 4.) *Verruca* ſupra-ocularis tripilis, *parotica* vnipilis.

Oculi

Oculi mediocres, obſcuri. *Auriculae* rotundatae, latae, vellere ſemilatentes, intus gryſeo-villoſae, verſus marginem fuſceſcentes, ipſoque limbo tenerrime piloſo, albidae.

Truncus gracilis, abdomine ſubuentricoſo; *Cauda* nulla; *Artus* breues, etiam poſtici.

Palmae pentadactylae, *pollice* remoto, breui, digitis duobus exterioribus degradatis (fig. 5. *a.* 6. vbi dextra). *Plantae* tetradactylae, extimo praeſertim breuiore (fig. 6. *a. b.*). *Volae* ſiue ſoleae pedum, vt in lepore, pilis horrentibus, conſertis hirſutiſſimae; poſticorum vsque ad calcaneos, villoque ſubreflexo, fuſceſcente; anticorum villo albido verſus digitos vergente, (fig. 5. 6. *b b.*).

Vellus largum, proque tantillo animalculo prolixum. *Lanugo* vbique denſa, tenerrima, fuſca. *Pili* recti, praelongi, (praeſertim in dorſo ſubpollicares), extremitate gryſeo nigroque varii, vnde oritur *color* corporis fere leporinus. Ambitus oris, gula et pectus albent; corpus ſubtus reliquum, et pedes ſupra e gryſeo-luteſcente albicant.

Menſurae.

Pondus animalculi integri aequat vnciam vnam medicam, cum ſeptem circiter drachmis.

Longitudo animalculi ab apice naſi ad coccygem Pariſinae menſurae - - 5″. 6‴.

Eadem ab apice naſi ad vngues extenſorum pedum anteriorum - - - - 3. 9.

Item

Item ad vngues extremos plantarum extenſis artubus poſticis	7.	6.
Longitudo capitis a nucha	1.	6.
—— —— antibraehii	1.	0.
—— —— palmae ab articulo carpi ad extremos vngues	0.	$6\frac{1}{2}$.
—— —— Femorum	0.	9.
—— —— Tibiarum	1.	0.
—— —— Plantae a calcaneo ad extremos vnguiculos	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— Auricularum	0.	5.
Earumdem latituto	0.	$5\frac{1}{3}$.
Circumferentia capitis ante auriculas	2.	5.
—— —— Thoracis pone pedes anticos	3.	1.
—— —— Abdominis	3.	8.

Zootomica.

Hepar ſeptemlobatum, *ventriculus* arcuatus, ſiniſtrorſum gibbus, fundo ſecundum cardiam (Tab. XIV. fig. 7. *a.*) in ſeceſſum ſiue ſinum rotundatum (Litt. *c.*) adſurgente.

Inteſtinum a Pyloro (Litt. *b.*) ad craſſum vsque ſubaequabile, ad ſummum calami cygnei amplitudine, minore autem verſus duodenum, et extremo ileo (fig. 8. A.). Longitudine tripedale.

Coecum (fig 8. *a—b.*) ſesquipollicare, calami ſcriptorii capax, teretiuſculum, apice obtuſo incuruatum, verſus ilei inſertionem (Litt. *b.*) ſenſim ampliatum atque celluloſum.

Colon per longitudinem quinque cum dimidio pollicum, (Litt. *b—d.*) digiti minimi amplitudine, imo ex parte (*c—d.*) capacius, ligamento ſecundum meſenterii inſertionem decurrente criſpatum, in *cellulas* transuerſas integras. *Hinc* 1 poll. et 3 lin. longitudine aequabile (Litt. *d—e.*) teres, calamo ſcriptorio craſſius. *Tunc* longitudine itidem 1″. 3‴. denuo exampliatum (Litt. *e—f*) tribusque ligamentis longitudinalibus, meſenterico vno, duobusque planis inſtar coli humani in cellulas trifariam diſpoſitas, transverſas concameratum, quae in ſeriebus binis anguſtae ſunt, et transuerſim lineares, in tertia ampliores.

Sequitur *tandem* inteſtinum calamo ſcriptorio vix capacius (Litt. *f—g.*) cellulis oualibus excrementa formantibus moniliforme, adtenuatumque in *inteſtinum vltimum*, excretorium, trium et dimidii pollicum longitudine.

Aſcarides (fig. 2.) in priore parte coli (fig. 8. *b—d.*) latebant, octo vel decem.

Diaphragma centro tendineo, ſagittato, ampliſſimo. *Ren* dexter ſitu altior, magnitudine fabae; ſiniſter paulo minor. *Veſica* piſo amplior; *teſtes* exiliſſimi. *Cor* magnitudine dupla fabae.

In *ſceleto*: clauiculae arcuatae, magnae, (cum ſint in lepore rectae, minutae, et inutiles,) humero laxe cohaerentes. *Coſtae* ab vtroque latere ſeptemdecim, quarum denae ſpuriae. *Sternum* quinque articulorum.

Coccygis os iſchia paulo ex ſuperans, planiusculum, articulorum quatuor, longitudine 5 linearum.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXPOSITIO.

VTRIVSQVE OBSERVATIONIS

ET

VENERIS ET ECLIPSIS SOLARIS

FACTAE PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA.

Auctore

CHRISTIANO MAYER.

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 18. Maii captae quadrante $2\frac{1}{2}$ pedum.

T. P. ad ortum			Alt. limbi ☉ app. ſuper.			T. P. ad occaſ			Meridies medius		
H.	M.	S.	G.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S
8	33	29	36	24	45		31	27	0	2	28.
	37	5	36	49	20		27	56	0	2	30, 5
	39	16	37	4	10		25	44	0	2	30
	42	16	37	24	40		22	44	0	2	30
	44	32	37	40	0		20	$26\frac{1}{2}$	0	2	29, 25
	52	$32\frac{1}{2}$	38	34	0	3	12	23	0	2	27, 75
9	17	46	41	16	1 0		47	14	0	2	30
	19	$26\frac{1}{2}$	41	27	5	2	45	29	0	2	27. 7
						Ex his fit merid. med.			0	2	29, 15
						Aequatio					8, 25
						Meridies verus . .			0	2	20, 50
						Temp. med. mer. veri			11	56	59, 5

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 19. Maii.

T. Pend. ad ortum			Alt. limbi Solis app. ſuper.			T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	59	29½	39	28	12		5	23¾	0	2	26, 62
9	2	49	39	49	27	3	2	11⅛	0	2	30, 25
	5	30	40	7	12		59	22	0	2	26
	7	41½	40	21	15		57	10	0	2	25, 75
	10	11	40	37	26		54	46	0	2	28, 5
	13	44½	40	59	48		51	8	0	2	27, 2
	17	49	41	25	20		47	4½	0	2	26, 75
	19	28½	41	36	0		45	26½	0	2	27, 5
	22	3	41	51	40		42	49	0	2	26
	4	45	42	7	36	2	40	8½	0	2	26, 75
						Meridies ex his med.			0	2	27, 08
						Aequatio . . .					8, 0
						Meridies verus .			0	2	19, 08
						Temp.med mer. veri			11	57	7, 5

Die 20. Maii.

T. Pend. ad ortum			Altit. limbi ☉ app. ſuper.				T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	G.	M.	S.		H.	M.	S.	H.	M.	S.
9	0	23	39	41	28		3	4	36	0	2	29, 5
	5	7	40	13	0			59	42	0	2	24, 5
	10	4	41	26	20	inferior.		54	56	0	2	30
	12	37	41	0	58			52	9	0	2	23
	17	11¾	41	29	28			47	42	0	2	26, 87
	18	32	41	37	40			46	20	0	2	26
	20	47½	41	51	20		2	44	7	0	2	27
							Meridies med. ex his			0	2	26, 69
							Aequatio . . .					7, 76
							Meridies verus .			0	2	18, 93
							Temp.med.mer. veri			11	57	16, 0

Altitu-

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 23. Maii.

T. Pend. ad ortum.			Altit. limbi ⊙ app. ſuper .			T. Pend. ad occaſ.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	G	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	42	20	38	2	45		22	27	0	2	23, 5
	46	56	38	33	22		17	51	0	2	23, 5
	54	8	39	22	18		10	$39\frac{1}{2}$	0	2	23, 75
9	0	54	40	6	29	3	3	57	0	2	25, 5
	19	$43\frac{1}{2}$	42	6	10		45	6	0	2	24, 75
	28	39	43	1	0		36	$3\frac{1}{2}$	0	2	21. 25
	30	19	43	11	15	2	34	24	0	2	21, 5
						Merid. ex his med.			0	2	23, 40
						Aequatio . . .					7, 07
						Meridies verus .			0	2	16, 33
						T. med. merid. veri			11	57	43, 6

Ex comparatione meridiei veri — Sec.

Diei 18. cum 19.	quantitas diurnae retardationis penduli erit	$9'', 42$
cum 20	- - - - - - - - - - - -	9, 07
cum 23	- - - - - - - - - - - -	9, 63
Diei 19. cum 20	- - - - - - - - - - - -	8, 65
cum 23	- - - - - - - - - - - -	9, 71
Diei 20. cum 23	- - - - - - - - - - - -	10, 06

Reiicimus quantitatem $8'', 65$, quod haec differentia manifeſte tabulis debeatur, plus minus incremento diurno motus medii Solis ex ſola interpolatione atque in ſolis primis decimarum notis appropinquantibus, vt manifeſtum eſt comparanti plures eiusmodi tabulas. Eum vero errorem nouis ac prolixis

lixis calculi laboribus nunc velle detegere, prorſus inutile foret huic noſtro inſtituto. Sumpto autem ex 5 reliquis penduli retardationibus medio, retardatio diurna eiusdem eſt $9'', 57$, quae obſeruationibus omnibus ſatisfacit.

Ita enim ex datis meridierum momentis euidens eſt primo, tempus meridiei veri die 24. Maii ad pendulum fuiſſe $0^b, 2', 16'', 21$. dein euidens quoque eſt, pendulum hoc non ſequi tempus medium, neque accelerationem habere reſpondentem huic motui Solis medio, cum nulla ſit neque acceleratio, neque retardatio eiusdem reſpectu motus veri ſolaris, niſi vnius circiter decimae, quo centrum Solis ſequenti die v. g. 24 tardius appulit ad meridianum noſtrum, quam die 23, quae tamen acceleratio iuxta motum medium Solis deberet eſſe $9'', 8$. Nulla ergo pro tempore obſeruationis veſpertinae ſeu matutinae diei 23 pars proportionalis accelerationis aut retardationis horologii quaerenda eſt, et ad tempus meridiei aequatione correctum addenda, vel ab eo ſubtrahenda, vt habeatur tempus verum factae obſeruationis; ſed a tempore obſeruato ſubtrahenda ſolum ſunt $2', 16''$, eo quod tempus verum in meridie ſemper ſit $0^b, 0', 0''$ et horologium die 23 Maii ſupra t. v. indicauerit $2', 16'', 33$.

Placet rem exemplo declarare, quamuis id Aſtronomis notiſſimum ſit. Itaque ſi pendulum motum

motum medium Solis exacte sequeretur, et meridiem ostendisset v. g. die 18, quam inuenimus $0^{'}$, $2^{'}$, $20^{''}$, 50, ob incrementum diurnum acceleratio-nis motus medii Solis $= 8^{''}$; die 19 profecto ostendere debebat 0^{b}, $2^{'}$, $28^{''}$, 50; ostendit autem ex obseruatis Solis altitudinibus correspondentibus correctis 0^{b}, $2^{'}$, $19^{''}$: ergo a die 18 ad 19 retardatio diurna penduli mei supra motum medium Solis fuit, vt supra dixi, $9^{''}$, 42; supra motum autem verum Solis fuit nulla.

Id ipsum alia ratione clarissime ostendi potest, conuertendo tempus verum factae cuiusuis obseruationis in tempus medium, idque comparando tempori penduli. Ita tempore contactus interioris in egressu Veneris a me obseruato pendulum meum ostendit 15^{b}. $28^{'}$, $0^{b'}$, a quo subtractum tempus meridiei eius diei 0^{b}, $2^{'}$, $16^{''}$, 33 - - relinquit tempus verum - - - - inde subtracto tempore medio meridiei veri Residuum est tempus medium non correct.

	h.	m.	s.
	15	25	43,7
	11	57	43,6
	15	28	0,1

Acceleratio diurna motus medii Solis supra motum verum a die 23. ad 24. est $9^{''}$, 8, ergo pars proportionalis debita interuallo 15^{b}, $28^{'}$ erit $5^{''}$, 91, quae addita tempori medio non correcto 15^{b}, $28^{'}$, $0^{''}$, 1, producit tempus medium factae obseruationis 15^{b}, $28^{'}$, $6^{''}$. Sed enim pendulum meum a die 23 in 24 defecit a motu medio Solis quantitate $9^{''}$, 93. quare vt tempus medium reducatur

ad tempus penduli, pars proportionalis, interuallo 15 horarum, $28', 6''$ debita, (quae eſt $5''$, 98) auferenda eſt a tempore medio dato $15^b, 28', 6''$, et reſiduum $15^b, 28', 0'', 02$, ſatis oſtendit, tempus obſeruatum penduli congruere tempori medio, neque vlli alteri reductioni locum eſſe poſſe.

Atque hinc patet, ſtatum penduli et temporis veri ad praeciſionem vnius ſecundi exacte cognitum fuiſſe. Ceterum, ne quis caſus pendulo accidens obſeruationem turbaret, duo reliqua pendula Londinenſia, virgis quoque metallicis inſtructa, quae biduo ante Illuſtriſſimum Collegium Marinum ſubmiſerat, et quorum acceleratio diurna vnius, et retardatio alterius a pendulo normali $5''$ non ſuperabat, duo item reliqua Pariſina praeſtantiſſimi artificis le Paute, et tertium D. Charoſt per eos dies frequenter cum normali collata et explorata ſunt.

Inſtrumenta ita diuiſa, vt mihi pro obſeruando contactu Veneris tubus achromaticus Londinenſis 18. pedum inſignis bonitatis: alter 7. pedum pariter achromaticus Praenobili D. Profeſſori *Euler*, qui eſt Academiae a Secretis: teleſcopium catoptricum *Schortii* $2\frac{1}{2}$ pedum Cl. Dno Adiuncto *Lexell*: alterum maius 3 pedum 6 digitorum eiusdem celeberrimi artificis Dno *Stahl*, expeditionis meae Socio, ſeruiret.

Quod

Quod in inferiori Speculae conclaui non ita commodus in orientem proſpectus pateret, placuit obſeruandae Veneri ſupremum eligere tabulatum, locum, ſi quis vnquam, ſolidum ac fornice et cupro clauſum. Figuram is refert circularem, cuius extimam oram ambit murus $2\frac{1}{2}$ pedes craſſus et 4. fere pedes altus; huic ferramenta complura circum ad perpendiculum inſiſtunt, quibus cylinder ligneus annulis ferreis armatus cum reliquo machinamento inductus eſt pro facili tubi maioris motu horizontali et verticali. Praeterea tubus 18 pedum clatris incluſus atque ita in aequilibrio poſitus eſt, vt vix manu Obſeruatoris indigeret; transmiſſo per annulum ferreum humi fixum ſune vacillationi tubi ſatis cautum erat. Simili apparatu regebat in omnem partem ſuum quoque tubum Praenobilis D. Profeſſor *Euler*. Sociorum duo reliqui iſto minime indigebant pro ſuis teleſcopiis ſupra ſeparata fulcra commode inſiſtentibus. E tribus, ad numerandas vibrationes penduli conſtitutis, alterni minuta ſecunda numerare, tertius numerantibus prope pendulum, ne quis error irreperet, inuigilare aſſueuerant. Collocatum inſuper pone Obſeruatores pendulum Pariſinum, quod ipſo die 23. hora 5. veſperi ad idem ſecundum temporis cum normali compoſitum eſt, a quo die 24. hora 4 matutina nonniſi 5″ aberrabat, vt Obſeruatores ſuis ipſi oculis minuta prima temporis expedite viderent.

De obſeruatione Veneris veſpertina die 23. Maii.

Iſto apparatu iam inde ab hora 5 et dimidia veſperi diei 23 fixo in Solem obtutu intuebamur. Caelum erat ſerenum, limbus Solis conſtanter bene terminatus, niſi tum, quod quidem vnus ego tubo 18. pedum notaui, cum tenuiſſima inciſura maculae nigricantis extimam oram et orientalem et occidentalem Solis ſubinde perſtringeret; indicium id fuit emergentis et immergentis maculae. Fuit, cum de hoc ſpectaculo ob ſuſpicionem ſatellitis Veneris Socios admonerem; ſed quod huiusmodi marginales lunulae, quarum omnino 4 ſucceſſiue obſeruaui, et figuram referrent irregularem, et poſt duas horas magis increſcerent vel euaneſcerent, facile eam ſuſpicionem dimiſi.

Ita caelo conſtanter ſereno certi omnino ſumus, ad horam vsque 9. 5′ T. V. nullum veſtigium Veneris aut eius ſatellitis apparuiſſe, a quo tempore ob viciniam horizontis vaporoſi limbus ſolis ſemper magis vndulare, atque etiam iſtis vaporibus aliquantum tegi, videbatur. Cum ecce centro ſolis iam infra horizontem depreſſo, (nam occaſum totalem apparentem eo die circa horam 9. 10′, 40″ T. V. obſeruaueramus) repente Venerem omnino nigram, atque eiusdem apparentis magnitudinis, qualem poſtridie conſpexeram, intueor hora 9. 9′. 39″ T. V.

Illu-

Illuſionem fuiſſe opticam, eo minus perſuadere mihi poſſum, quod eo momento iisque circumſtantiis temporis de Venere videnda ſpem fere omnem abieceram. Ipſo autem momento penduli $9^{h}.\ 11'.\ 55''$. id phaenomenon me conſpexiſſe, ex repentina mea vociferatione teſtes habeo obſeruationum Socios. Porro cenſeo, refractione fieri potuiſſe, vt Venerem omnino nigram, id eſt luce orbatam poſt occaſum centri ſolis, atque limbo boreali ſolis ita nube temperato, prope contactum exteriorem viderem. Conſonat locus in ſole per tubum Aſtronomicum apparens ad occaſum, ſiue ex parte limbi Solis apparenter occidentalis, conſonat tempus et calculis et egreſſui Veneris reſpondens; quod tamen aliarum obſeruationum deciſioni relinquendum eſt.

Quidquid autem ſit de obſeruatione veſpertina, meum iam eſt, obſeruationem matutinam Illuſtriſſimae Academiae exponere, eamque primum admonere, nos omnes vno circiter quadrante horae ante ortum Solis ſtetiſſe eodem loco ad obſeruandum paratos.

Obſeruatio Egreſſus Veneris die 23 Maii.

Temp. Pend.			Temp. Ver.			
H.	M.	S.	H.	M.	S.	
14	52	15	14	49	58	Venus oriente Sole in parte limbi borealis videtur, limbo Solis et Veneris vndulante, maleque terminato.
	54	42		52	26	Videtur centrum Solis eſſe in horizonte. Venus verſicolor, nam limbus eius borealis ruber, auſtralis caeruleſcens, medium nigrum Obſeruatoribus omnibus apparet.
15	25	59	15	23	43	Venus melius terminatum limbum habere videtur et colores diſparent, vndulatio tamen adhuc notabilis. Contactus interior certo necdum contigit.
	27	50		25	33,7	Domino *Stahl* contactus interior eſſe videtur, limbo Solis necdum inciſo.
	27	57		25	40,7	Cl. D. Adiunctus *Lexell* eundem contactum videt.
	28	0		25	43	Idem contactus Profeſſori *Mayer* videtur accidere.

Temp.

Temp. Pend.			Temp. Ver		
H.	M.	S.	H.	M.	S.
	28	3		25	46, 7
	28	4		25	47, 7
15	41	0	15	38	44

Contactus internus ob ſenſibilem inciſionem et curuaturam limbi ſolis Profeſſori *Mayer* praeteriiſſe videtur.

Eandem limbi inciſionem proxime a contactu notat Praenobilis D. Profeſſor *Euler*.

Dein micrometro obiectiuo diſtantiam Veneris a limbo Solis auſtrali metiri aggreſſus ſum, vt locum Veneris in limbo occidentali Solis quam proxime determinarem. Chorda verticalis obſeruatione inuenta eſt in partibus diametri Solis = 3 dig. 5. lin. 45, 3 particul. ſeu 31′, 36″, 734, vt ſequitur:

dig. lin. part.

2. 4. 10 = 21′, 8″, 365; quae fuit diſtantia Veneris a limbo Solis auſtrali. Subtracta quantitate iſta 21′, 8″, 365 ex diametro Solis in ipſa eclipſi obſeruata 31′, 36″, 734 ſequeretur, centrum Veneris a proximo limbo boreali in egreſſu remo-

Temp.

Temp. Pend.			Temp. Ver.			
H.	M.	S.	H.	M.	S.	
15	45	30	15	43	13,7	D. *Stahl*
	45	40		43	23,7	Cl. D. Adiunctus *Lexell*
	45	47		43	30,7	Praenobilis D. Professor *Euler*
	45	57		43	40,7	Professor *Mayer*

} contactum exteriorem vident.

tum fuisse 10′, 28″, 369. Sed enim centrum Veneris egressum erat 15^{h}, 34′, 39″, id est 4′, 5″ ante hanc dimensionem institutam; igitur supputanda est pars illa exigua proportionalis in partibus circuli maximi, et per eam distantia haec 10′, 28″, 369 obseruatione inuenta minuenda est Plures dimensiones ob viciniam temporis contactus exterioris capere non potui. Is ita habet:

Ex contactu dubio exteriore a me pridie viso - - - - - - - - 9^{h}, 9′, 39″,

Et contactu vltimo - - - - - - 15, 43, 40, 7

Sequitur I. durationem totius transitus fuisse - - - - - - 6, 34, 1, 7

II. Moram inter contactum interiorem et exteriorem obseruatam

	H.	M.	S.
a D. *Stahl*	0	17	40
a Praen. D. Prof. *Euler*	0	17	43
a Cl. D. *Lexell*	0	17	43
a Prof. *Mayer*	0	17	57

Constitueram primum, omnino supprimere dimensionem diametri Veneris, a me micrometro obiectiuo, tubo Palatino 7. pedum adhaerente, factam hora Penduli $15, 7', 48''$, seu $15^h, 5', 32''$ T. V. eamque a me inuentam 1. lin. 4. particul., id est $57''$; eoquod in annotanda hac obseruatione, omissa linea, particulas tantum fuisse notatas inuenerim; sed, re melius considerata, visum est, rem, vt acciderat, communicare.

Atque talis quidem fuit obseruatio celeberrimi huius phaenomeni, caelo non vsque adeo iniquo, vt non potius confidam, eam plurimum profuturam ad veram parallaxeos inquisitionem, si eum laborem in se susceperit Illustrissimus, et toto orbe notissimus Dominus Professor *Leonardus Euler*. Id certum, paucis post egressum Veneris minutis vndulationem limbi Solaris omnem sublatam, nobis pulcherrimam occasionem praebuisse faciendae tunc obseruationis eclipsis Solaris instantis, quo toto tempore nulla in caelo nubecula apparuit, barometro stante ad altitudinem 28. dig. 2 linearum.

Et ego quidem tubo 7. pedum achromatico ope micrometri obiectiui phaſes huius eclipſis metiebar: Praenobilis D. Profeſſor *Euler* tubo dioptrico 9. pedum, habente micrometrum ordinarium, macularum immerſiones et emerſiones: Cl. D. Adiunctus *Lexell* eodem, quo mane vſus erat, teleſcopio Schortii diſtantiam cornuum: D. *Stahl* altitudines Solis obſeruandas ſuſceperant, quamuis illi ab hoc negotio fuerit abſtinendum, quod eius opera in dirigendo micrometro et notandis particulis maxime indigerem.

Quod ad valorem partium micrometri pertinet, eum ex aſſumpta diametro Solis pluribus ante diebus concluſimus. Captis enim plus quam 40. eiusmodi obſeruationibus prope meridianis id tandem deduximus, particulam vnam micrometri mei proxime aequalem eſſe $1''$, 0565, vnde lineam aequiualere $52''$, 8250, atque decem eiusmodi lineas, i. e. digitum $8'$, $48''$, 2500, cui baſi innititur tabula micrometri huius Palatini.

Neque minus inde conſtat, iſto micrometro in 5. digitos Londinenſes diuiſo, quorum ſinguli continent 10. lineas, angulum ſubtendi poſſe $44'$, $1''$, 2500, magno ſane Aſtronomicarum obſeruationum commodo; ſiquidem huiusmodi inſtrumento coniunctiones omnes fixarum cum planetis et praecipue cum luna multo quidem exactius, quam micrometris ordinariis, determinari poſſunt. Sed enim de vſu huius micrometri atque eius praeſtantia non

eſt

eſt hic dicendi locus. Mihi nunc ſatis eſt oſtendere, me ex dimenſione diametri Solaris, per eos dies quotidie variantis, variata quoque menſura micrometri, ſumpto ſemper ex pluribus obſeruationibus arithmetice medio, veritatem proxime attigiſſe, vt reductio particularum eiusdem in obſeruatione eclipſis Solaris omnino pro iuſta et exacta aſſumenda videatur.

Obſeruatio Eclipſis Solaris

Petropoli in ſpecula Aſtronomica die 23. Maii 1769. Tubo achromatico *Dollondi* 7. pedum, micrometrum obiectiuum habente, facta a *Chriſtiano Mayer*, Sereniſſimi Electoris Palatini Aſtronomo.

Temp. Pend. M.	Temp. Pend. S.	Temp. Ver. H.	Temp. Ver. M.	Temp. Ver. S.		Immerſiones. Partes Dig.	Microm. lin.	Microm. partic. Partes	Minuta reducta. M. S. Decim. lucidae.			Minuta reducta. M. S. Decim. Partes obſcuratae		
12	45	9	10	28, 7	initium									
17	0		14	54		3	3	38	29	43	37	1	53	36
21	7		18	51		3	1	46	28	6	17	3	30	56
24	50		22	34		3	0	8	26	33	20	5	3	53
27	48		25	32		2	8	37	25	18	19	6	18	18
33	6		30	50		2	6	29, 9	23	25	03	8	11	69
36	46		34	30		2	5	7, 3	22	8	33	9	28	39
39	37		37	21		2	4	5, 8	21	13	92	10	22	80
42	50		40	34		2	2	47	20	11	80	11	24	92
45	35		43	19		2	1	49	19	21	09	12	15	64
48	4		45	48		2	1	12, 3	18	42	31	12	54	41
54	1		51	45		1	9	37	17	22	76	14	13	96
57	47		55	31		1	9	2, 3	16	46	10	14	50	62
1	42		59	26		1	8	17	16	8	81	15	27	92
11	3	10	8	47		1	7	45, 4	15	45	99	15	50	74

T. Penduli H.	M.	S.	Temp. Verum. H.	M.	S.		Emersiones. Partes microm Dig.	lin.	partic.	Minuta reducta. Partes lucidae. M	S.	Decim.	Minuta reducta. M.	S.	Decim. Part. obscuratae
22	17	26	10	15	10		1	8	19	16	10	92	15	27	81
	21	14		18	58		1	8	47	16	40	50	14	56	22
	24	29		22	13		1	9	26, 6	17	11	77	14	24	95
	27	7		24	51		2	0	10, 5	17	47	59	13	49	14
	30	46		28	30		2	1	6	18	35	66	13	1	07
	35	22		33	6		2	2	27, 2	19	50	88	11	45	84
	39	41		37	25		2	3	45, 5	21	3	04	10	33	68
	42	54½		40	38		2	5	5, 3	22	6	22	9	30	51
	45	41		43	25		2	6	0, 9	22	54	40	8	42	33
	55	50		53	34		3	0	10, 3	26	35	63	4	1	10
	59	45		57	29		3	2	7, 2	28	8	00	3	18	72
23	3	34	11	1	18		3	3	40	29	45	48	1	51	24
	6	7		3	51		3	4	40, 2	30	38	52		58	21
	8	30		6	14	Finis.									
	9	56		7	40	Diameter ☉ capta microm. obiectiuo	3	5	45, 3	31	36	7344			

Ex distantia cornuum heliometro a Cl. D. *Lexell* dimensa diam. lunae fuit 33′. 50″. 47.

Ex initio et fine medium huius eclipseos eruitur hora 10. 8′, 20″, 2 T. V. Duratio tota 1^h, 55′, 44″, 3.

Cl. D. Adunctus *Lexell* initium eodem prorsus momento temporis, quo ego, 9^h, 10′, 28″, 7 obseruauit: finem 11^h, 6′, 9″ T. V. hinc duratio tota fit 1^h, 55′, 40″ medium eclipseos 10^h, 8′, 18″, 8, T. V.

D.

D. *Stahl* initium 4. Secundis nobis citius vidit tubo quadrantis Palatini, nempe 9^h, 10′, 24″, 7, cuius etiam obſeruationi pro vero contactu limbi lunae ita deferendum eſſe puto, vt detractis adhuc 2″, initium verum huius eclipſeos ponendum eſſe cenſeam 9″, 10′, 23. T. V. qua correctione adhibita medium eclipſeos fit 10^h, 8′, 18″, 5, et duratio tota 1^h, 55′, 51″, nempe 6″ et 7 decimis maior, quam immediate ex ipſa obſeruatione a me facta eruitur.

Impeditus accommodando micrometro ſuo Praenob. D. Profeſſor *Euler* initium quidem non obſeruauit, ſed finem in proiectione Camerae obſcurae notauit 11^h, 6′, 5″, T. V.

Eundem quoque finem in inferiori conclaui ſpeculae Aſtronomicae obſeruauit Praenob. D. Profeſſor *Kotelnikow* tubo ſuo achromatico 11^h, 12′, 42 vel 43″ ſui penduli, quod factis plurimis comparationibus ſpatio 24 horarum accelerabat ſupra pendulum Londinenſe 55″. Aliunde tamen conſtabat, indicem eiusdem penduli praecedere 4′, 2″ pendulo Londinenſi; vnde hac quantitate 4′, 2″, a tempore obſeruato ſubtracta, tempus huius obſeruationis incidit in 11^h, 8′, 40″ penduli Londinenſis, ſeu in 11^h, 6′, 24″ T. V. atque hinc iterum ſublatis 18″, quanta fuit acceleratio penduli Praen. D. Prof. *Kotelnikow* ab hora 3 matutina vsque ad horam 11, contingit tempus verum

finis huius eclipſeos a Praen. D. Profeſſ. *Kotelnikow* obſeruati $11^{b}, 6', 6''$, quod proxime coincidit cum tempore a Praen. D. Profeſſore *Euler* in proiectione obſeruato.

Quantitas obſcurationis ex mea obſeruatione erat 6 dig. 065. ſeu $15', 50'', 744$ eiusmodi partium, quarum diameter Solis hora 11. $7', 40''$, eodem micrometro dimenſa capiebat $31', 36'', 7344$.

Quantum ad dimenſionem diametri lunaris, ex repetita dimenſione diſtantiae cornuum lunae, capta a Cl. D. *Lexell* ope alterius heliometri, teleſcopio catoptrico Schortii adhaerentis, eius quoque valorem partium ſcalae ex comparatione dimenſionum diametri Solis conſecuti ſumus. Nam cum paulo ante et poſt tempus huius eclipſeos diametrum Solis apparentem vtroque heliometro dimenſi eſſemus, Cl. D. Adiunctus *Lexell* eam inuenit $4^{dig.}\ 1^{lin.}\ 19^{part.}$ ope ſui micrometri, qualem ego in meo, tubo 7. pedum achromatico *Dollondi* accommodato, deprehendi $3^{dig.}\ 5^{lin.}\ 45^{part.}$ 3. Hinc facta reductione vtriusque micrometri ad eundem valorem partium, apparentem diſtantiam cornuum, atque inde apparentem diametrum lunae ſupputauimus.

De

De Maculis in Eclipſi hac obſeruatis, earumque poſitione.

Maculae in Sole erant omnino *6*. Earum immerſio et emerſio a Praen. D. Profeſſore *Euler* ita obſeruatae ſunt.

		Temp. Pend.			Temp. Ver.		
Maculae maioris immerſio		H.	M.	S.	H.	M.	S.
Limb. dext. - - -		9	38	5	9	35	49
Limb. ſiniſt. - - -		9	39	40	9	37	24
Maculae I.	Immerſio -	9	49	19	9	47	3
	Emerſio - -	10	38	40	10	36	24
Maculae II.	Immerſio -	9	51	42	9	49	26
	Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Maculae III.	Immerſio -	9	53	32	9	51	16
	Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Mac. paruae	Immerſio -	10	0	25	9	58	9
	Emerſio - -	10	52	41	10	50	25
Mac. in margine	Immerſio	10	10	26	10	8	10
	Emerſio	11	5	12	11	2	56

Finita obſeruatione poſitionem macularum micrometro obiectiuo determinaui, ſed earum duntaxat, de quibus ſuſpicio eſſe poterat, vel eſſe, vel ſaltem propinquas eſſe ſatelliti Veneris, cui obſeruando iam pridie et triduo poſt toti eramus intenti: in his ſuſpicionem praebuit macula tertia, mole valde exigua et magis ceteris rotunda; quamuis et ipſa in limbo inferiore irregularis appareret.

Poſitio

Positio Macularum

Intuitu diametri Solaris verticalis et horizontalis.

	Temp. Pend.			T. Verum.			dig.	lin.	part.
margo finister -	11^b	48′	13″	11^b	45′	57″	1	1½	8, 5
Maculae mai. Positio horiz.									
margo dexter -	11	51	16	11	49	0	1	2⅛	9
Eiusdem Positio vertical. -	11	57	30	11	55	14	1	3½	10
Mac. III. Positio vertic. -	12	11	53	12	9	37	1	2½	1
Posit. horizont -	12	18	39	12	16	23	1	4½	16
posit. horizont	12	24	21	12	22	5	0	1	17
Mac. in margine									
posit. vertic. -	12	29	43	12	29	27	0	2	17

Ex his obseruationibus apparentem trium macularum situm in schema coniecimus, assumpta diametro Solis 359 partium decimalium, seu 3 dig. 5 lin. 45 particularum, quo posito.

Maculae maioris distantia a limbo occidentali Solis fit 131.
a limbo australi - - - - 137.
Maculae 3^{tiae} distantia a limbo occidentali - - - 148.
a limbo australi - - - 125.
Maculae marginalis distant. a limbo orientali - - - 013.
ab eodem limbo versus austrum - 023.

Simili ratione et trium reliquarum macularum, et plurium huiusmodi positiones sequentibus diebus a me determinatae sunt, quarum hic vnum duntaxat exemplum ad eiusdem diei obseruationes pertinens dedimus.

NATURAL HISTORY

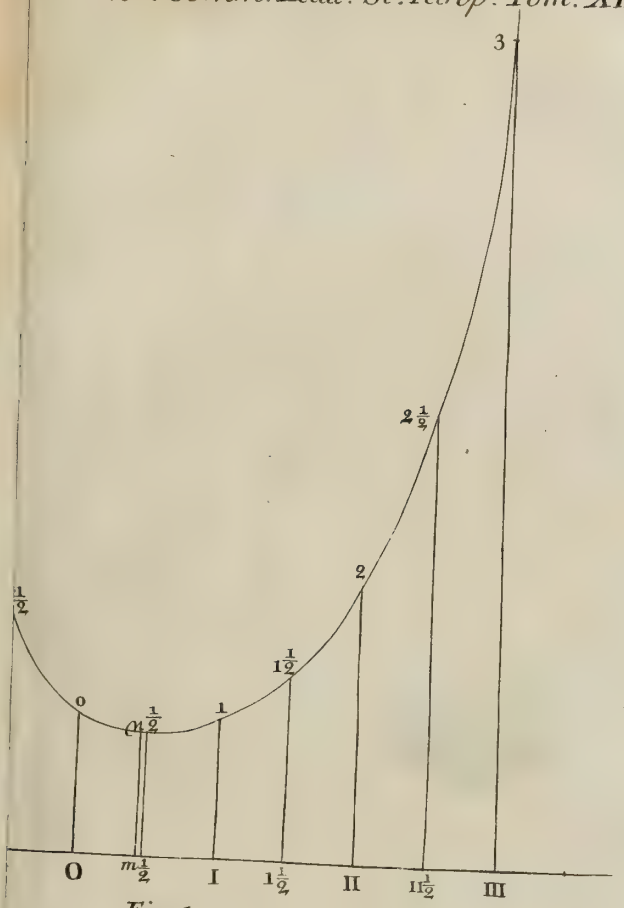


Fig. 1.

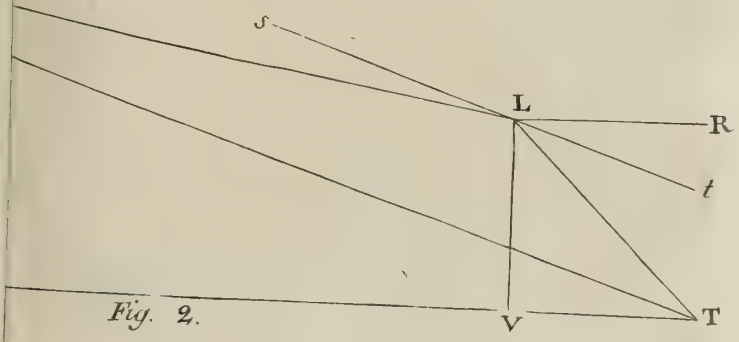


Fig. 2.

Fig 1

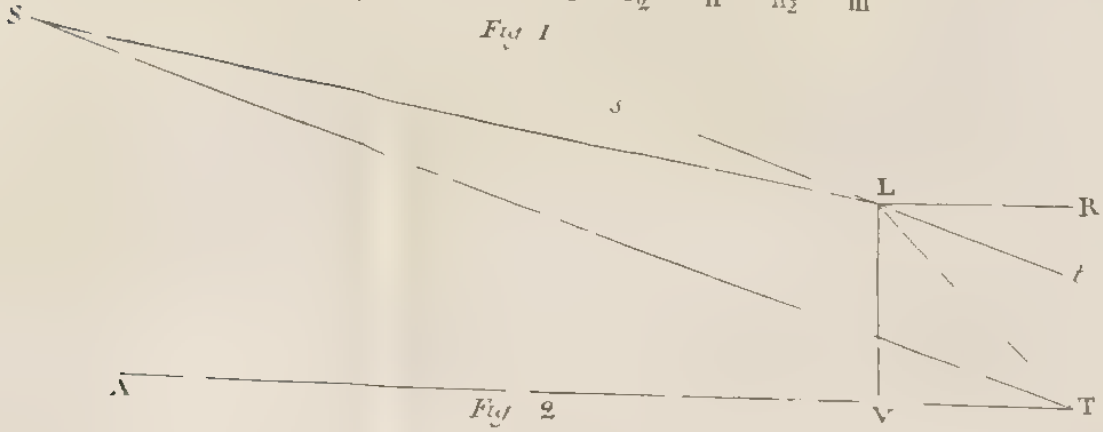


Fig 2

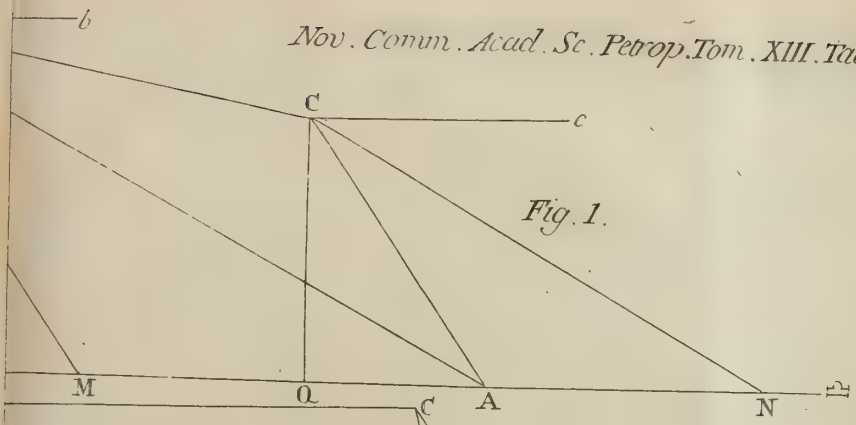


Fig. 1.

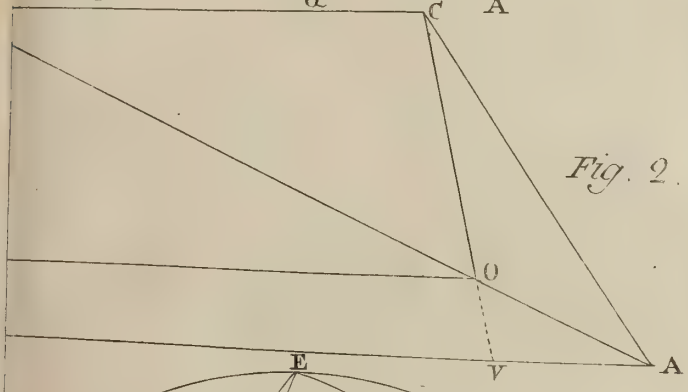


Fig. 2.

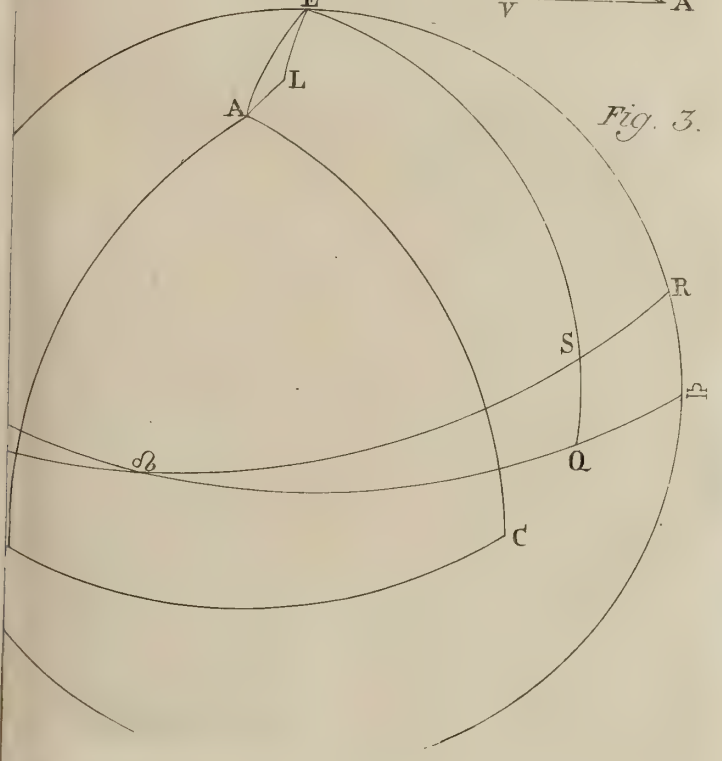


Fig. 3.

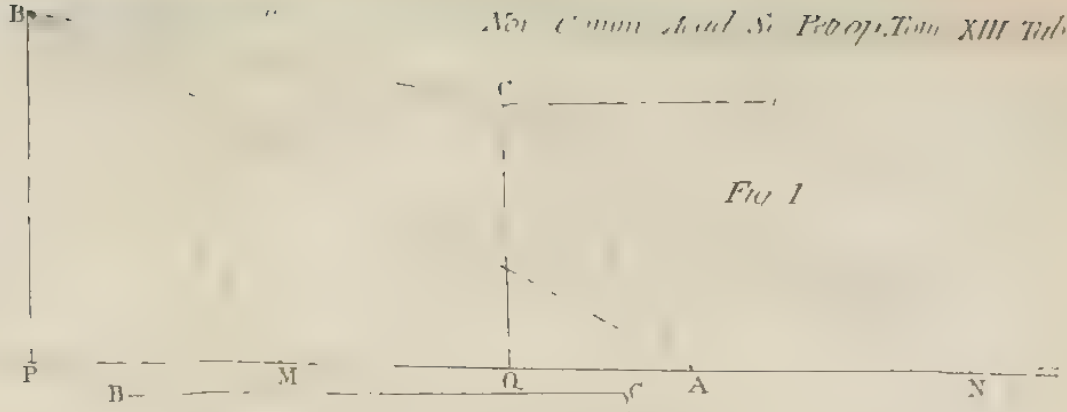
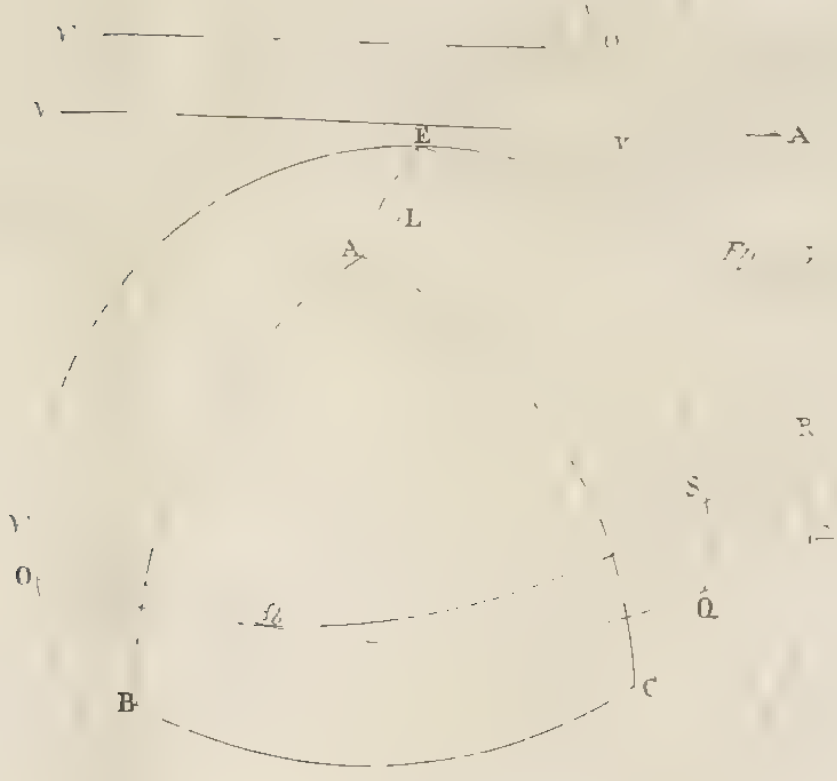
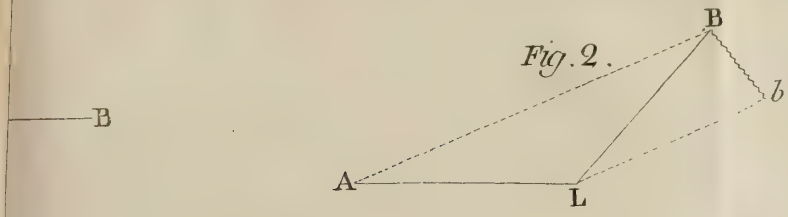
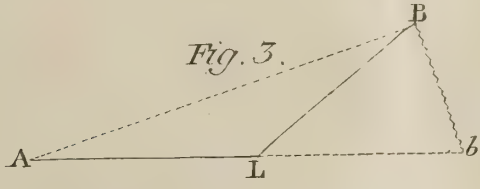


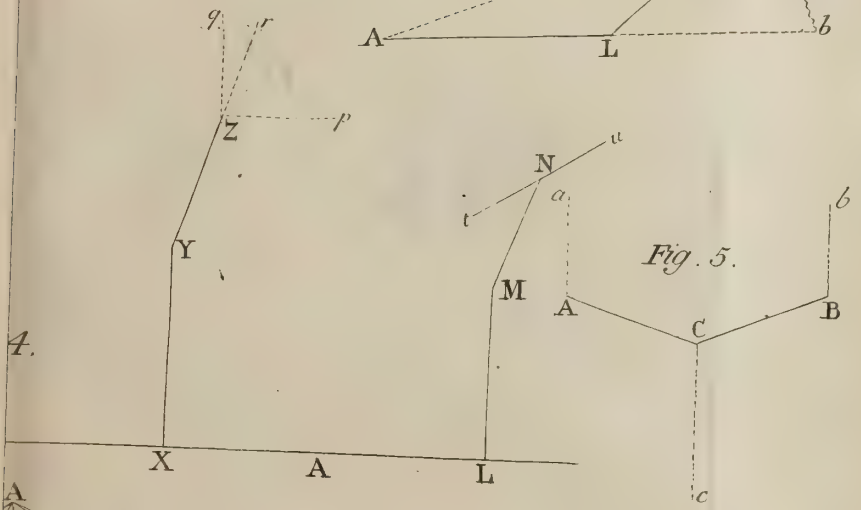
Fig. 1

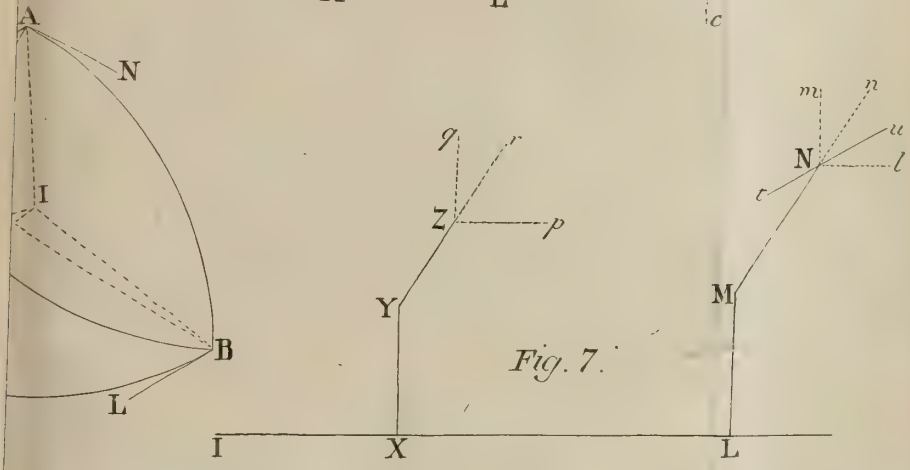
Fig. 2




B
Fig. 2.
b
A
L


B
Fig. 3.
A
L
b


q
r
Z
p
Y
N
u
t
a
M
b
Fig. 5.
A
C
B
X
A
L
c


A
N
I
B
L
q
r
Z
p
Y
Fig. 7.
m
n
u
N
l
t
M
I
X
L

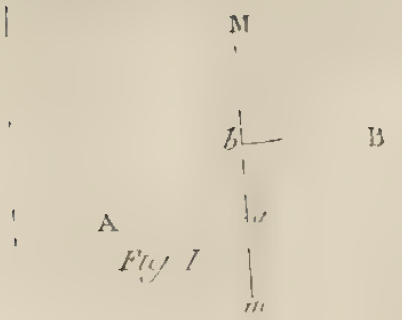


Fig. 1

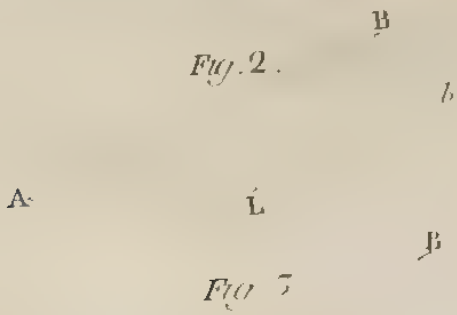


Fig. 2.

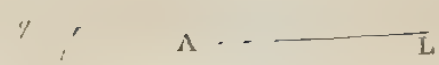
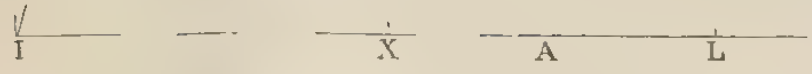


Fig. 3

Fig. 4



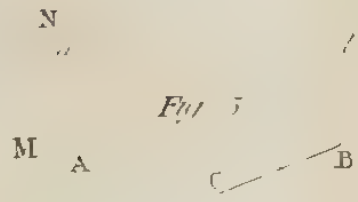
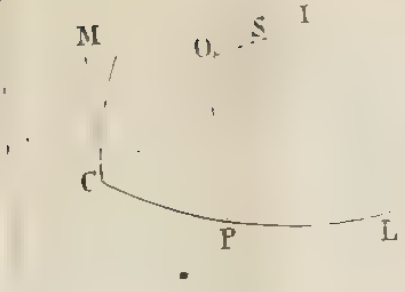


Fig. 5

Fig. 6



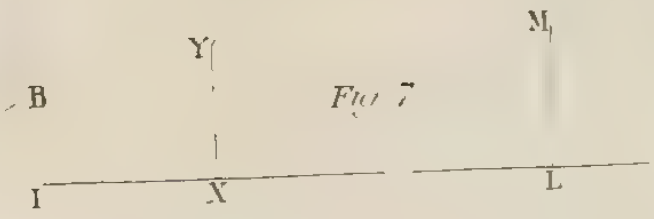
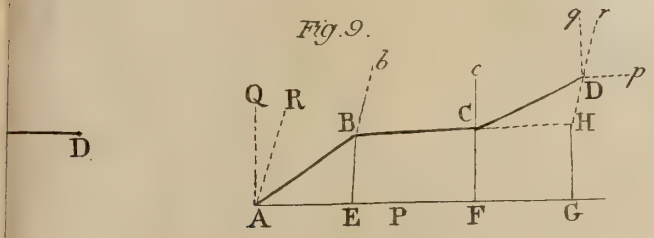


Fig. 7

Fig. 9.



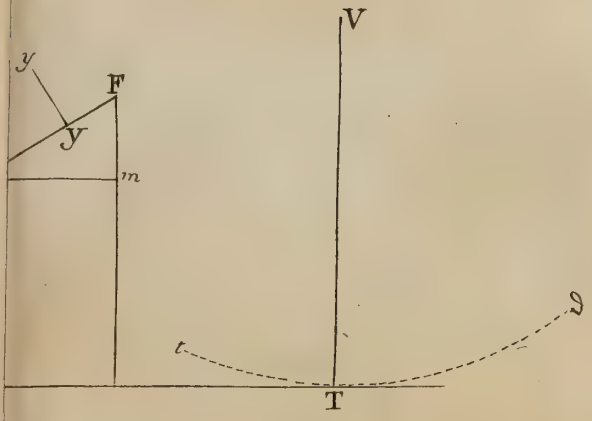


Fig. II.

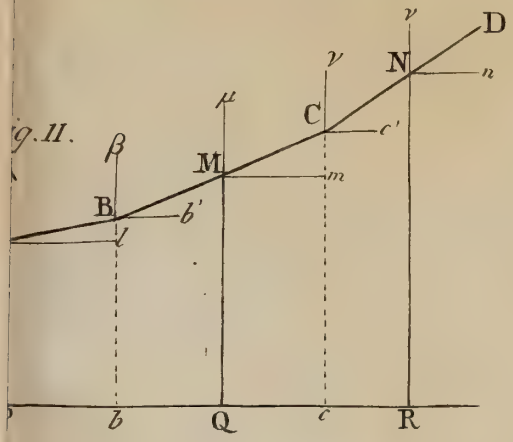


Fig. 8.

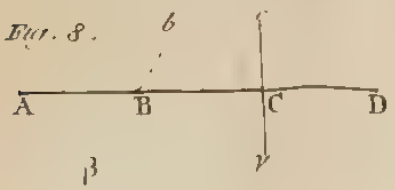


Fig. 9.

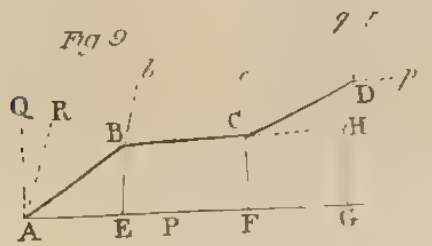


Fig. 10.

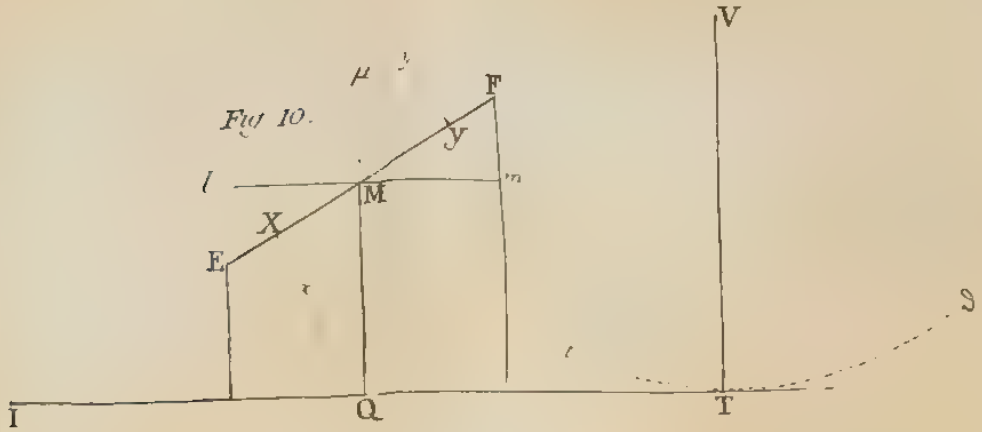


Fig. 11.

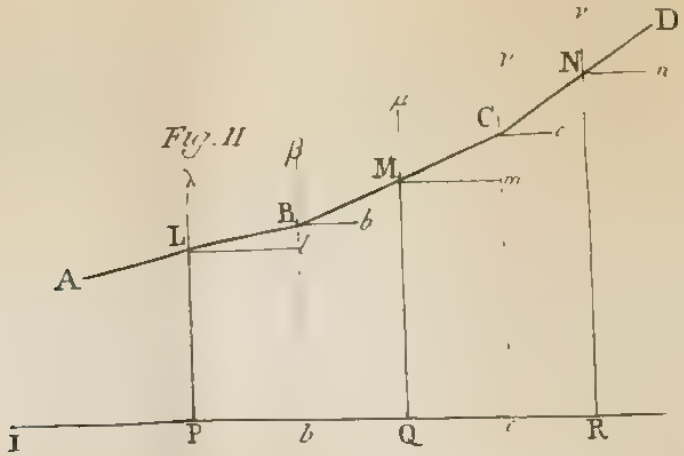


Fig. 2.

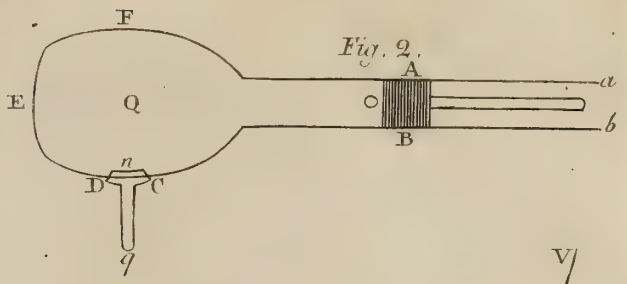
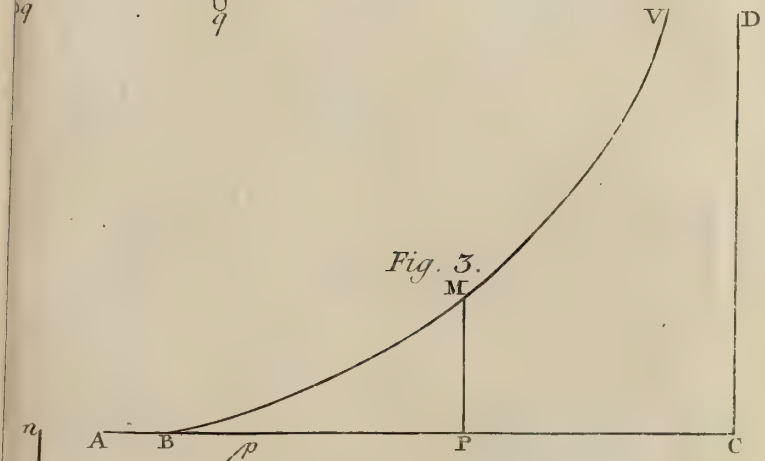


Fig. 3.



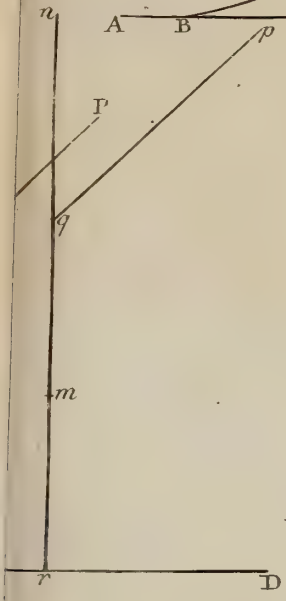


Fig. 5.

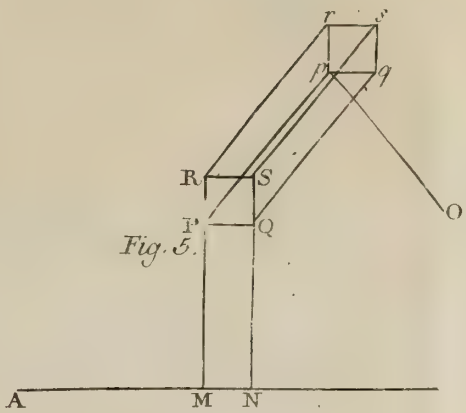


Fig. 1

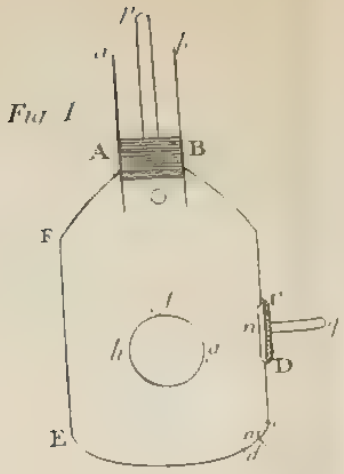


Fig. 2

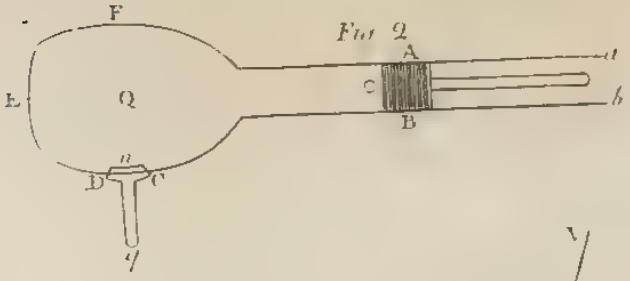


Fig. 3.

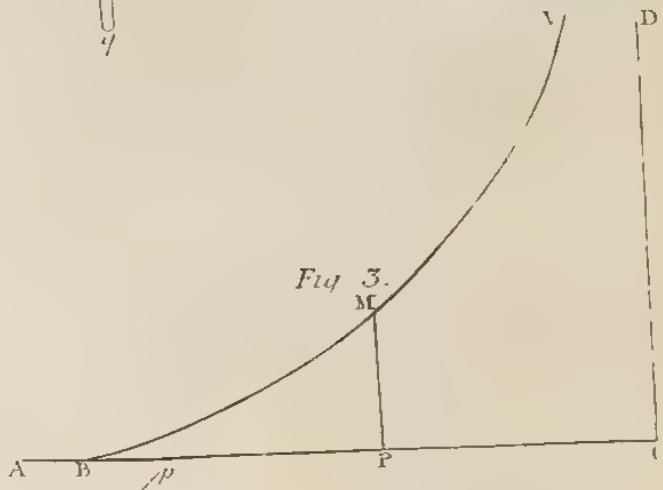


Fig. 4

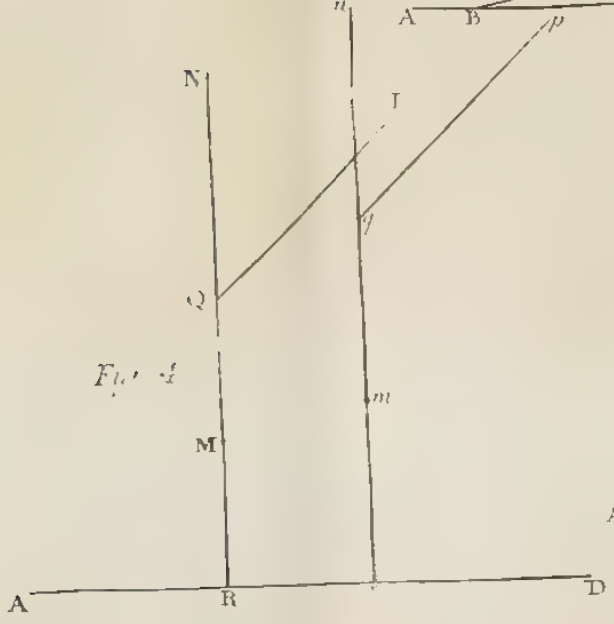
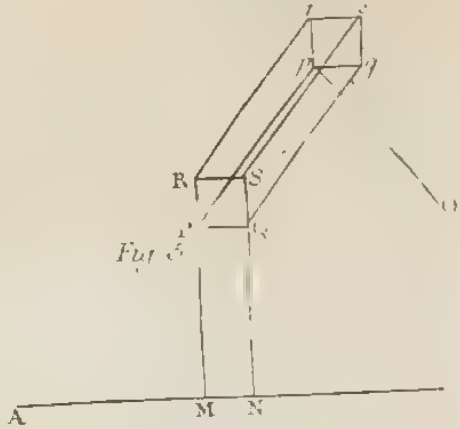
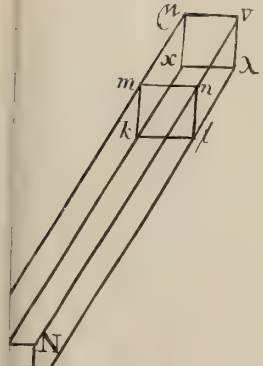


Fig. 5





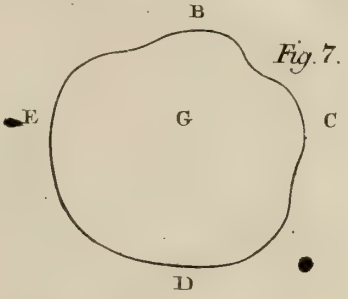


Fig. 7.

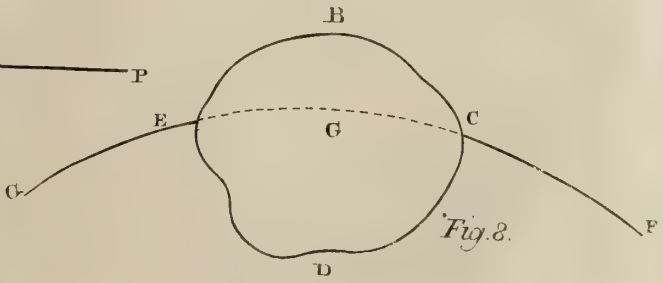
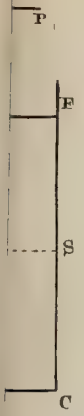


Fig. 8.



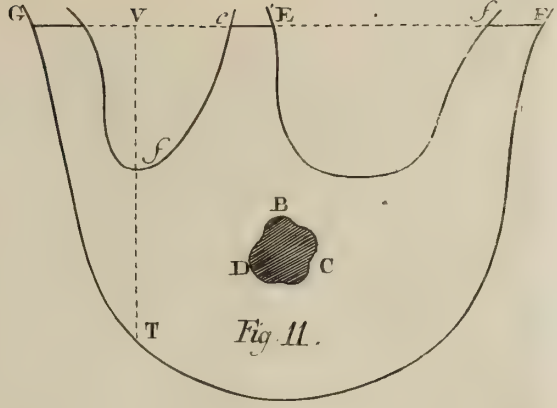


Fig. 11.

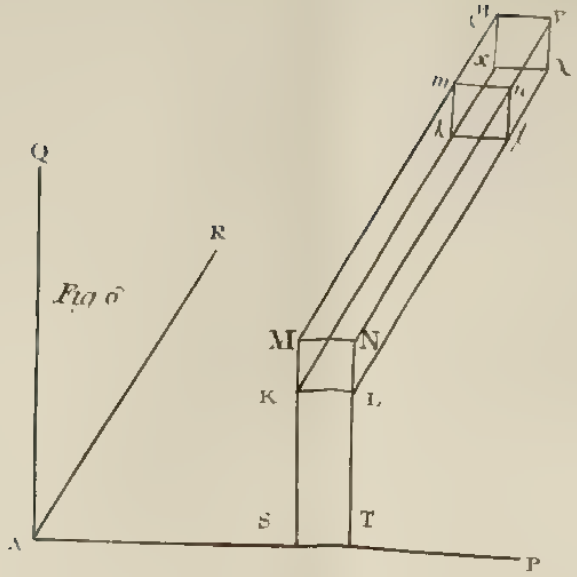


Fig 6

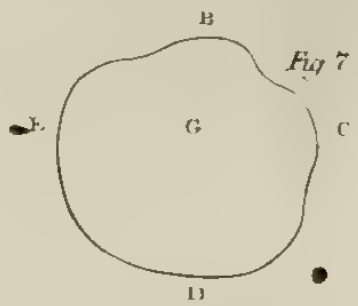


Fig 7

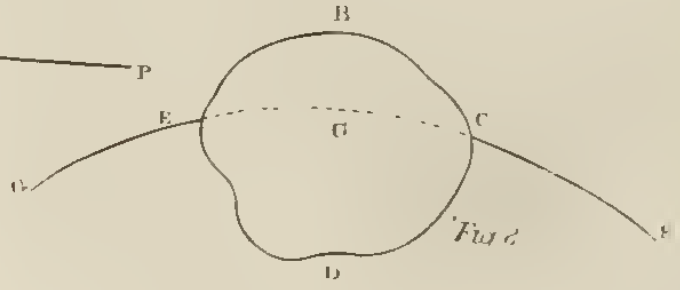


Fig 8

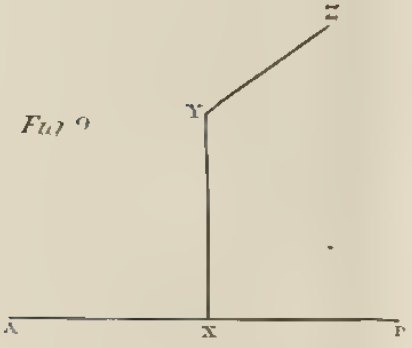


Fig 9

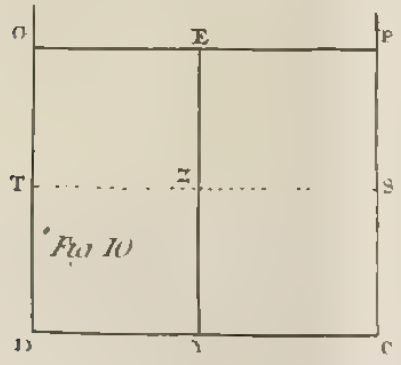


Fig 10

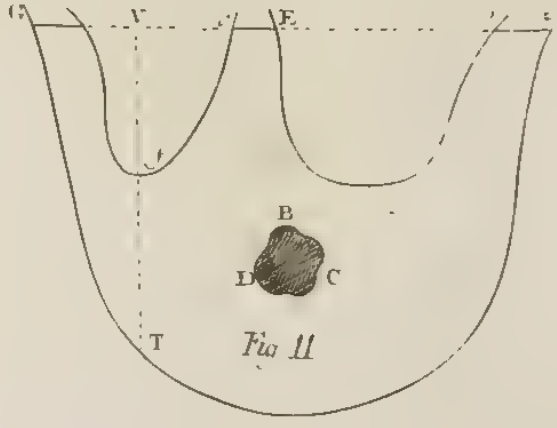
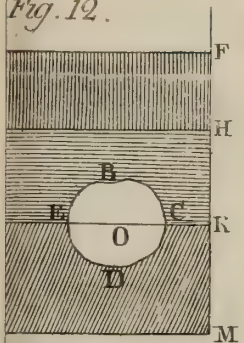


Fig 11

Fig. 12.



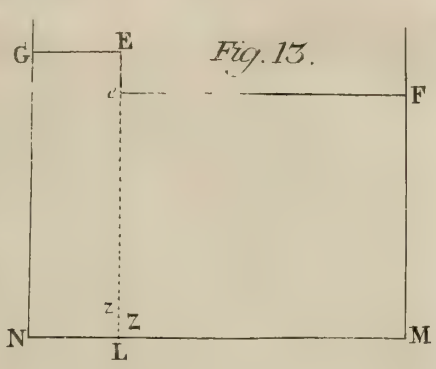


Fig. 13.

Fig. 14.

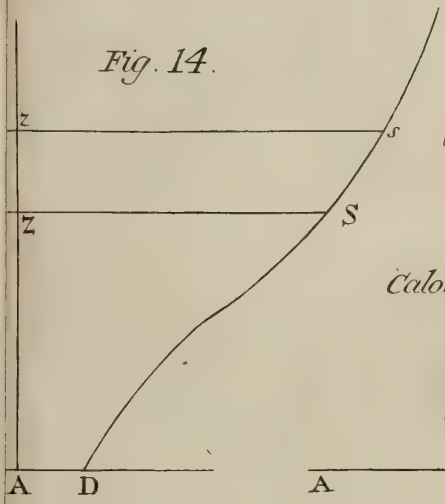
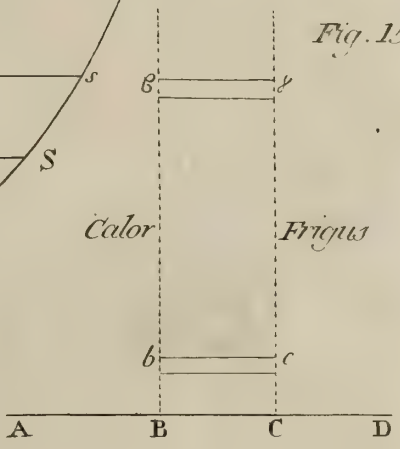
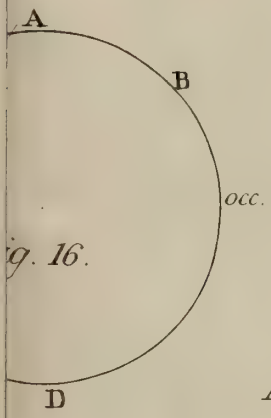


Fig. 15.





g. 16.

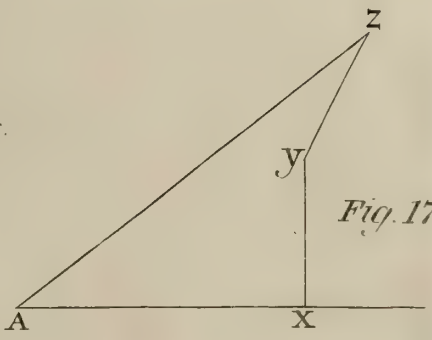


Fig. 17.

Fig. 12

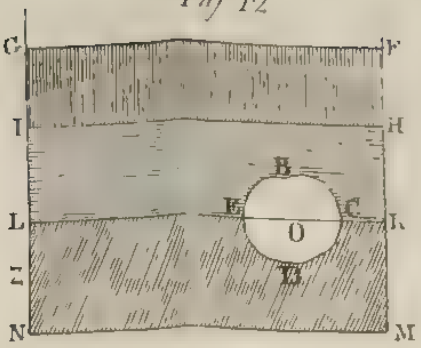


Fig. 13

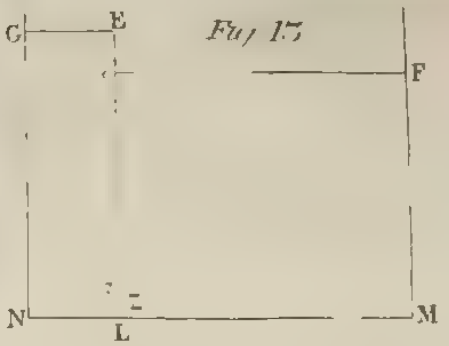


Fig. 14

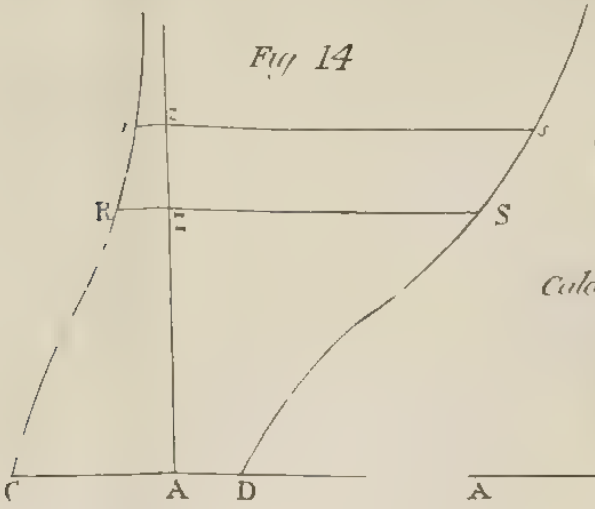


Fig. 15

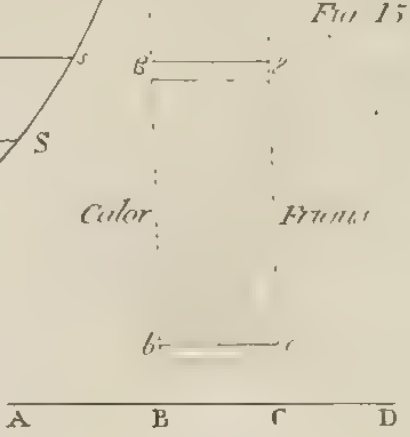


Fig. 16

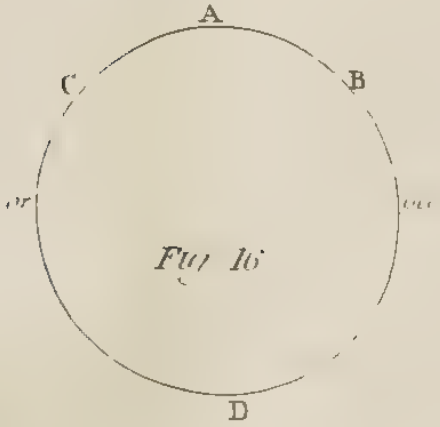
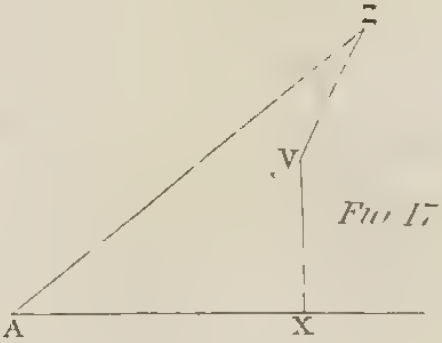
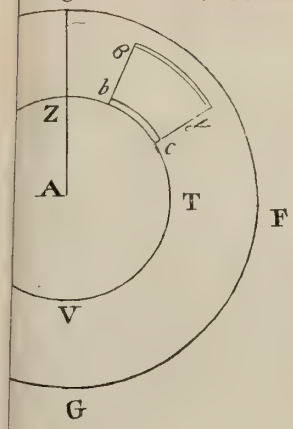


Fig. 17





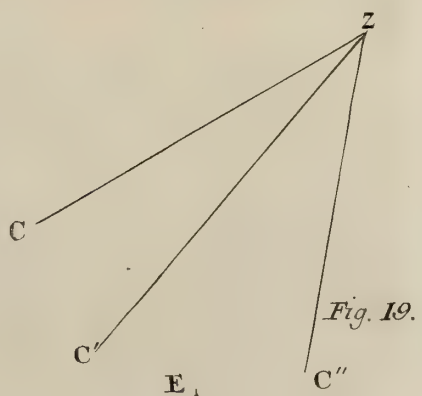
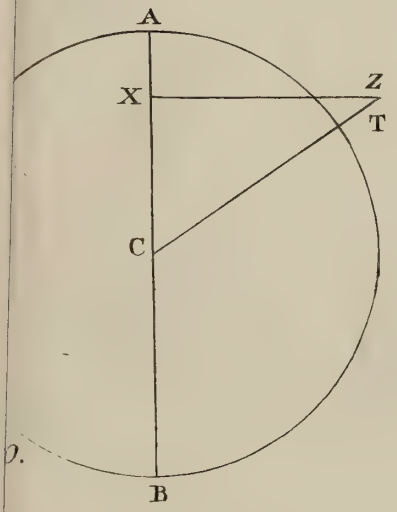


Fig. 19.



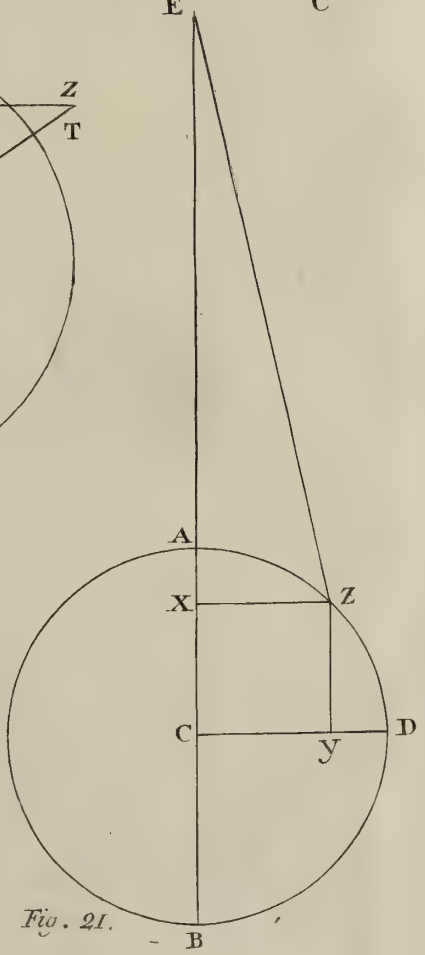


Fig. 21.

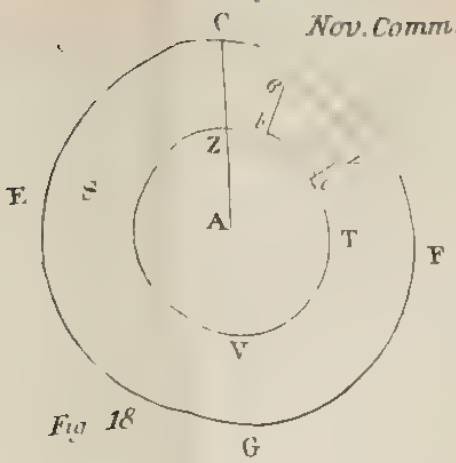


Fig. 18

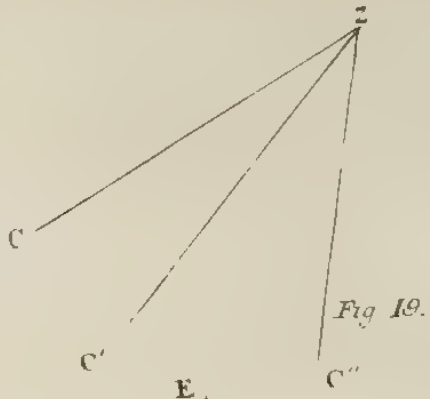


Fig. 19.

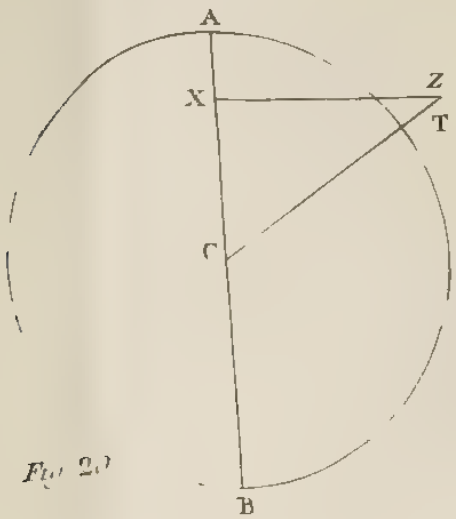


Fig. 20

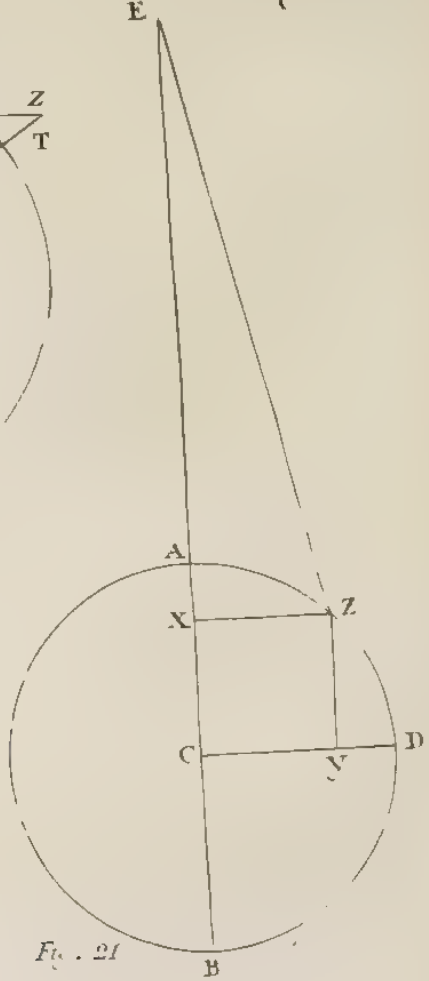


Fig. 21

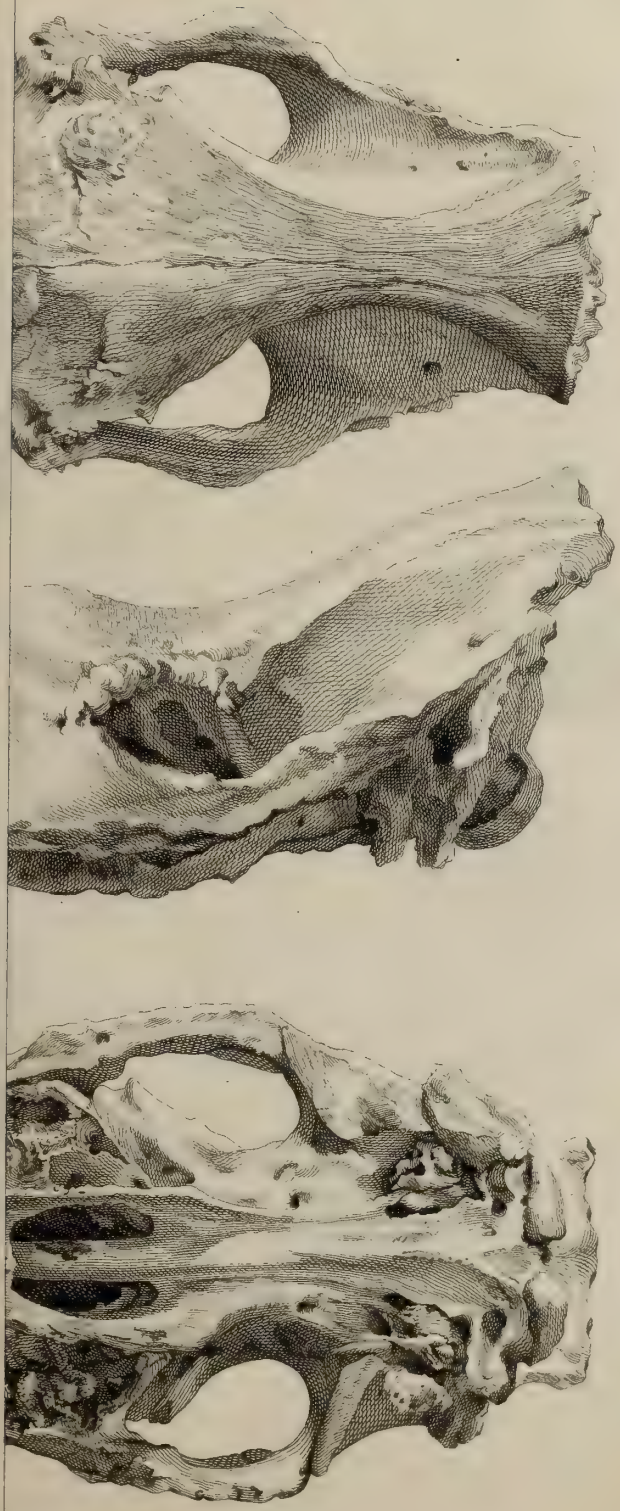


Fig 1.

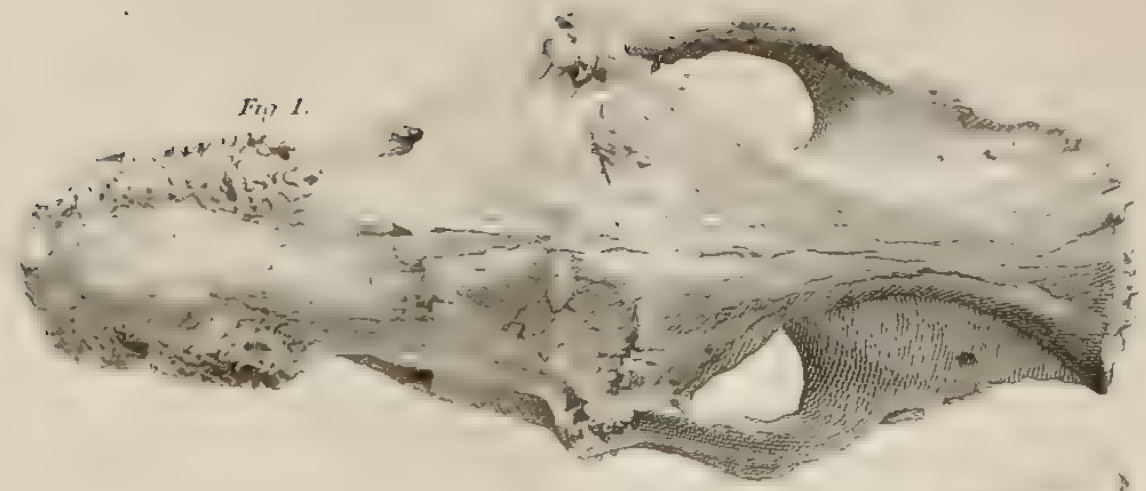


Fig 2

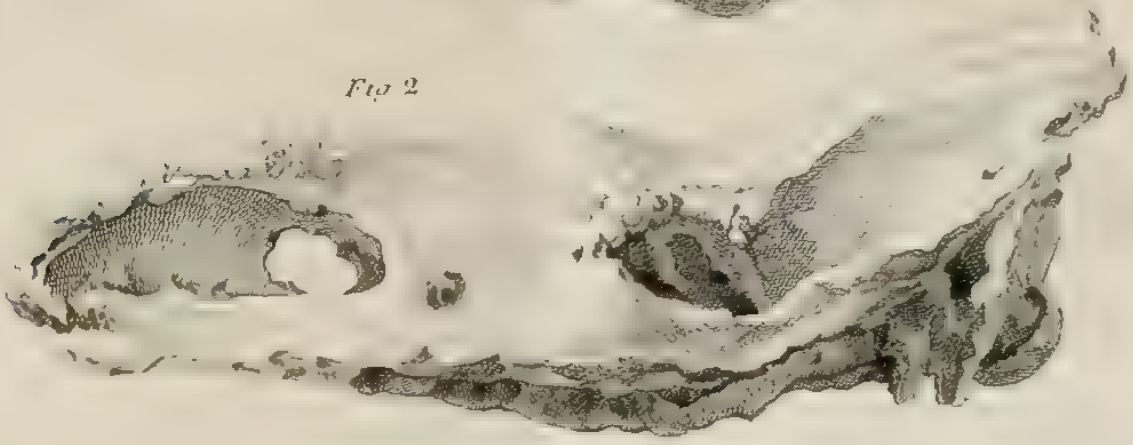


Fig 3

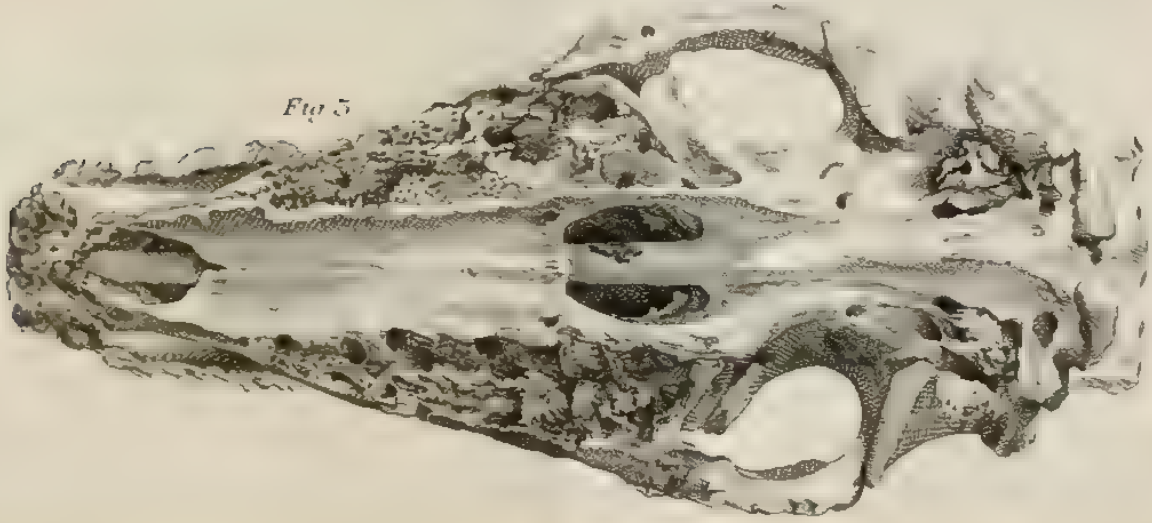


Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
5
10
15
20
24

Fig. 5.

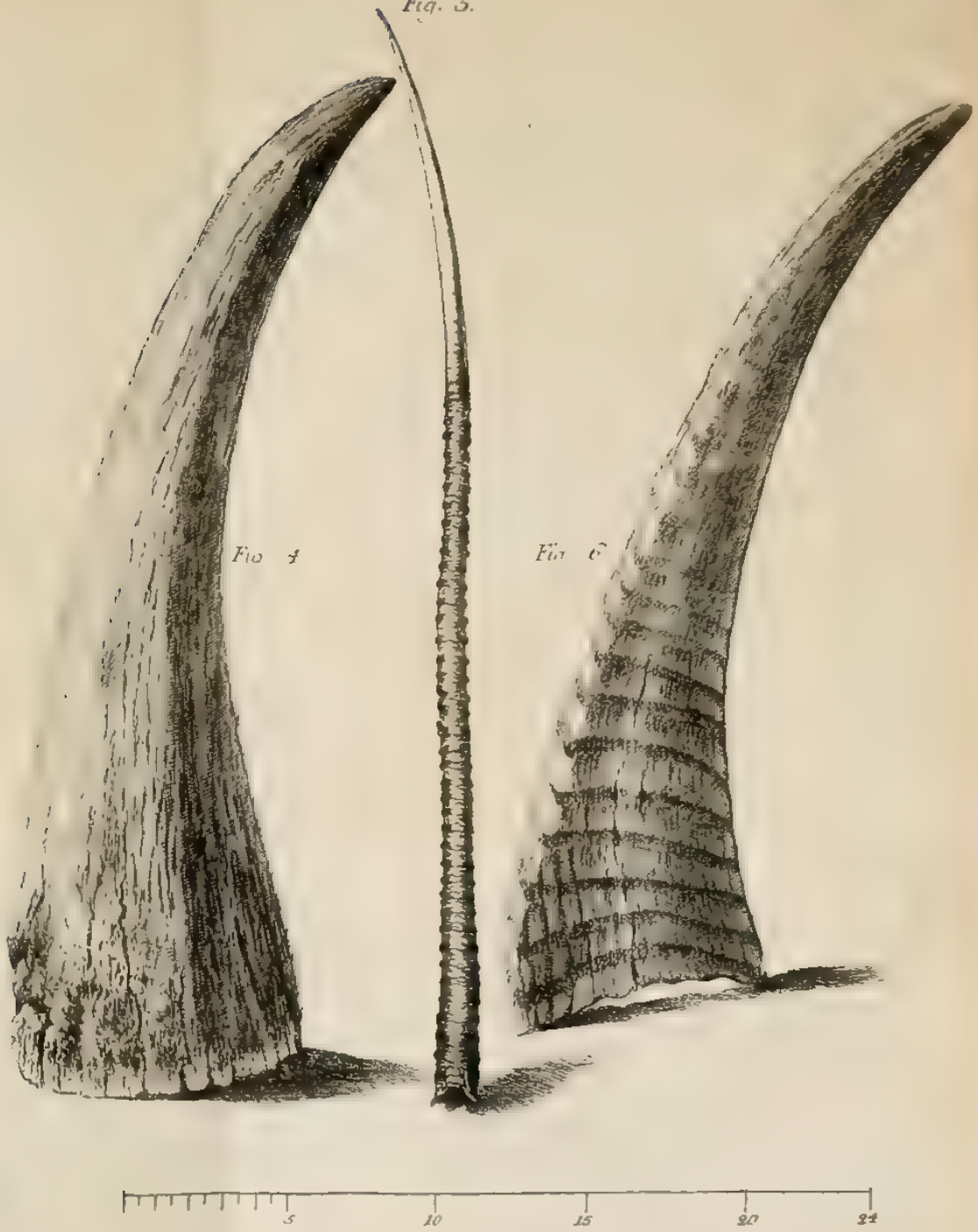


Fig. 2.

Fig. 1

Fig. 2

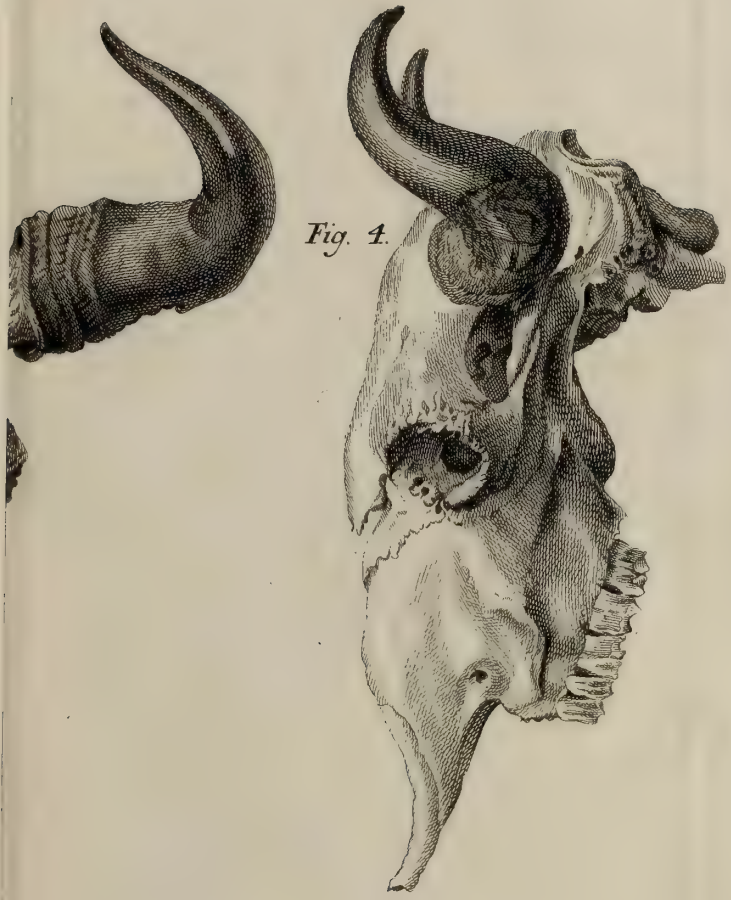


Fig. 4.

15 20 24

Fig 3

Fig 4

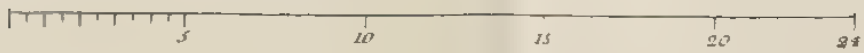


Fig. 2.

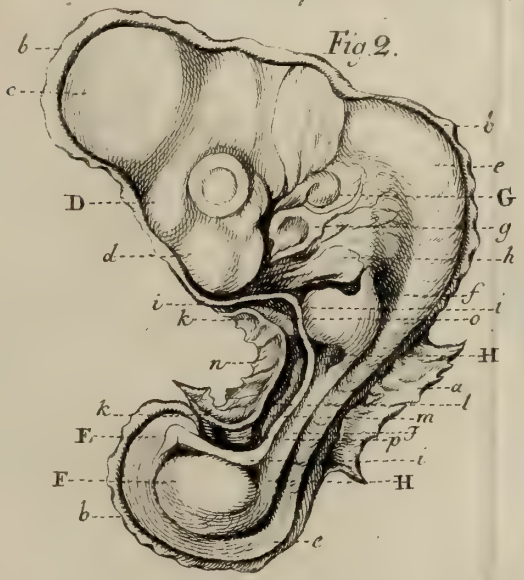


Fig. 4.

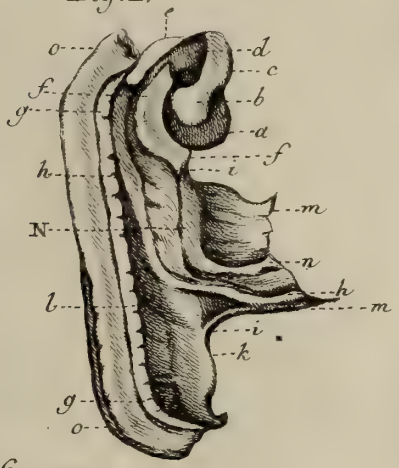


Fig. 6.

Fig 1.

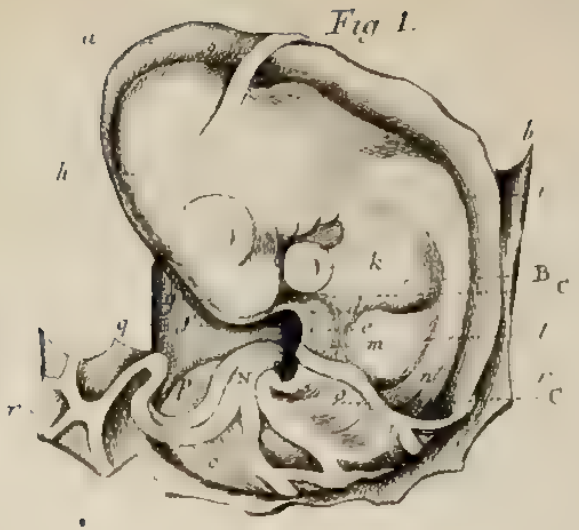


Fig 2

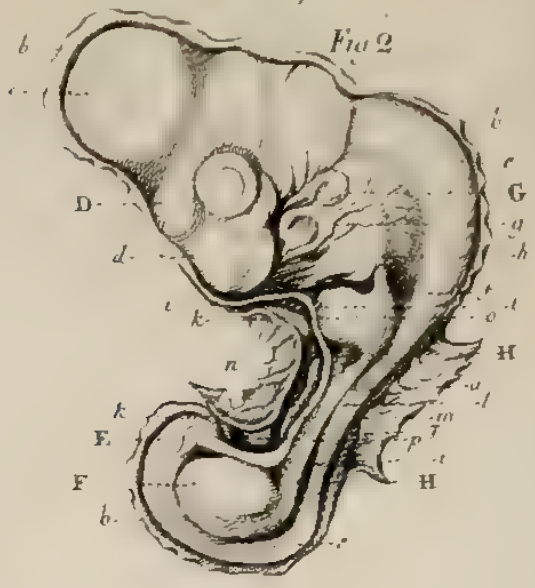


Fig. 3.

Fig 4.

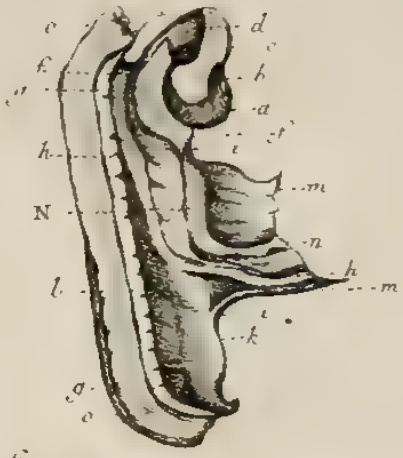


Fig. 5.

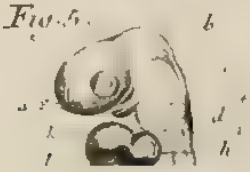
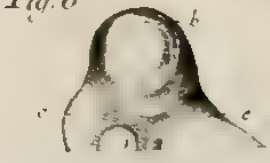


Fig. 6



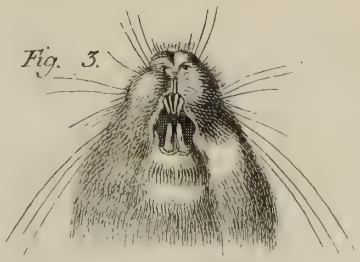


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

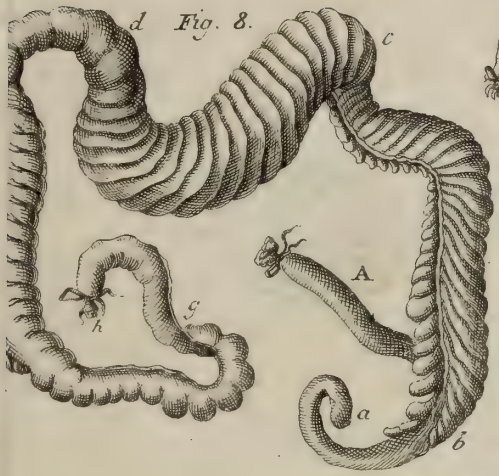


Fig. 8.

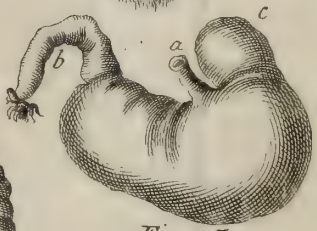


Fig. 7.

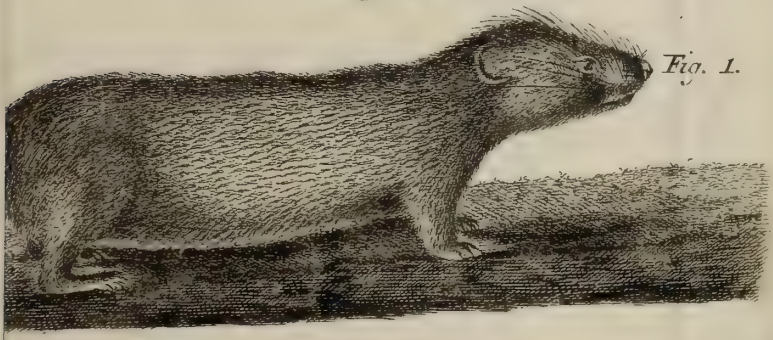


Fig. 1.

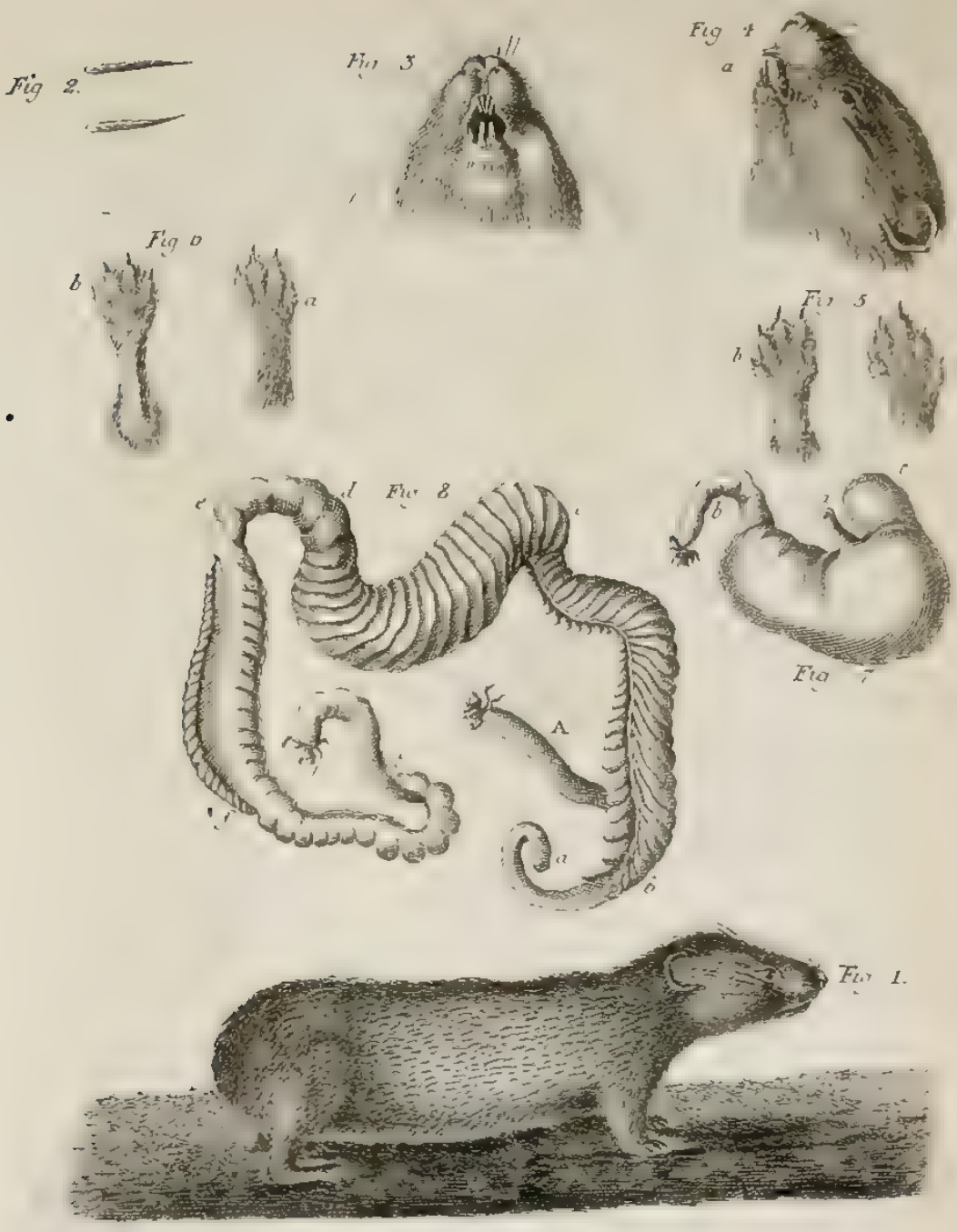
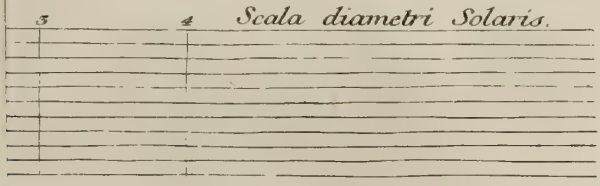
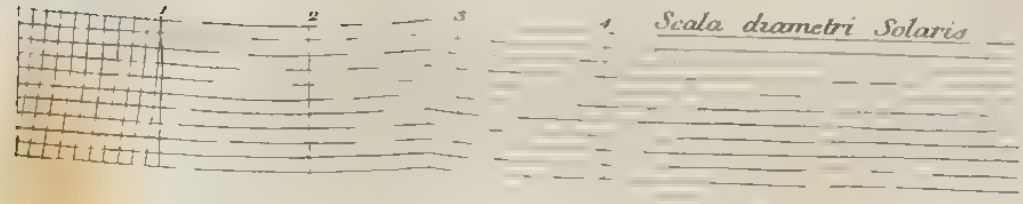


Fig 2.
Fig 3
Fig 4
a
Fig 6
b
a
Fig 5
b
Fig 8
A
Fig 7
Fig 1.

Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. XIII ad Class. Astronom.





Situs maculorum
tempore eclipseos Solaris
apparens in tubo Astronomico.

Ortus

Ortus

Meridianus

Occasus